

Chapitre 3

Suites numériques

3.1 Limites

3.1.1 Définitions

Définition 1

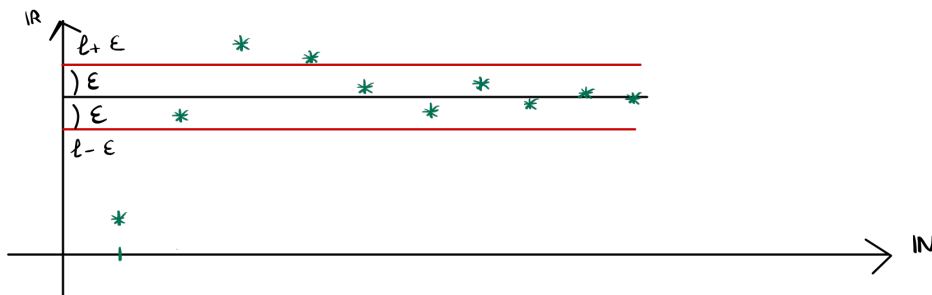
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Illustration graphique :



Définition 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si on a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies u_n \geq A.$$

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Définition 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si on a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 1

Toute suite convergente est bornée.

Preuve. (D1)

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq 1$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, |u_n| &= |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \\ &\leq 1 + |\ell| \end{aligned}$$

$$\text{On pose } M = \max \{1 + |\ell|, |u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|\}$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

□

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ .

Si $\ell > 0$ alors il existe un réel $m > 0$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que l'on ait $\forall n \geq n_0, u_n > m$.

Preuve.

Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell > 0$

On écrit la définition avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon = \frac{\ell}{2}$$

$$\text{On a donc } \forall n \geq n_0, -\frac{\ell}{2} \leq u_n - \ell \leq \frac{\ell}{2}$$

$$0 < \frac{\ell}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} \ell$$

□

Proposition 3

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' . On a :

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ la suite $(a.u_n + b.v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a\ell + b\ell'$.
2. La suite $(u_n.v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.
3. Si $\ell' \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
4. **Passage à la limite dans une inégalité :**
Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **réelles** et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$ alors on a aussi $\ell \leq \ell'$.

3.1.2 Suites extraites

Définition 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 3.1. Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .

Exemple 3.2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ est divergente.

$$u_{12n+3} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$$

$$u_{12n} = \sin(2n\pi) = 0$$

Par controposition, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas

On pourrait également, en utilisant la définition de limite, montrer la proposition suivante.

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

3.2 Relations de comparaison

3.2.1 Comparaison locale de suites

Définition 5

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite bornée $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$u_n = v_n w_n.$$

On note $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

2. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$u_n = v_n w_n.$$

On note $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

3. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 1 telle qu'à partir d'un certain rang on ait

$$u_n = v_n w_n.$$

On note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Remarque : Si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), on peut diviser toutes les égalités par v_n et on obtient la proposition suivante.

Proposition 6

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas (à partir d'un certain rang n_0). On a les équivalences suivantes.

$$u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff \text{la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0} \text{ est bornée}$$

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$$

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1$$

Exemple 3.3. Démontrer que $\frac{n \ln(n)}{n^3 + 3n + 1} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Méthode 1 :

$$\frac{n^{3/2} n \ln(n)}{n^3 + 3n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{5/2} \ln(n)}{n^3} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

$\rightarrow 0$

Donc $\frac{n \ln(n)}{n^3 + 3n + 1} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Méthode 2 :

$$\frac{n \ln(n)}{n^3 + 3n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\downarrow \underset{n \rightarrow +\infty}{0}$

Donc $\frac{n \ln(n)}{n^3 + 3n + 1} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

3.2.2 Premières propriétés

- La relation $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ signifie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- La relation $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(1)$ signifie : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée
- A retenir :

$$\begin{aligned} u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n &\iff u_n - v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ &\iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{aligned}$$

• **Transitivité :**

Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$; c'est la transitivité de la relation o .

Si $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et $v_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$; c'est la transitivité de la relation O .

• **Linéarité :**

Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $au_n + bv_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.

Si $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ et $v_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ alors $au_n + bv_n = O_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.

- On se méfiera de l'équivalent $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, quasiment toujours faux !

Celle-ci signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **nulle à partir d'un certain rang**.

