



## Sujet 3 - Correction

### Centrale PSI 2016 Mathématiques 2

*Un corrigé de C. Devulder*

#### 1. Transformation de Fourier

**1.A**  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1/2, 1/2\}$  et en  $\pm 1/2$ , elle admet des limites finies à droite et gauche. C'est donc une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis où  $\varphi$  est nulle et donc intégrable. Finalement

$$\varphi \in E_{cpm}$$

On a immédiatement

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \mathcal{F}(\varphi)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi xt} dt = \left[ -\frac{1}{2i\pi x} \right]_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{2i\pi x} (e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

De plus

$$\mathcal{F}(\varphi)(0) = \int_{-1/2}^{1/2} dt = 1$$

On remarque (puisque  $\sin(u) \sim u$  au voisinage de 0) que  $\mathcal{F}(\varphi)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

#### 1.B

**1.B.1** On sait que  $\sin$  est DSE de rayon infini et en utilisant le DSE, on trouve que

$$\forall x \neq 0, \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

La formule reste valable pour  $x = 0$ . On a donc trouvé le DSE de  $\psi$  et montré que le rayon de convergence est infini.

La somme d'une série entière étant de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle ouvert de convergence, on a donc

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$$

**1.B.2** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; sur  $[n, n+1]$ ,  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$ . On en déduit que

$$\int_n^{n+1} |\psi(x)| dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \int_n^{n+1} |\sin(\pi x)| dx$$

$x \mapsto |\sin(\pi x)|$  étant 1-périodique, l'intégrale ci-dessus est égale à celle sur  $[0, 1]$  où la fonction est positive. On peut enlever les valeurs absolue et l'intégrale vaut  $\int_0^1 \cos(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$ . Ainsi,

$$\int_n^{n+1} |\psi(x)| dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^n |\psi(x)| dx \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$c \mapsto \int_0^c |\psi(x)| dx$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et ce qui précède montre que cette fonction n'est pas bornée. Elle est donc de limite infinie en  $+\infty$  et  $\psi$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . En particulier

$$\psi \notin E_{cpm}$$

**1.C** Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Soit donc  $f \in E_{cpm}$ .

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .
- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- $\forall [-a, a] \subset \mathbb{R}, \forall x \in [-a, a], \forall t \in \mathbb{R}, |f(t)e^{-2i\pi xt}| = |f(t)|$ . Le "majorant" est indépendant de  $x$  et intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème s'applique et donne

$$\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R})$$

**1.D** Soit  $f \in \mathcal{S}$ .

**1.D.1** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $x \mapsto x^n f(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis.  $x \mapsto x^{n+2} f(x)$  étant bornée sur  $\mathbb{R}$ , on a  $x^n f(x) = O(1/x^2)$  au voisinage des infinis ce qui nous donne l'intégrabilité voulue.

**1.D.2** On veut maintenant utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $n$ -ième  $x \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall [-a, a] \subset \mathbb{R}, \forall x \in [-a, a], \forall t \in \mathbb{R}, |(-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}| = (2\pi)^n |t^n f(t)|$ . Le "majorant" est indépendant de  $x$  et intégrable sur  $\mathbb{R}$  (on vient de le voir).

Le théorème s'applique et donne  $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$  avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (\mathcal{F}(f))^{(n)}(x) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi x t} dt$$

**1.E**

**1.E.1**  $\theta$  est continue et  $\theta(x)$  est négligeable devant toute puissance de  $x$  au voisinage des infinis par croisances comparées. En particulier pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^n \theta(x)$  est continue et de limite finie (et même nulle) en  $\pm\infty$  et donc bornée. Ainsi

$$\theta \in \mathcal{S}$$

La question précédente donne la dérivabilité de  $y = \mathcal{F}(\theta)$  avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = (-2i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi x t} dt$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2\pi x y(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi t - 2i\pi x) e^{-\pi t^2 - 2i\pi x t} dt$$

La fonction (de  $t$ ) sous l'intégrale est la dérivée de  $t \mapsto e^{-\pi t^2 - 2i\pi x t}$  dont la limite en  $\pm\infty$  est nulle (son module vaut  $\theta(t)$ ). L'intégrale est donc nulle et

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2\pi x y(x) = 0$$

**1.E.2** On résout cette équation différentielle linéaire d'ordre 1. Il existe une constante  $c$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = c e^{-\pi x^2}$$

