PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Sujet 8 - Correction

CCINP PSI 2018 problème 2

Un corrigé de B. Winckler

31. Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, alors $|X|$ en admet également une, et est à valeurs positives. Par conséquent, d'après l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E(|X|)}{\alpha}.$$

32. Soient $\varepsilon, t > 0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tout d'abord, vérifions que e^{tX} admet bien une espérance : on a $0 \leqslant e^{tX} \leqslant e^t$, et la variable aléatoire constante e^t admet une espérance parce qu'elle est à support fini. Par comparaison, c'est aussi le cas de e^{tX}.

On applique cette fois l'inégalité de Markov à la variable aléatoire e^{tnS_n} (qui est bien discrète parce que S_n l'est, et à valeurs positives parce que l'exponentielle est positive) et avec $\alpha = e^{tn\varepsilon}$. On a alors :

$$\mathbb{P}\left(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{E(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Par hypothèse, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, donc les variables aléatoires $e^{tX_1}, \ldots, e^{tX_n}$ le sont également. Donc :

$$E\left(e^{tnS_n}\right) = E\left(e^{t\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right) = \left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n.$$

Enfin, l'application $x \mapsto e^{tnx}$ étant croissante pour tous t et n strictement positifs, on a $\left(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\right) = (S_n \geqslant \varepsilon)$, donc :

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}\left(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{E(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}} = \frac{\left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}},$$

d'où le résultat.

33. Soit $a > 1$. L'application $x \mapsto \dfrac{1-x}{2}a^{-1} + \dfrac{1+x}{2}a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et l'application $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composition des applications $x \mapsto x\ln(a)$ et $x \mapsto \exp(x)$. Leur différence g_a est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ également, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a'(x) = \frac{1}{2}(a - a^{-1}) - \ln(a)a^x.$$

On a $a > 1$, donc $\ln(a) > 0$. Ainsi l'application $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de l'application affine $x \mapsto x\ln(a)$, de pente strictement positive, et de l'application exponentielle. On en déduit que $x \mapsto -\ln(a)a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc g_a' également.

De plus, $g_a(-1) = g_a(1) = 0$ comme le montre un calcul immédiat, donc d'après le théorème de Rolle dont g_a vérifie bien les hypothèses, il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $g_a'(x_0) = 0$; comme g_a' est strictement décroissante, on peut résumer le comportement de g_a ainsi :

x	-1		x_0		1
$g_a'(x)$		$+$	0	$-$	
g_a	0	↗		↘	0

En particulier, pour tout $x \in [-1,1]$ on a $g_a(x) \geqslant 0$.

34. Soit $t > 0$. On pose ici $a = e^t > 1$, et la question précédente implique l'inégalité : $\forall x \in [-1,1]$, $g_a(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in [-1,1], \quad \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t} - e^{tx} \geqslant 0,$$
et c'est précisément le résultat désiré, après avoir ajouté e^{tx} à chaque membre de l'inégalité.

35. Soit $t > 0$. Si, pour tout $\omega \in \Omega$ on applique l'inégalité précédente à $x = X(\omega)$, qui appartient toujours à $[-1,1]$ par hypothèse sur X, on a :
$$e^{tX} \leqslant \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^{t}.$$
Comme l'espérance est linéaire et positive, on en déduit :
$$E\left(e^{tX}\right) \leqslant \frac{e^{-t}}{2}\left(E(1) - E(X)\right) + \frac{e^{t}}{2}\left(E(1) + E(X)\right)$$
Or $E(1) = 1$, et X est centrée donc $E(X) = 0$, et on a finalement :
$$E\left(e^{tX}\right) \leqslant \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \cosh(t).$$

36. L'inégalité attendue revient à démontrer que $(2k)! \geqslant 2^k \cdot k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrons-le par récurrence sur k : si $k = 0$, c'est évident, puisqu'on a $0! = 1 \geqslant 2^0 \cdot 0!$ (il y a même égalité ici). À présent, soit $k \in \mathbb{N}$, et supposons que $(2k)! \geqslant 2^k \cdot k!$. Alors :
$$(2(k+1))! = (2k+2)(2k+1)(2k)! \geqslant \underbrace{(2k+1)}_{\geqslant 1} \cdot 2^k \cdot k! \geqslant 2(k+1) \cdot 2^k \cdot k! = 2^{k+1}(k+1)!,$$
d'où l'hérédité. On en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(2k)! \geqslant 2^k \cdot k!$. Ensuite :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{t^{2k}}{2^k \cdot k!}$$
parce que $t^{2k} \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On écrit ensuite $t^{2k} = (t^2)^k$ pour avoir le résultat voulu. En reprenant l'inégalité de la question précédente, on a donc :
$$E\left(e^{tX}\right) \leqslant \cosh(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$
d'après les développements en série entière en 0 des fonctions usuelles exponentielle et cosinus hyperbolique.