- Opérations sur les équivalents :**

On peut multiplier et diviser des équivalents. On ne peut pas composer des équivalents par une fonction. On ne peut pas ajouter des équivalents. Cependant, on pourra utiliser la propriété suivante.

$$v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(u_n) \iff u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n.$$

- Equivalents et limites :** Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On a l'implication suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

- On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{K}$. Si $\boxed{\ell \neq 0}$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

- Equivalents et signes :** Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors pour n assez grand, u_n et v_n sont de même signe.

3.3 Théorèmes d'existence

3.3.1 Suite monotone

Proposition 7 (Théorème de la limite monotone)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée alors elle converge.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

3.3.2 Théorème d'encadrement

Proposition 8 (Théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou du moins à partir d'un certain rang), on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite vaut ℓ .

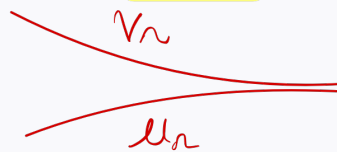
Attention : On confond souvent le théorème d'encadrement (qui donne l'existence et la valeur d'une limite) et le passage à la limite dans des inégalités qui nécessite de **connaître au préalable** l'existence des limites.

3.3.3 Suites adjacentes

Définition 6

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dira que ces suites sont **adjacentes**, si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$,
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.



Remarque : Les points 2. et 3. entraînent le point 1. Il n'est donc pas nécessaire de vérifier que $u_n \leq v_n$.

Proposition 9

Si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes alors elles convergent et elles convergent vers une même limite ℓ .
De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$.

Définition 7 (Valeurs approchées)

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ un réel (par exemple une limite de suite).

On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de ℓ à $\varepsilon > 0$ près si $|\ell - \alpha| < \varepsilon$.

On dira de plus, que α est une valeur approchée à ε près par défaut (resp. par excès) si $\ell - \varepsilon < \alpha \leq \ell$ (resp. $\ell \geq \alpha < \ell + \varepsilon$).

Exemple 3.4. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2, v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Justifier l'existence de ces deux suites et étudier le signe de $u_n - v_n$.

P_n : u_n et v_n existent et $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$

P_0 est vrai

et si P_n est vraie, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \geq 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq 0$ (ils existent)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) - \sqrt{u_n v_n} \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et $u_0 - v_0 = 1 \geq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

$$\text{On sait que } u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n} &\leq \sqrt{u_n} + \sqrt{v_n} \quad \downarrow \times (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \geq 0 \\ (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 &\leq u_n - v_n \end{aligned}$$

3. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

$$\begin{aligned} \bullet \quad u_n - v_n &\leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - v_{n-1}) \\ &\leq \frac{1}{2}(u_{n-2} - v_{n-2}) \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0) \end{aligned}$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

$$\bullet \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît

$$V_{n+1} - V_n = \sqrt{u_n} \sqrt{v_n} - V_n = \sqrt{v_n} (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \geq 0$$

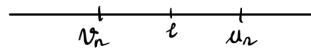
Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît

Finalement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes

Elles convergent donc vers une même limite $l \in \mathbb{R}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq l \leq u_n$

4. Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée l à 10^{-4} près.

On cherche n tq $|l - u_n| < 10^{-4}$



On sait que :

$$0 \leq u_n - l \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Il suffit de choisir n tel que $\frac{1}{2^n} < 10^{-4} \iff -n \ln(2) < -4 \ln(10)$
 $\iff n > \frac{4 \ln(10)}{\ln(2)} \sim 13,28$

$n \geq 14$ convient

5. Écrire en Python une fonction `suites(n)` qui prend pour argument un entier n et qui renvoie la liste $[u_n, v_n]$.

```
1 import math
2 def suites(n) :
    u, v = 2, 1
    for k in range(n):
        u = (u+v)/2
        v = math.sqrt(u*v)
    return [u, v]
```

6. Écrire en Python une fonction `valeur(eps)` qui prend pour argument un réel $\text{eps} > 0$ et qui renvoie une valeur approchée de l à eps près par défaut.

```
1 import math
def valeur(eps) :
    u, v = 2, 1
    while abs(u-v) >= eps:
        u, v = (u+v)/2, math.sqrt(u*v)
    return u  # valeur par défaut donc on prend en dessous
```

3.4 Deux exemples à connaître (cf Vade Mecum)

3.4.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 10

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe des réels b et c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

On note $(\mathcal{E}) : x^2 + bx + c = 0$ l'équation caractéristique associée et $\Delta = b^2 - 4c$ son discriminant.