Avec l'intégrale donnée dans l'énoncé, on sait que  $y(0) = 1$  et donc que  $c = 1$ . On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{-\pi x^2}$$

ce qui s'écrit, en revenant aux notations de l'énoncé,

$$\mathcal{F}(\theta) = \theta$$

## 2. Formule d'inversion de Fourier

**2.A** On veut utiliser le théorème de convergence dominée sur  $\mathbb{R}$  avec la fonction

$$u_n : x \mapsto \mathcal{F}(f)(x)\theta\left(\frac{x}{n}\right)$$

- Pour tout  $n$ ,  $u_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Comme  $\theta$  est continue en 0,  $(u_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{F}(f)$  ( $\theta(0) = 1$ ) et cette limite simple est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour tout  $n$ ,  $|u_n| \leq |\mathcal{F}(f)|$  ( $|\theta|$  est majorée par 1) et le majorant est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème s'applique et indique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x) dx$$

**2.B** On veut utiliser le théorème de convergence dominée sur  $\mathbb{R}$  avec la fonction

$$v_n : t \mapsto \mathcal{F}(\theta)(t)f\left(\frac{t}{n}\right) = \theta(t)f\left(\frac{t}{n}\right)$$

- Pour tout  $n$ ,  $v_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Comme  $f$  est continue en 0,  $(v_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f(0)\theta$  et cette limite simple est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- $f$  étant dans  $\mathcal{S}$ , elle est bornée sur  $\mathbb{R}$  ( $f(t) = t^0 f(t)$ ). Pour tout  $n$ ,  $|v_n| \leq \|f\|_\infty \theta$  et le majorant est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Le théorème s'applique et indique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt = f(0)$$

**2.C** En revenant à la définition de  $\mathcal{F}(f)$ , on a

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\theta\left(\frac{x}{n}\right) dt \right) dx$$

La formule de Fubini donne alors

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}\theta\left(\frac{x}{n}\right) dx \right) dt$$

Dans l'intégrale interne, on effectue le changement de variable linéaire  $u = x/n$  pour obtenir

$$I_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi ut}\theta(u) du \right) dt$$

Dans l'intégrale extérieure, on effectue le changement de variable linéaire  $v = nt$  pour obtenir

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-2i\pi ut}\theta(u) du \right) dt$$

$f(t/n)$  ne dépendant pas de  $u$ , on peut le sortir par linéarité du passage à l'intégrale. On reconnaît alors  $\mathcal{F}(\theta)(u)$  et on conclut que

$$I_n = J_n$$

**2.D** Il suffit de combiner les trois questions qui précèdent et l'unicité de la limite pour conclure que

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x) dx$$

Fixons  $x \in \mathbb{R}$  et posons  $h \ t \mapsto f(x+t)$ .  $h$  est continue, comme  $f$ . De plus, pour  $|t|$  assez grand,

$$t^n h(t) = \frac{t^n}{(x+t)^n} (x+t)^n f(x+t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} (x+t)^n f(x+t)$$

ce qui montre que  $t \mapsto t^n h(t)$  est bornée, comme  $f$ , aux voisinages des infinis et donc sur  $\mathbb{R}$  (puisque continue et donc bornée sur tout segment). On peut alors appliquer ce qui précède à  $h$  et affirmer que

$$f(x) = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(h)(y) dy$$

On remarque alors, avec le changement de variable affine  $u = x+t$ , que

$$\mathcal{F}(h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) e^{-2i\pi ty} dt = e^{2i\pi yx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi uy} du = e^{2i\pi yx} \mathcal{F}(f)(y)$$

On a ainsi montré que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi yx} \mathcal{F}(f)(y) dy$$

**2.E** La fonction  $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$  est dans  $\mathcal{S}$  (elle est continue sur  $\mathbb{R}$  et dominée au voisinage de  $\pm\infty$  par toute puissance de  $x$  par croissances comparées). De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|-2\pi itx} dt$$

Pour calculer l'intégrale, on découpe en deux par Chasles :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{t(1-2\pi ix)} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{t(-1-2\pi ix)} dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{1-2\pi ix} e^{t(1-2\pi ix)} \right]_{t=-\infty}^{t=0} - \left[ \frac{1}{1+2\pi ix} e^{t(-1-2\pi ix)} \right]_{t=0}^{t=+\infty} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-2\pi ix} + \frac{1}{1+2\pi ix} \right) \\ &= \frac{1}{1+4\pi^2 x^2} \end{aligned}$$

On a donc avec la question précédente

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi yx}}{1+(2\pi y)^2} dy$$

### 3. Transformée de Fourier à support compact

**3.A** D'après 1.D,  $\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$  (puisque  $f \in \mathcal{S}$ ). De plus  $\mathcal{F}(f)$  est nulle en dehors d'un segment et donc dominée par toute puissance de  $x$  au voisinage des infinis. On a donc  $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$ .

