Sujet 2 - Correction

E3A PC 2010 maths A et CCP MP 2011 maths 1)

Préliminaire

1. Démontrer que $E_3 \subset E_2 \subset E_1 \subset E$.
   Justifier par des contre-exemples que toutes ces inclusions sont strictes.

Réponse :
• *Si $f \in E_3$ alors f est bornée et donc il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ on ait $|f(t)| \leq C = Ct^0$. Ainsi $t \in E_2$. On a démontré :* $\boxed{E_3 \subset E_2.}$

Et l'inclusion est stricte car $t \longmapsto t$ est un élément de E_2 mais elle n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

• *Si $f \in E_2$, alors :*

$$\exists A > 0,\ \exists C > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \forall t \geq A, \quad |f(t)| \leq Ct^n.$$

Et donc pour $t \geq A$, on a $|f(t)e^{-t}| \leq Ct^n e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Comme $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, par comparaison $t \longmapsto f(t)e^{-t}$ l'est aussi et $f \in E_1$.
On a démontré : $\boxed{E_2 \subset E_1.}$

L'inclusion est stricte, en effet, prenons $f(t) = e^{\sqrt{t}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f(t)}{t^n} = e^{\sqrt{t} - n\ln(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f \notin E_2$.
Et pourtant, pour tout $x > 0$, on a $|t^2 f(t)e^{-t}| = e^{-xt+\sqrt{t}+2\ln(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $|f(t)e^{-t}| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Et comme précédemment $f \in E_1$.

• *$E_1 \subset E$ par définition.*
L'inclusion est stricte car $f : t \longmapsto e^{t^2}$ est dans E mais pas dans E_1 puisque $|f(t)e^{-t}| = e^{t^2 - t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E.

Réponse :
On a tout d'abord, $E_1 \subset E$.
De plus $E_1 \neq \emptyset$ car E_1 contient clairement la fonction nulle.
Enfin, si $(f, g) \in E_1 \times E_1$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, on a a :

$$\forall t \geq 0, \quad \left|\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leq |\lambda||f(t)\mathrm{e}^{-xt}| + |\mu||g(t)\mathrm{e}^{-xt}|.$$

Comme les deux fonctions $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, par comparaison la fonction $t \mapsto \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $\lambda f + \mu g \in E_1$ et :

$$\boxed{E_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

3. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de E_1.

Réponse :
On a vu que $E_2 \subset E_1$. De plus, $E_2 \neq \emptyset$ car E_2 contient clairement la fonction nulle.
D'autre part, si f et g sont dans E_2 alors il existe des constantes A_1, A_2, C_1 et C_2 strictement positives, des entiers naturels n_1, n_2 tels que :

$$\forall t \geq A_1, \qquad |f(t)| \leq C_1 t^{n_1} \qquad \text{et} \qquad \forall t \geq A_2, \qquad |g(t)| \leq C_2 t^{n_2}$$

Soit $A = \max\{A_1, A_2, 1\}$ et $C = \max\{C_1, C_2\}$ alors pour $t \geq A$, on a

$$\begin{aligned} |(\lambda f + \mu g)(t)| &= |\lambda f(t) + \mu g(t)| \leq |\lambda|.|f(t)| + |\mu|.|g(t)| \\ &\leq |\lambda| C_1 t^{n_1} + |\mu| C_2 t^{n_2} \underset{t \geq 1}{\leq} C(|\lambda| + |\mu|) t^{n_1+n_2} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\lambda f + \mu g$ est un élément de E_2 et :

$$\boxed{E_2 \text{ est un sous espace vectoriel de } E_1.}$$

I - Définition et premiers exemples

1. Démontrer que l'application $\mathcal{L} : E_1 \longrightarrow \mathcal{F}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ est linéaire.

Réponse :
Soient $f, g \in E_1$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \mathcal{L}(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-xt} dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt + \mu \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt = \lambda \mathcal{L}(f)(x) + \mu \mathcal{L}(g)(x) \end{aligned}$$

Et donc $\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)$ (égalité de fonctions). On a bien démontré que :

$$\boxed{L'\text{application } \mathcal{L} \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans l'espace vectoriel } \mathcal{F}(]0, +\infty[, \mathbb{R}).}$$

2. Justifier que chacune des fonctions suivantes est un élément de E_1 et déterminer leurs transformées de Laplace respectives.