• Si $\Delta \neq 0$ alors $(\mathcal{E})$ possède deux solutions (éventuellement complexes) z_1 et z_2 distinctes et on peut trouver deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Az_1^n + Bz_2^n.$$

• Si $\Delta = 0$ alors $(\mathcal{E})$ possède une solution double (éventuellement complexe) z_0 et on peut trouver deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An + B)z_0^n.$$

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\Delta < 0$ alors les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de la forme $re^{\pm i\theta}$ avec $r > 0$ et on peut trouver deux constantes réelles A et B telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n (A \cos(\theta n) + B \sin(\theta n)).$$

Mise en oeuvre : Cf. DNS0.

3.4.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 8

On appelle suite arithmético-géométrique, une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b \tag{*}$$

où a et b sont des constantes numériques données.

Plan d'étude : Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique et si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique. On suppose donc désormais que $a \neq 1$ et que $b \neq 0$.

- Déterminer l'unique suite constante vérifiant (*). On note ℓ cette constante.
- Poser $v_n = u_n - \ell$ et montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .
- En déduire l'expression de v_n , puis celle de $u_n = v_n + \ell$.

Mise en oeuvre : Cf. DNS0.

3.5 Etude des suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

3.5.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On veut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

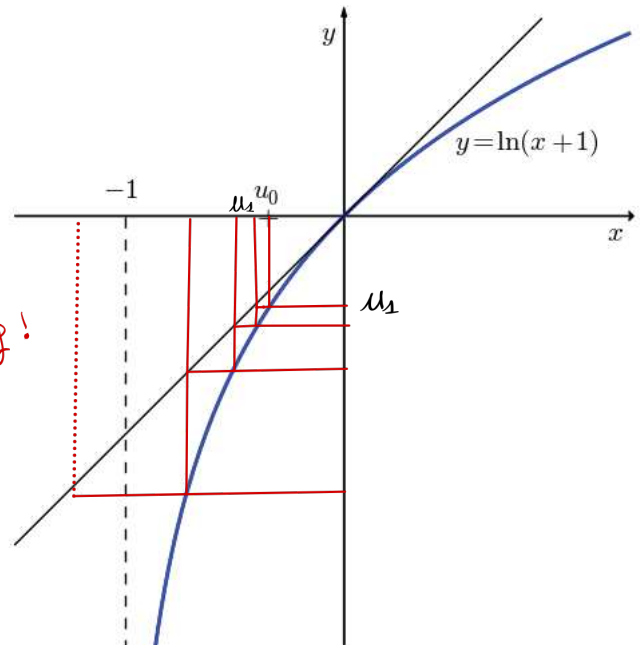
On ne peut pas toujours le faire !

Cela dépend de la fonction f .

Exemple 3.5. On peut démontrer qu'il n'est pas possible de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in]-1, 0[, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n). \end{cases}$$

On sort de $\mathbb{D}f$!



Remarque : Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou si $f(I) \subset I$ alors on pourra toujours calculer u_n . Ainsi, par exemple, les suites suivantes sont bien définies.

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \exp(u_n - 1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \end{cases}$$

Proposition 11

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est continue sur I alors on a l'implication :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \implies f(\ell) = \ell.$$

Ainsi, si f est continue sur I , les seules limites possibles pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont contenues dans I sont les points fixes de f .

Preuve. (D1)

On suppose que

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in I$
- f est continue sur I (donc en ℓ)

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{par unicité de la limite,} \\ f(\ell) = \ell \end{array} \right.$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$

□

Ainsi, l'hypothèse de la continuité est **essentielle**. Il ne faut pas oublier de la vérifier, même si celle-ci est évidente ! Il ne faut pas non plus oublier les limites possibles qui ne seraient pas dans I mais à ses extrémités.

3.5.2 Monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Attention, les énoncés qui suivent sont dans le programme mais pas en tant que proposition.