En reprenant la même démarche qu'en 1.D.2 (changer  $x$  en  $-x$ ), la formule (2.1) de la question 2.D montre que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^n \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi tx} dt$$

**3.B** Si  $h$  est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  alors pour tout entier  $n$  et tous  $a, b \in \mathbb{R}$  (formule de Taylor avec reste intégrale)

$$h(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} h^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} h^{(n+1)}(t) dt$$

On applique ceci avec  $f$  pour  $b = x$  et  $a = x_0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Montrons que ce terme est de limite nulle quand  $n \rightarrow +\infty$ . Pour cela, on le majore en module ; une majoration grossière donne

$$\left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [x, x_0]}$$

Remarquons que  $(\mathcal{F}(f))$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  puisque continue et nulle en dehors d'un segment)

$$\forall y \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(y)| \leq |\pi y|^n \int_{-1/2}^{1/2} |2t|^n |\mathcal{F}(f)(t)| dt \leq |\pi y|^n \|\mathcal{F}(f)\|_{\infty}$$

On a donc

$$\|f^{(n)}\|_{\infty, [x, x_0]} \leq |\pi \max(|x|, |x_0|)|^n \|\mathcal{F}(f)\|_{\infty}$$

et ainsi

$$\left| \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{|\pi \max(|x|, |x_0|)(x-x_0)|^{n+1}}{n!} \|\mathcal{F}(f)\|_{\infty}$$

Par croissances comparées des fonctions exponentielle et factorielle, ce terme tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . On peut ainsi passer à la limite et affirmer que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

En reprenant l'expression des dérivées de  $f$ , on trouve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi t x_0} dt$$

**3.C** Supposons  $f$  nulle sur un intervalle  $]x_0 - r, x_0 + r[$  avec  $r > 0$ . On a alors

$$\forall x \in ]-r, r[, 0 = f(x_0 + x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi t x_0} dt$$

Comme  $r > 0$ , l'unicité du DSE de la fonction nulle donne la nullité de  $\int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi t)^k \mathcal{F}(f)(t) e^{2i\pi t x_0} dt$  pour tout  $n$ . La question précédente donne alors la nullité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

On vient de voir que  $f$  ne peut être nulle sur un segment  $[u, v]$  avec  $u < v$ . A fortiori, elle ne peut être nulle en dehors d'un intervalle  $[a, b]$ .

## 4. Cas de fonctions périodiques

### 4.A

**4.A.1** Par théorèmes généraux,  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] - 1, 1[\setminus\{0\}$  (quotient de deux telles fonctions avec le dénominateur qui ne s'annule pas). De plus

$$\forall x \in ] - 1, 1[\setminus\{0\}, g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \frac{x}{\sin(\pi x)} \underset{\sim_0}{\sim} \frac{1}{\pi} \frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{f'(0)}{\pi} = g(0)$$

ce qui montre que  $g$  est continue en 0.

**4.A.2** On a

$$\forall x \in ] - 1, 1[\setminus\{0\}, g'(x) = \frac{f'(x) \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x)(f(x) - f(0))}{\sin^2(\pi x)}$$

Par formule de Taylor-Young,  $f'(x) = f'(0) + x f''(0) + o(x)$  et  $f(x) - f(0) = x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$  (au voisinage de 0). En utilisant en outre  $\sin(\pi x) = \pi x + o(x^2)$  et  $\cos(\pi x) = 1 + o(x)$ , on trouve alors

$$f'(x) \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x)(f(x) - f(0)) = \frac{\pi f''(0)}{2} x^2 + o(x^2)$$

Comme  $\sin^2(\pi x) \sim \pi^2 x^2$ , on trouve que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2\pi}$$

