



Sujet 9 - Correction

E3A PSI 2024 Exercice 1

à partir des corrigés de D. Zarouf et P. Ducrot

1. (a) On développe $(1 + X)^{2n}$ par la formule du binôme, ce qui fournit sa décomposition dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Le terme qui nous intéresse est $\binom{2n}{n}X^n$. Ainsi, le coefficient de X^n dans le polynôme $(1 + X)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$.
- (b) On écrit :

$$\begin{aligned} (1 + X)^{2n} &= (1 + X)^n (1 + X)^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right) \times \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} X^l \right) \\ &= \sum_{(k,l) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \binom{n}{k} X^k \binom{n}{l} X^l \\ &= \sum_{(k,l) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \binom{n}{k} \binom{n}{l} X^{k+l} \end{aligned}$$

Les termes qui nous intéressent sont ceux pour lesquels $k + l = n$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} X^n$.

Ainsi, le coefficient de X^n dans le polynôme $(1 + X)^{2n}$ est aussi $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

(c) On en déduit que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2. $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure. Son spectre est alors $\{a, c\}$ et $\chi_T(X) = (X - a)(X - c)$.
- (a) ou bien $a \neq c$, alors son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Par propriété T est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- (b) ou bien $a = c$. Si T était diagonalisable alors il existerait une matrice inversible P et $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$ telle que $T = PDP^{-1}$. Or $PDP^{-1} = aI_2$. Ainsi, si T était diagonalisable alors $T = aI_2$. Ce qui est impossible puisque $t_{21} = 2 \neq 0$.

De par cette étude, on en déduit T est diagonalisable si et seulement si $a \neq c$.

3. Par ce qui précède ,

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable} \} &= \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \neq Z(\omega)\} \\ &= \overline{\{\omega \in \Omega, Y(\omega) = Z(\omega)\}} \end{aligned}$$

Puis, $\{\omega \in \Omega, Y(\omega) = Z(\omega)\} = \bigcup_{k=0}^n (Y = k) \cap (Z = k)$.

Les événements $((Y = k) \cap (Z = k))_{0 \leq k \leq n}$ sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, Y(\omega) = Z(\omega)\}) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}((Y = k) \cap (Z = k))$$

Les variables aléatoires étant indépendantes et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, on obtient :

$$\mathbb{P}((Y = k) \cap (Z = k)) = \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(Z = k) = \left(\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right)^2 = \frac{1}{4^n} \binom{n}{k}^2$$

En conclusion :

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable} \}) = 1 - \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

En utilisant le résultat de 1.(c), on obtient :

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est diagonalisable} \}) = 1 - \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

4.

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible} \} &= \{\omega \in \Omega, \det(A(\omega)) \neq 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega, Y(\omega)Z(\omega) \neq 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \neq 0 \text{ et } Z(\omega) \neq 0\} \end{aligned}$$

Alors, les variables aléatoires étant indépendantes et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, A(\omega) \text{ est inversible} \}) = \mathbb{P}(Y \neq 0) \mathbb{P}(Z \neq 0) = (1 - \mathbb{P}(Y = 0))^2 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$$