• Par l'étude du signe de $f(x) - x$:

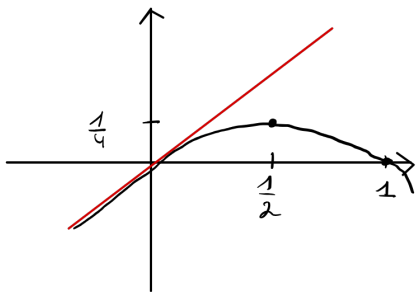
Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on s'intéresse au signe de

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Avec les notations précédentes, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on a l'implication suivante.

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I \\ \forall x \in I, f(x) \geq x \quad (\text{resp. } f(x) \leq x) \end{array} \right\} \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante (resp. décroissante)}$$

Exemple 3.6. Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ (E1).



$$f([0, 1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$$

$u_0 \in [0, 1]$, donc par récurrence simple, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge
(Δ pas forcément vers 0)

$$\text{On note } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ quand } n \rightarrow +\infty, l = l - l^2$$

$$\Rightarrow l = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

• En utilisant la croissance de f (démonstration par récurrence) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si f est **croissante**, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone**. Plus précisément, on a :

- si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Preuve. (D1) Ce résultat se montre très simplement par récurrence. On prouve le premier point. On suppose que f est croissante et que l'on a $u_1 \geq u_0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n : u_{n+1} \geq u_n.$$

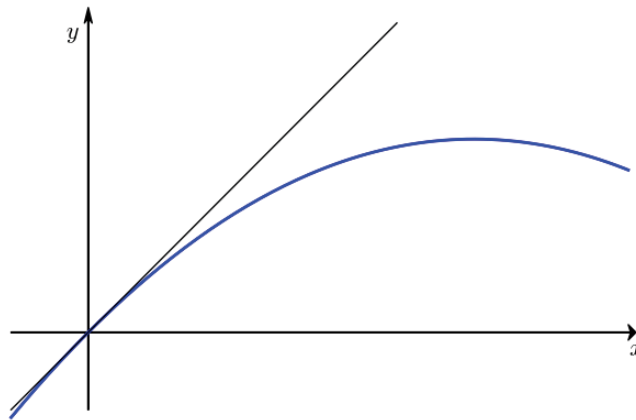
Initialisation : $u_1 \geq u_0$ par hypothèse donc $\mathcal{P}$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n :
 $u_{n+1} > u_n \quad \downarrow f \uparrow \text{ sur } I$
 $u_{n+2} > u_{n+1}$
 donc P_{n+1} vraie

(CCL) Par le principe de récurrence,
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

Le cas où f est croissante et $u_1 \leq u_0$ est très similaire. □

Illustration graphique :



Remarque :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
 Si f est décroissante, alors la fonction $f \circ f$ est croissante et en appliquant ce qui précède, on montre que les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonies opposées.

Preuve. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 On a alors d'une part $f(v_n) = u_{2n+1}$ et donc

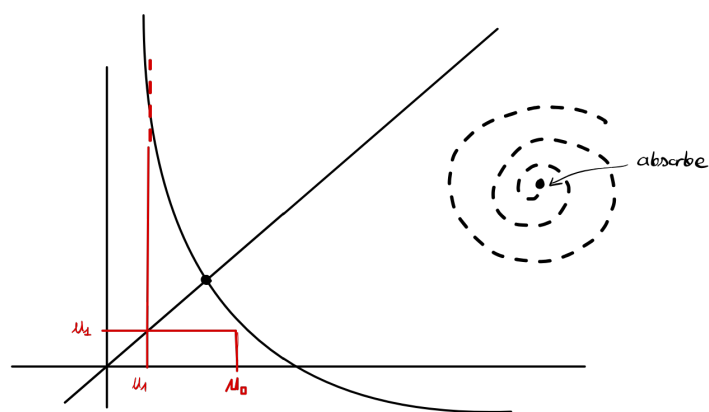
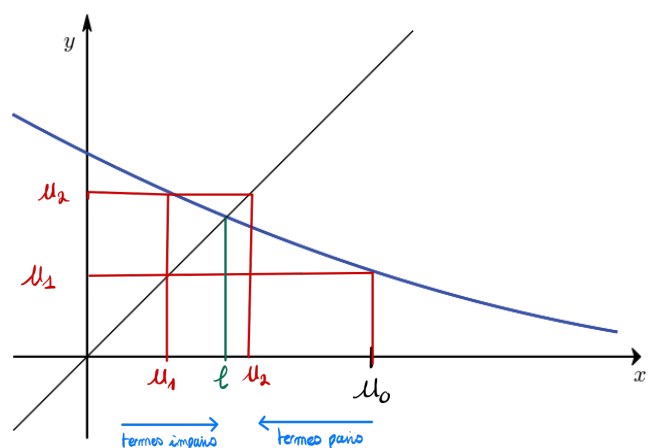
$$f(f(v_n)) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = v_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$f \circ f(v_n) = v_{n+1}$$

avec $f \circ f$ croissante. D'après le premier cas, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. On montrerait de même que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi. Et par décroissance de f , les premiers termes de ces suites ont des ordres opposés. Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de monotonies contraires. □