On est alors (avec la question précédente) dans le cadre d'utilisation du théorème de la limite de la dérivée qui nous apprend que  $g$  est dérivable en 0 avec  $g'(0) = \frac{f''(0)}{2\pi}$  et que  $g'$  est continue en 0. On a ainsi

$$g \in C^1(] - 1, 1]) \text{ et } g'(0) = \frac{f''(0)}{2\pi}$$

**4.B** Si  $k \neq 0$ , une primitive de  $x \mapsto e^{2i\pi kx}$  est  $x \mapsto \frac{1}{2i\pi k} e^{2i\pi kx}$ . Cette primitive étant 1 périodique, l'intégrale de  $e^{2i\pi kx}$  est nulle sur un intervalle de longueur 1. On a alors, par linéarité du passage à l'intégrale,

$$\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} dx = 1$$

**4.C** On remarque que

$$S_n(x) = \text{Im} \left( \sum_{k=-n}^n (e^{2i\pi x})^k \right)$$

Pour  $x \in [-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$  on a une somme géométrique de raison  $e^{2i\pi x} \neq 1$  et (factorisation par la demi-somme des angles et formule d'Euler)

$$S_n(x) = \text{Im} \left( \frac{e^{-2i\pi n x} - e^{2i\pi(n+1)x}}{1 - e^{2i\pi x}} \right) = \text{Im} \left( \frac{-2i \sin((2n+1)\pi x)}{-2i \sin(\pi x)} \right) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

**4.D** Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\sum_{k=-n}^n c_k(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \sum_{k=-n}^n e^{-2i\pi kx} dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) S_n(-x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} dx$$

Avec la définition de  $g$ , ceci donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n c_k(f) &= \int_{-1/2}^{1/2} \left( g(x) + \frac{f(0)}{\sin(\pi x)} \right) \sin((2n+1)\pi x) dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) dx + f(0) \int_{-1/2}^{1/2} S_n(x) dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) dx + f(0) \end{aligned}$$

**4.E**  $g$  étant de classe  $C^1$  sur  $[-1/2, 1/2]$ , on peut intégrer par parties :

$$\int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) dx = \left[ -\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)\pi} g(x) \right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{(2n+1)\pi} \int_{-1/2}^{1/2} g'(x) \cos((2n+1)\pi x) dx$$

Avec le cosinus, le terme “tout intégré” est nul.  $g'$  étant continue sur le segment  $[-1/2, 1/2]$ , on peut alors majorer grossièrement :

$$\left| \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) dx \right| \leq \frac{\|g'\|_{\infty, [-1/2, 1/2]}}{(2n+1)\pi} = \frac{C}{2n+1} \quad \text{avec } C = \frac{\|g'\|_{\infty, [-1/2, 1/2]}}{\pi}$$

**4.F** Fixons  $x$  et  $t$  dans  $[-1/2, 1/2]$ . Par égalité des accroissements finis, il existe  $c_{x,t} \in [t, x+t]$  tel que  $f(x+t) - f(t) = x f'(c_{x,t})$ . On peut alors écrire que

$$G_t(x) = (f'(x+t) - f'(c_{x,t})) \sin(\pi x) + f'(c_{x,t})(\sin(\pi x) - x\pi \cos(\pi x))$$

Remarquons que chaque dérivée de  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  puisque continue et périodique.

- Par inégalité des accroissements finis, on a

$$|f'(x+t) - f'(c_{x,t})| \leq |x+t - c_{x,t}| \|f''\|_{\infty} \leq |x| \|f''\|_{\infty}$$

- De même

$$|\sin(\pi x)| = |\sin(\pi x) - \sin(0)| \leq |\pi x|$$

-  $|f'(c_{x,t})| \leq \|f'\|_{\infty}$ .

-  $\sin(\pi x) - x\pi \cos(\pi x) = (\pi x + o(x^2)) - x\pi(1 + o(x)) = o(x^2)$ .  $\frac{\sin(\pi x) - x\pi \cos(\pi x)}{x^2}$  est donc prolongeable par continuité en 0 et est bornée sur le segment  $[-1/2, 1/2]$  ;

$$\exists c / \forall x \in [-1/2, 1/2], |\sin(\pi x) - x\pi \cos(\pi x)| \leq cx^2$$

On en déduit que

$$|G_t(x)| \leq (\pi \|f''\|_{\infty} + c \|f'\|_{\infty}) x^2 = Dx^2$$

$D$  étant indépendante de  $x$  et  $t$ .

