



Sujet 0 - Correction

CCINP MP 2023 Exercice 2

Un corrigé de B. Winckler

1. Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont à diagonale propre (comme un calcul direct de polynôme caractéristique le démontre) mais ne sont pas diagonales.
2. Notons d'abord que M est à diagonale propre si et seulement si son polynôme caractéristique est $\chi_M = (X - 0)^3 = X^3$. Or un calcul rapide démontre qu'on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\alpha \\ 0 & \lambda & -\beta \\ -\alpha & -\beta & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -\beta \\ -\beta & \lambda \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 0 & -\alpha \\ \lambda & -\beta \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - \beta^2) - \alpha^2 \lambda,$$

donc : $\chi_M = X(X^2 - (\alpha^2 + \beta^2)) = X(X - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})(X + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$. Ainsi M est à diagonale propre si et seulement si $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0$, si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ (puisque une somme de réels positifs est nulle seulement si chaque terme de la somme est nul). Mais dans ce cas M est la matrice nulle.

On a donc montré que M est à diagonale propre si et seulement si $M = 0_{M_3(\mathbb{R})}$.

3. 3.1. Par hypothèse X_1 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$, donc $X_1(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbb{P}(X_1 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}.$$

Nous savons de plus que dans ce cas, X_1 admet une espérance et une variance, et qu'on a : $E(X_1) = 3$, $V(X_1) = 9 - 3 = 6$.

- 3.2. On a :

$$(X_1 = X_2) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_1 = n, X_2 = n).$$

- 3.3. Pour abréger, notons E l'évènement : « B est à diagonale propre ». C'est bien un évènement, puisqu'il s'écrit comme union et intersection (dénombrables) d'évènements, comme nous allons le voir.
D'après la deuxième question de cet exercice, B est à diagonale propre si et seulement si $X_1 - X_2 = 0$ et $X_2 - X_3 = 0$, si et seulement si $X_1 = X_2 = X_3$. Autrement dit :

$$E = (X_1 = X_2 = X_3) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_1 = n, X_2 = n, X_3 = n).$$

Calculons donc la probabilité que cet évènement se réalise. Puisqu'il s'agit d'une union d'évènements incompatibles, on a par σ -additivité :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n, X_3 = n).$$

Les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont supposées mutuellement indépendantes, donc :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) \mathbb{P}(X_2 = n) \mathbb{P}(X_3 = n) = \frac{1}{3^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{3(n-1)} = \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}.$$

Après simplifications :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{19}.$$

4. 4.1. On rappelle que $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$ désigne le produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$. Par conséquent $\text{tr}(A^T A)$ désigne la norme au carré de A , pour la norme euclidienne associée à ce produit scalaire. On en déduit :

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2.$$

- 4.2. La matrice A est ici supposée symétrique réelle. Donc, d'après le théorème spectral, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$. Par conséquent $A^2 = PD^2P^{-1}$, donc A^2 et D^2 sont semblables et en particulier elles ont même trace. On en déduit :

$$\text{tr}(A^T A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2)$$

et les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicités. On obtient donc bien :

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

- 4.3. Soit A une matrice symétrique réelle qui soit à diagonale propre. Dans ce cas on a, avec les notations ci-dessus :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,i} = \lambda_i.$$

En comparant les deux expressions de la trace données dans les questions précédentes, on a de plus :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \iff \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_{i,j}^2 + \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{i,i}^2}_{=\lambda_i^2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \iff \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_{i,j}^2 = 0.$$

Or une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. On a donc, pour tous indices i et j DISTINCTS de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = 0$. Autrement dit, A est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre, comme un calcul immédiat de polynôme caractéristique le démontre.

En conclusion : une matrice symétrique réelle est à diagonale propre si et seulement si elle est diagonale.