Illustration graphique :



3.5.3 Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

On rappelle l'énoncé suivant connu sous le nom d'Inégalité des Accroissements Finis.

Proposition 12

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- S'il existe un réel m tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $m \leq f'(x)$ alors on a

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a).$$
- S'il existe un réel M tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $f'(x) \leq M$ alors on a

$$f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$
- S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $|f'(x)| \leq M$ alors on a

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

On utilise cet énoncé avec par exemple $b = u_n$ et $a = \ell$ (un point fixe de f).

Avec le troisième énoncé, on obtient $|f(u_n) - f(\ell)| \leq M|u_n - \ell|$ soit :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M|u_n - \ell|.$$

Par récurrence, on montrerait facilement que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|.$$

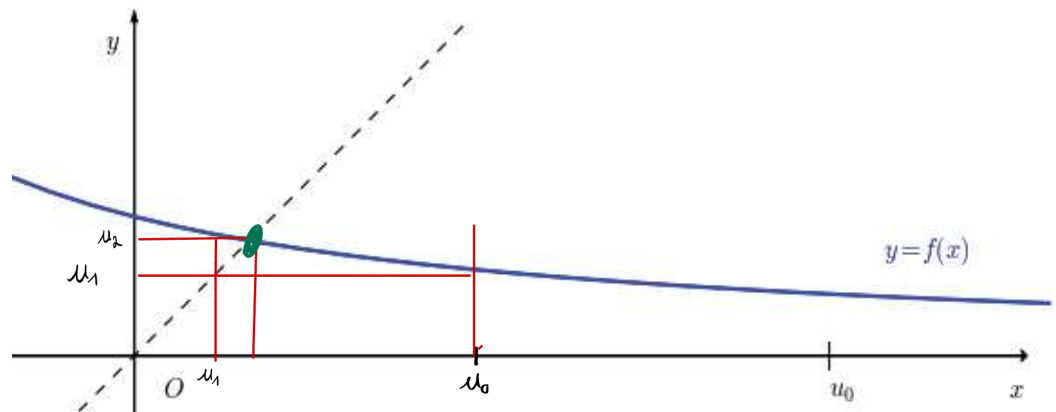
Ainsi, si $0 < M < 1$ alors M^n tend vers 0 et le théorème de majoration donne la convergence vers ℓ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans le cas où $m > 1$ et où $u_0 \geq \ell$, avec le premier énoncé, on montrerait de même que la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger.

Exemple 3.7. On définit la fonction f par $f(x) = \frac{1}{x+2}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{u_n + 2}.$$

• Illustration graphique :



• Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que ses termes sont positifs.

P_n : u_n existe et $u_n > 0$

P_0 est vraie

Ⓐ : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n est vraie
 $u_n > 0$ donc $u_n = \frac{1}{2+u_n}$ existe et $u_{n+1} > 0$

Donc P_{n+1} vraie

- Déterminer la seule limite ℓ possible de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, comme $u_n \geq 0$, on a $\ell \geq 0$

Puisque f est continue en ℓ , en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $f(\ell) = \ell$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ell+2} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 + 2\ell - 1 = 0$$

$$\Delta = 8$$

$$\ell_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \quad \text{impossible car } \ell \geq 0$$

$$\ell_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2} - 1$

- On suppose ici que $u_0 = 1$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge effectivement vers ℓ et déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\forall x \geq 0, |f'(x)| = \frac{1}{(x+2)^2} \leq \frac{1}{4}$$

Par l'inégalité des acc finis :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{4} |b - a|$$

On choisit $b = u_n$ et $a = \ell = \sqrt{2} - 1$, tous deux $\in \mathbb{R}^+$.