**4.G** Fixons  $t \in [-1/2, 1/2]$ . La fonction  $h_t : x \mapsto f(x+t)$  est de classe  $C^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$  périodique et on peut lui appliquer la question 4.D. En posant  $g_t(x) = \frac{h_t(x) - h_t(0)}{\sin(\pi x)}$  pour  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{0\}$ ,  $g_t(0) = \frac{h'_t(0)}{\pi}$  et  $g_t(1) = g_t(-1) = -g_t(0)$  on a alors

$$\sum_{k=-n}^n c_k(h_t) = h_t(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g_t(x) \sin((2n+1)\pi x) dx$$

Compte-tenu de l'expression de  $h_t$ , on a (changement de variable affine  $u = x+t$ )

$$c_n(h_t) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t) e^{-2\pi i n x} dx = e^{2\pi i n t} \int_{t-1/2}^{t+1/2} f(u) e^{-2\pi i n u} du$$

Comme l'intégrale d'une fonction périodique est la même sur tout segment de longueur la période, on trouve que  $c_n(h_t) = e^{2\pi i n t} c_n(f)$  et ainsi

$$f(t) - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{2i\pi k t} = - \int_{-1/2}^{1/2} g_t(x) \sin((2n+1)\pi x) dx$$

Avec la question 4.E, on trouve alors que

$$\left| f(t) - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{2i\pi kt} \right| \leq \frac{\|g'_t\|_{\infty, [-1/2, 1/2]}}{\pi} \frac{1}{2n+1}$$

Remarquons maintenant qu'avec la question précédente,

$$|g'_t(x)| = \frac{|G_t(x)|}{\sin^2(\pi x)} \leq D \frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$$

$x \mapsto \frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$  est continue sur  $[-1/2, 1/2] \setminus \{0\}$  et prolongeable par continuité en 0 (valeur  $1/\pi^2$ ). C'est donc une fonction bornée sur le segment. Notons  $M$  sa norme infinie. On a alors  $\|g'_t\|_{\infty, [-1/2, 1/2]} \leq M$  et enfin

$$\left| f(t) - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{2i\pi kt} \right| \leq \frac{DM}{\pi} \frac{1}{2n+1} = \frac{E}{2n+1}$$

où  $E$  est une constante (indépendante de  $x$  et  $t$ ).

## 5. Formule d'échantillonnage de Shannon

**5.A**  $\mathcal{F}(f)$  étant nulle hors de  $[-1/2, 1/2]$ , ses dérivées à tout ordre à droite en  $1/2$  et à gauche en  $-1/2$  sont nulles. Comme c'est une fonction  $C^\infty$ , on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

**5.B**  $h$  est de classe  $C^\infty$  en tout point de l'ouvert  $] -1/2, 1/2[$  (si  $x_0$  est dans cet ouvert, il existe un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $h = \mathcal{F}(f)$  qui est  $C^\infty$ ). Par périodicité, elle est indéfiniment en tout point hors de  $1/2 + \mathbb{Z}$ . Par périodicité, il suffit de montrer que  $h$  est indéfiniment dérivable à gauche en  $1/2$  et à droite en  $-1/2$  avec égalité des dérivées à tout ordre à droite et gauche en  $-1/2$  et  $1/2$ . C'est ce que l'on a fait en question précédente.

**5.C** On peut ainsi appliquer l'identité (4.1) à  $h$ . En posant  $d_k = c_k(h)$ , on trouve que

$$\left\| h - \sum_{k=-n}^n d_k e_k \right\|_{\infty, [-1/2, 1/2]} \leq \frac{E}{2n+1} \text{ avec } e_k : t \mapsto e^{2ik\pi t}$$

ce qui prouve la convergence uniforme voulue sur  $[-1/2, 1/2]$  (où  $h$  coïncide avec  $\mathcal{F}(f)$ ).

**5.D** Si  $x \notin k$ , on a  $\int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi} d\xi = \frac{1}{2i\pi(x+k)} (e^{i\pi(x+k)} - e^{-i\pi(x+k)}) = \psi(x+k) = \psi_k(x)$ . Ceci reste vrai pour  $x = k$  (l'égalité se lit).

La formule (2.1) donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} h(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$$

et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \sum_{k=-n}^n d_k \psi_k(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \left( h(\xi) - \sum_{k=-n}^n d_k e^{2i\pi k \xi} \right) e^{2i\pi x \xi} d\xi$$

Une majoration grossière donne (l'exponentielle complexe est de module 1 et on intègre sur un intervalle de longueur 1)

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n d_k \psi_k \right\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \left\| h - \sum_{k=-n}^n d_k e_k \right\|_{\infty, [-1/2, 1/2]}$$

et on a la convergence uniforme voulue.

**5.E** La convergence uniforme entraînant la convergence simple, on a

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(-j) = \sum_{k=-n}^n d_k \psi_k(-j) = d_j$$

puisque  $\psi_k(-j) = \psi(k-j)$  vaut 1 si  $k=j$  et est nul sinon.

