



Devoir non surveillé 0 : travail à rendre

à rendre le mardi 2 septembre

Voici le travail à faire et à rendre pour la rentrée.

Tout d'abord, quelques consignes « administratives ». Pourriez-vous assez rapidement :

- si ce n'est pas encore fait, me transmettre une adresse **gmail** pour le partage de documents (mais je peux utiliser une autre adresse pour la communication des informations)
- m'envoyer une photo de vous récente (pas forcément une photo d'identité, ça peut être une photo prise avec le portable),
- si vous le souhaitez, m'écrire un petit mot de vous : avez-vous des projets particuliers (écoles ou autres) ? comment avez-vous vécu votre première année (difficulté, intérêt, motivation, charge de travail....) ?

Appréciez-vous les mathématiques ? Toute autre remarque relative à la prépa...

Après avoir revu les complexes (chapitre 1) et les polynômes (chapitre 2), et avoir rigoureusement travaillé les exercices corrigés proposés, il convient de vous entraîner à chercher et à rédiger les raisonnements par vous même. Cela n'aurait aucun intérêt de commencer à chercher le devoir qui suit sans avoir travaillé ce qui précède. Vous porterez une attention particulière à la rédaction, c'est un point très important pour progresser en mathématiques.

Les exercices sont classiques, mais pas toujours élémentaires. N'hésitez pas à m'envoyer vos questions par mail. Je peux aussi donner des exercices plus difficiles à ceux qui ont tout terminé.

Partie I : Algèbre linéaire

Exercice 1

Montrer rapidement que les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et en donner une base.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0 \text{ et } y - 3z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3y + z = 0\}$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ et on note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.
2. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Écrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $\mathcal{B}$.

Suggestion : les étudiants en difficulté pourront traiter cet exercice en prenant $n = 2$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(nx)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ distincts, calculer $I_{n,p} = \int_0^\pi f_n(x) f_p(x) dx$.

Calculer aussi $I_{n,n}$.

3. En déduire que $\mathcal{B}_n = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. L'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est-il de dimension finie ?

Exercice 4

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \text{Vect}\{(0, -1, 1)\}$ et $G = \{(x, y, z) \in E, x - y - 2z = 0\}$.

1. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E .
2. On note p la projection sur G dans la direction de F .
Ecrire la matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u \circ u = 2u + 3\text{Id}$.

1. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
 - (a) Démontrer que $\text{Ker}(u + \text{Id}) \cap \text{Ker}(u - 3\text{Id}) = \{0\}$.
 - (b) Démontrer que $\text{Im}(u + \text{Id}) \subset \text{Ker}(u - 3\text{Id})$.
 - (c) En déduire que $E = \text{Ker}(u + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{Id})$.
Ind : on pourra utiliser formule du rang et la formule du Grassmann.
2. À l'aide d'un raisonnement par Analyse/Synthèse, montrer que ce résultat est encore vrai si E n'est pas de dimension finie.

Exercice 6

On se donne trois réels distincts a_1, a_2, a_3 . Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3)).$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
3. Montrer que φ est un isomorphisme.
4. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$.
Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Expliciter les L_k .

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 4.

Soit u un endomorphisme de E tel que $\text{rg}(u) = 2$ et $u^2 = u \circ u = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.
2. En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de u est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ind : on pourra écrire $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et la définition de matrice d'un endomorphisme dans une base, pour bien comprendre ce que l'on cherche, et partir d'une base (e_1, e_2) de $\text{Im}(u)$.

Partie II : Analyse

I - Quelques idées reçues

- Pour justifier qu'une affirmation est vraie, il faut la démontrer en utilisant ses résultats de cours. Par exemple :

« Le terme général d'une série convergente est borné »

C'est **Vrai** ! En effet, si $\sum u_n$ converge, alors son terme général tend vers 0.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (de limite nulle) et donc elle est bornée.

- Pour justifier qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

« Une suite réelle est soit convergente, soit divergente vers $\pm\infty$ »

C'est **Faux** ! Prenons **par exemple**, $u_n = (-1)^n$. On a $|u_n| = 1$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diverge pas vers $\pm\infty$.

Et si on avait $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, on aurait aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$.

Mais $u_{2n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $u_{2n+1} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 \neq 1$, contradiction.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire en justifiant, si elles sont vraies ou fausses.

1. « Une suite est soit croissante, soit décroissante. ».
2. « Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$ ».
3. « Si $|u_n| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$ ».
4. « Si $u_n > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = +\infty$ ».
5. « Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ ».
6. « Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ».
7. « Si u_n ne s'annule pas alors $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ ».

II - Suites adjacentes

Dans cette partie, on se donne un réel $p \geq 1$. On définit deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1, v_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{pu_n + v_n}{p+1} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{pv_n + u_n}{p+1}.$$

1. Calculer u_1 et v_1 .
2. Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de $u_n - v_n$. En déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction n .
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n + v_n$. En déduire la valeur de $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

III - Une suite définie par une intégrale

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.
6. Calculer I_0, I_1, I_2 .
7. Justifier que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels **strictement** positifs.
8. À l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^{n-1}(t) dt = \frac{1}{n} I_{n+1}.$$

9. En déduire, en remarquant aussi que $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}.$$

10. On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $a_n = n I_{n-1} I_n$.

Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante et en déduire que $I_{n-1} I_n = \frac{\pi}{2n}$.

11. Montrer que, pour tout entier strictement positif n , on a l'encadrement $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.

12. En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n-1}$.

13. En déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

14. En utilisant la question III.6 et les valeurs de I_0 et de I_1 , exprimer I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

15. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2}$.

IV - Une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$.

16. Énoncer précisément le théorème de la limite monotone pour les suites réelles.

17. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe bien et que $u_n > 0$.

18. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

19. Démontrer que la seule limite possible pour u_n est $\ell = 0$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

20. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

(a) Pour $N \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{n=0}^N v_n$ et en déduire la nature de la série $\sum v_n$.

(b) Déterminer un équivalent simple de v_n en fonction de u_n . En déduire que $\sum \frac{1}{u_n^2}$ converge.

21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

(a) Pour $N \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{n=0}^N w_n$ et en déduire la nature de la série $\sum w_n$.

(b) Déterminer un équivalent simple de w_n en fonction de u_n . En déduire que $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

IV - Une suite définie implicitement

22. Énoncer précisément le théorème de la bijection monotone (ou de la bijection continue, c'est selon !).

23. Montrer que l'équation $e^x + x - n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) possède une unique solution appartenant à $\mathbb{R}_+$.

On note u_n cette solution.

24. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On pourra soit utiliser les propriétés d'une bijection réciproque (variations, limites), soit minorer u_n à partir de l'égalité $e^{u_n} + u_n = n$.

25. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln(n) = u_n + \ln(1 + u_n e^{-u_n})$. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

26. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^3}$.

27. On pose $v_n = u_n - \ln(n)$.

(a) Déterminer un équivalent de e^{u_n} .

(b) En déduire un équivalent de v_n et écrire le développement asymptotique obtenu pour u_n .