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{4} |u_n - \ell|$$

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{4} |u_n - \ell|$$

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right) |u_{n-1} - \ell| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell| = \frac{1}{4^n} \underbrace{|1 - (\sqrt{2} - 1)|}_{\leq 1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{4^n}$$

u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près si

$$|u_n - \ell| < 10^{-5}$$

il suffit d'avoir $\frac{1}{4^n} < 10^{-5}$

$$4^n > 10^5$$

$$n > \frac{\ln(10^5)}{\ln(4)} \sim 3,3$$

il suffit d'avoir $n \geq 4$.

3.6 Quelques outils à connaître

3.6.1 Inégalités

- Fonctions majorées, minorées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1, \quad |\operatorname{Arctan}(x)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) \geq 1.$$

- Inégalités de convexité :

$$\forall x \geq -1, \quad \ln(1+x) \leq x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leq e^x.$$

- Autres inégalités :

$$\forall x \geq 0, \quad \sin(x) \leq x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x| \quad \text{et} \quad |x| \leq |\operatorname{sh}(x)|.$$

- Inégalités triangulaires :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x+y \leq |x+y| \leq |x|+|y| \quad \text{et} \quad \left| |x|-|y| \right| \leq |x-y|$$

3.6.2 Limites de référence

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{(\ln(x))^l} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k (\ln(x))^l = 0 \quad (\text{si } k > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$$

3.6.3 Développements limités

Développement limités provenant de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Développements limités provenant de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}
 \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\
 \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \\
 \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\
 \operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \\
 \operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\
 \operatorname{Arctan}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})
 \end{aligned}$$

Développement limité de $(1+x)^\alpha$:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)
 \end{aligned}$$

3.7 Annexe

3.7.1 Rappels sur la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 9 (Majorant, minorant, partie bornée)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et M un réel. On dit que :

- M est un majorant de A si : $\forall a \in A, a \leq M$,
- m est un minorant de A si : $\forall a \in A, m \leq a$,
- A est une partie bornée si elle possède un majorant et un minorant, c'est-à-dire si :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall a \in A, \quad m \leq a \leq M.$$

Définition 10 (borne supérieure, inférieure)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle, si elle existe, borne supérieure de A , le plus petit de ses majorants. On la note $\sup(A)$.
- On appelle, si elle existe, borne inférieure de A , le plus grand de ses minorants. On la note $\inf(A)$.

Proposition 13 (Très important!)

Si A est une partie **non vide** et **majorée** (resp. **minorée**) de $\mathbb{R}$, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure).

Par convention :

- Si A est une partie non vide et **non majorée** de $\mathbb{R}$, on écrira $\sup(A) = +\infty$.
- Si A est une partie non vide et **non minorée** de $\mathbb{R}$, on écrira $\inf(A) = -\infty$.

Exercice de colle (E3)

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer les équivalences suivantes :

$$(1) \quad \alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \end{cases} \quad (2)$$

$$\iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A, \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

$$(1) \quad \alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \alpha \text{ est un majorant de } A \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \alpha - \varepsilon \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases}$$

donc (1) $\iff$ (2)

$$\iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq \alpha \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > \alpha - \varepsilon \text{ i.e. } \alpha - \varepsilon < a \end{cases} \quad (2)$$

(2) $\Rightarrow$ (3) On suppose que (2) est vérifiée

$$\text{Avec } \varepsilon = \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A \text{ tq } \alpha - \frac{1}{n} < a_n$$

$$\text{Comme } a_n \in A, \text{ on a aussi } a_n \leq \alpha$$

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha$$

$$\text{Par le TH d'encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$$

$$\text{Ainsi, } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite d'éléments de } A \text{ tq } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$$

(3) $\Rightarrow$ (2) On a donc une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$$

Saut $\varepsilon > 0$,

On écrit la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$ avec $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon \quad \text{Donc } \alpha - \varepsilon < a_n \quad \text{d'où (2)}$$

Exercice

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$A \subset B \implies \sup(A) \leq \sup(B)$$

Si $A \subset B$,

$\forall x \in A, x \in B$ et donc

$\forall x \in A, x \leq \sup(B)$

$\sup(B)$ est un majorant de A

Donc $\sup(A) \leq \sup(B)$

3.7.2 Suites à croissance contrôlée**Exercice de colle (E1)**

Soit $L > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe vérifiant

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L.$$

1. (E1) On suppose que $L < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Est-ce encore vrai pour $L = 1$?
3. Application : soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!}$.