37. Étudions les variations de $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$. L'application $t \mapsto -nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}$ est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $t \mapsto -n\varepsilon + nt = n(t-\varepsilon)$. On en déduit que $t \mapsto -nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \varepsilon]$, puis strictement croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$. L'exponentielle étant strictement croissante, on en déduit que l'application composée $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \varepsilon]$, puis strictement croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$. Elle admet donc un minimum en ε, qui vaut $e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

38. Les questions **Q 34**, **Q 38** et **Q 39** impliquent :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}} \leqslant e^{n\frac{t^2}{2} - tn\varepsilon}.$$
En prenant $t = \varepsilon$, on en déduit :
$$\mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}.$$
Le même raisonnement permet de démontrer que $\mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$: il suffit de remplacer les X_i par les $-X_i$, qui restent mutuellement indépendantes et de même loi que $-X$ dont l'image est également incluse dans

$[-1,1]$; autrement dit, ces variables aléatoires vérifient les hypothèses de l'énoncé, donc la même conclusion. Alors, comme :

$$(|S_n| \geqslant \varepsilon) = (S_n \geqslant \varepsilon) \cup (S_n \leqslant -\varepsilon) = (S_n \geqslant \varepsilon) \cup (-S_n \geqslant \varepsilon),$$

l'union étant disjointe, on en déduit :

$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n \geqslant \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}.$$

39. Soit $\varepsilon > 0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$ est géométrique, de raison $e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \in]-1,1[$, donc elle est convergente. Or, en utilisant la question précédente et l'inclusion $(|S_n| > \varepsilon) \subseteq (|S_n| \geqslant \varepsilon)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$$

donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

40. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, puisque $|S_n|$ est une variable aléatoire, l'ensemble $(|S_n| > \varepsilon)$ est un évènement. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble $B_n = \bigcup\limits_{m\geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)$ est un évènement en tant qu'union dénombrable d'évènements.
De plus, on vérifie directement que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a $B_{n+1} \subseteq B_n$ (on unit de moins en moins d'ensembles parmi ceux de la collection $((|S_n| > \varepsilon))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$) donc, d'après le théorème de continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Or, par sous-additivité, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leqslant \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)\right) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left(|S_m| > \varepsilon\right),$$

et le membre de droite est le reste d'indice $n-1$ d'une série convergente (d'après la question précédente), donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}\left(|S_m| > \varepsilon\right) = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$, d'où le résultat.

41. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On peut décrire Ω_k ainsi :

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \bigcap_{m\geqslant n} \left(|S_m| \leqslant \frac{1}{k}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} \left(|S_m| > \frac{1}{k}\right)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \bar{B}_n, \tag{1}$$

où l'on a posé $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble $\bar{B}_n$ est un évènement parce que B_n en est un, donc Ω_k est un évènement en tant qu'union dénombrable d'évènements.
Par définition de la limite (où l'on prend $\varepsilon = \frac{1}{k}$), si $\omega \in \Omega$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}, \tag{2}$$

Donc :

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega) = 0\} \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \Omega_k,$$

et l'inclusion réciproque se vérifie en remarquant que la propriété (2) implique :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};\ \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit, pour cela, d'observer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\frac{1}{k} \leqslant \varepsilon$, puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$. Donc :

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \Omega_k.$$

En tant qu'intersection dénombrable d'évènements, A est un évènement.

42. Pour éviter les confusions, notons $B_{n,\varepsilon} = \bigcup\limits_{m \geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)$ au lieu de B_n. D'après (1), on a :

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \Omega_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bar{B}_{n, \frac{1}{k}} = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_{n, \frac{1}{k}}} = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_{n, \frac{1}{k}}},$$

donc :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_{n, \frac{1}{k}} \right).$$

Par sous-additivité, on a :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_{n, \frac{1}{k}} \right),$$

et nous avons démontré, dans la question **Q 42**, que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_{n,\varepsilon} \right) = 0$ indépendamment de $\varepsilon > 0$, donc $\mathbb{P}(A) \geqslant 1$; mais on a aussi $\mathbb{P}(A) \leqslant 1$ puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité. On en déduit :

$$\mathbb{P}(A) = 1.$$