## 6. Transformation de Laplace

### 6.A

**6.A.1** La fonction génératrice des variables  $X_i$  est

$$G_{X_i}(t) = \mathbb{E}(t^{X_i}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{\lambda(t-1)}$$

On sait aussi que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes,  $t^X$  et  $t^Y$  le sont et donc  $\mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = G_X(t) G_Y(t)$ .

Montrons maintenant, par récurrence, que  $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$ .

- C'est immédiat au rang  $n=1$ .

- Supposons le résultat vrai au rang  $n \geq 1$ . Comme  $S_n$  et  $X_{n+1}$  sont indépendantes,

$$G_{S_{n+1}}(t) = G_{S_n}(t) G_{X_{n+1}}(t) = e^{n\lambda(t-1)} e^{\lambda(t-1)} = e^{(n+1)\lambda(t-1)}$$

$S_{n+1}$  suit donc une loi de Poisson de paramètre  $(n+1)\lambda$  puisque sa fonction génératrice est celle d'une telle loi.

**6.A.2** D'après la loi faible des grands nombre, comme les  $X_n$  sont des variables mutuellement indépendantes de même loi et qu'elles admettent des moment d'ordre 2, en notant  $m$  et  $\sigma$  l'espérance et la variance de ces variables,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Ici,  $m = \sigma^2 = \lambda$  et on a donc

$$\mathbb{P}(|S_n - \lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

**6.A.3** Si  $a > b + c$  et  $c \geq 0$  alors  $|a - b| \geq a - b > c$ . On en déduit que

$$(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

De même si  $a \leq b - c$  avec  $c \geq 0$  alors  $a - b \leq -c \leq 0$  et donc  $|a - b| \geq c \geq 0$ . Ainsi

$$(S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

**6.A.4** Supposons  $x \in [0, \lambda[$  et posons  $\varepsilon = \frac{\lambda-x}{2}$ . On a  $\varepsilon > 0$  et  $x < \lambda - \varepsilon$ . On en déduit que  $(S_n \leq nx) \subset (S_n \leq n(\lambda - \varepsilon))$  et donc

$$0 \leq \mathbb{P}(S_n \leq nx) \leq \mathbb{P}(S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) \leq \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

Par théorème d'encadrement, on a donc

$$\forall x \in [0, \lambda[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = 0$$

Supposons maintenant  $x > \lambda$  et posons  $\varepsilon = \frac{x-\lambda}{2}$ . On a  $\varepsilon > 0$  et  $\lambda + \varepsilon < x$ . On en déduit que  $(S_n > nx) \subset (S_n > n(\lambda + \varepsilon))$  et donc

$$0 \leq \mathbb{P}(S_n > nx) \leq \mathbb{P}(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \leq \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

Par théorème d'encadrement,  $\mathbb{P}(S_n > nx) \rightarrow 0$  et donc  $\mathbb{P}(S_n \leq nx) = 1 - \mathbb{P}(S_n > nx) \rightarrow 1$  :

$$\forall x > \lambda, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = 1$$

**6.B**  $S_n$  étant à valeurs entières positives et suivant une loi de Poisson de paramètre  $n\lambda$ ,

$$\mathbb{P}(S_n \leq nx) = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$$

et la question précédente donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

## 6.C

**6.C.1** Avec la formule donné pour  $(\mathcal{L}(f))^{(k)}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) &= \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \int_0^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} f(t) e^{-nt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} f(t) e^{-nt} \right) dt \end{aligned}$$

Notons ( $x$  étant fixé)  $F_n$  la fonction sous l'intégrale. La question précédente indique  $(F_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction valant  $f$  sur  $[0, x[$ ,  $f(x)/2$  en  $x$  et nulle sur  $]x, +\infty[$ ; nous noterons  $F$  cette fonction. Il nous suffit de pouvoir intervertir limite et intégrale pour pouvoir conclure. Les  $F_n$  et  $F$  et  $F$  étant continues par morceaux, il nous suffit de vérifier l'hypothèse de domination pour utiliser le théorème de convergence dominée. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, a], |F_n(t)| \leq |f(t)| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt} = |f(t)|$$

et le majorant est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . On a ainsi prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq \lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \int_0^x f(t) dt$$

**6.C.2**  $\mathcal{L}$  est linéaire et il suffit de montrer que son noyau est réduit à  $\{0\}$ . Soit donc  $f$  une fonction continue nulle hors d'un segment et telle que  $\mathcal{L}(f) = 0$ . La question précédente montre que  $\forall x, \int_0^x f(y) dy = 0$ . Par théorème fondamental, une primitive de  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$  et, en dérivant,  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}$ .