1.(E1)

$$\underline{\forall n \geq n_0}, \quad |u_{n+1}| \leq L |u_n|$$

$$\underline{\forall n \geq n_0 + 1}, \quad |u_n| \leq L^1 |u_{n-1}|$$

$$\leq L^2 |u_{n-2}|$$

$\vdots$

$$\leq L^{n-n_0} |u_{n_0}| = L^n \times C \quad \text{avec } C = L^{-n_0} |u_{n_0}| > 0$$

Or $L \in]0, 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} L^n = 0$ et par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

2. Si $L=1$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$
 On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$
 et pourtant $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \neq 0$
 (1) est faux si $L=1$

3. Soit $a \in \mathbb{C}$
 on pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$
 Si $a=0$, $u_n = 0 \rightarrow 0$
 Si $a \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} \right| = \left| \frac{a}{n+1} \right| = \frac{|a|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 Par def, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \frac{1}{2} = L$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

3.7.3 Définition des relations de comparaison avec les quantificateurs

Exercice de colle (E3)

Écrire avec les quantificateurs les définitions suivantes (a est un réel).

1. $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$	4. $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$
2. $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$	5. $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$
3. $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	6. $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$

1) $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \leq \varepsilon$

$$u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

2) $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \Leftrightarrow \exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq M |v_n|$

3) $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$
 $\Leftrightarrow u_n - v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$

$$u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

4) On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

5) $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x)) \Leftrightarrow \exists M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|$

6) $f(x) \sim_a g(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

3.7.4 Théorème de Césaro (MPSI)

Exercice de colle (E3 en autonomie)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que cette suite converge et on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ .

Preuve.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les majorations suivantes.

$$\begin{aligned} |v_n - a| &= \left| \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} - a \right| \\ &= \frac{1}{n} |u_1 + u_2 + \cdots + u_n - n.a| \\ &= \frac{1}{n} |(u_1 - a) + (u_2 - a) + \cdots + (u_n - a)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - a| \end{aligned}$$

On a donc démontré

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |v_n - a| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - a|.$$

- On démontre à présent le résultat en revenant à la définition de limite. L'idée est de « couper » la somme précédente en deux. Soit $\varepsilon > 0$.

$\hookrightarrow$ Par définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k \geq N_1 \implies |u_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\hookrightarrow$ L'entier N_1 étant constant, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - a| \right) = 0$. Et encore par définition, on obtient :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq N_2 \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\hookrightarrow$ Soit $N_0 = \max(N_1, N_2)$ et $n \geq N_0 + 1$ un entier. On a les majorations suivantes.

$$\begin{aligned} |v_n - a| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - a| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_1} |u_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n |u_k - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=N_1+1}^n \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \times n \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq N_0 \implies |v_n - a| \leq \varepsilon$. C'est la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$.

□

Exercice de colle (E3)

1. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = \ell \in \mathbb{R}$.

À l'aide du théorème de Césaro, démontrer que l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = \ell$.

2. Soit $u_0 \in]0, 1[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ puis, en utilisant la question précédente, que l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} = 1$.

En déduire un équivalent de u_n .

1. On pose $u_n = v_{n+1} - v_n$ et on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème de Césaro, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_{n+1} - v_1}{n} \right) = \ell.$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_{n+1}}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_{n+1} - v_1 + v_1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_{n+1} - v_1}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_1}{n} \right) = \ell$.

Et par suite, puisque $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n+1$, on a bien $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{n+1} = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n}}$.

2. Soit $f : x \mapsto x^2 - x$. Une étude de cette fonction permet de montrer rapidement que $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$. Ainsi, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0, 1[.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite que l'on note $\ell \in [0, 1]$. Puisque f est continue sur $[0, 1]$, la limite ℓ est un point fixe de f .

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \ell = \ell - \ell^2, \\ &\iff \ell = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

On pose ici, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Calculons :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - u_n^2} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{1 - u_n} - 1 \right) = \frac{1}{u_n} \left(1 + u_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(u_n) - 1 \right) \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \\ &= \frac{1}{u_n} \left(u_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(u_n) \right) \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$ et d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = 1$. En remplaçant, v_n par son expression en fonction de u_n , on trouve

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} = 1},$$

ce qui s'écrit encore $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$.