(a) $f_0 : t \in [0, +\infty[\longmapsto 1$.

Réponse :
f_0 est continue et bornée sur $[0, +\infty[$, ainsi $f_0 \in E_3 \subset E_1$. Et on a pour tout $x > 0$,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(f_0)(x) = \int_0^{+\infty} 1.e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in [0,+\infty[\longmapsto t^n$.

Réponse : *f_n est continue sur $[0,+\infty[$, et on a :*

$$\forall t \geq 0, \quad |f_n(t)| = t^n \leq 1.t^n.$$

On a donc bien $f_n \in E_2 \subset E_1$. Pour calculer $\mathcal{L}(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$ on effectue une intégration par parties. On pose :

$$\begin{array}{ll} u(t) = t^n & u'(t) = nt^{n-1} \\ v'(t) = e^{-xt} & v(t) = -\dfrac{e^{-xt}}{x} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et puisque $x > 0$, par croissance comparée, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t^n e^{-xt}}{x} = 0.$$

On peut donc effecter l'intégration par parties dans l'intégrale impropre dont on sait qu'elle est convergente. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \left[-\frac{t^n e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{x}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-xt} dt.$$

On a donc, $\mathcal{L}(f_n)(x) = \dfrac{n}{x}\mathcal{L}(f_{n-1})(x)$, et par itération :

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(f_n)(x) = \frac{n}{x}\mathcal{L}(f_{n-1})(x) = \frac{n}{x}\frac{n-1}{x}\cdots\frac{1}{x}\mathcal{L}(f_0)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}}$$

(c) Pour tout $\lambda \in [0,+\infty[$, $g_\lambda : t \in [0,+\infty[\longmapsto e^{-\lambda t}$.

Réponse :
Comme $\lambda \geq 0$, on a pour tout $t \geq 0$, $|g_\lambda(t)| \leq 1$. Ainsi $g_\lambda \in E_3 \subset E_1$. Et on a pour tout $x > 0$,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(g_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-(\lambda+x)t}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda + x}.}$$

(d) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $h_a : t \in [0,+\infty[\longmapsto \sin(at)$.

Réponse :
Si $a = 0$ alors $h_a = 0$ et $\mathcal{L}(h_a) = \mathcal{L}(0) = 0$.

On suppose désormais que a est non nul. La fonction h_a est clairemnt bornée, donc c'est un élément de $E_3 \subset E_1$. On a de plus :

$$\begin{aligned} \int_0^X \sin(at)e^{-xt}dt &= \operatorname{Im}\left(\int_0^X e^{(ia-x)t}dt\right) = \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(ia-x)t}}{ia-x}\right]_0^X\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{ia-x}\left(e^{(ia-x)X} - 1\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{ia-x}\left(e^{(ia-x)X}\right)\right) - \operatorname{Im}\left(\frac{1}{ia-x}\right) \end{aligned}$$

Or $\left|e^{(ia-x)X}\right| = e^{-xX} \underset{X\to+\infty}{\longmapsto} 0$ *car* $x>0$ *et* $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{x-ia}\right) = \dfrac{a}{a^2+x^2}$. *Donc :*

$$\boxed{\textit{Pour tout } x>0, \textit{ on a } \mathcal{L}(h_a)(x) = \int_0^{+\infty} \sin(at)e^{-xt}dt = \frac{a}{a^2+x^2}.}$$

II - Premières propriétés

1. **Transformée de Laplace d'une fonction dérivée.**

   (a) On suppose dans cette question que $f \in E_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que sa dérivée f' est aussi un élément de E_2.

   i. Montrer que pour tout $x>0$, on a

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) \tag{1}$$

Réponse :
On effectue une intégration par parties. Les fonctions f *et* $t \longmapsto e^{-xt}$ *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,T]$ *et donc :*

$$\begin{aligned}\int_0^T f'(t)e^{-xt}dt &= \Big[f(t)e^{-xt}\Big]_{t=0}^{t=T} + x\int_0^T f(t)e^{-xt}dt \\ &= f(T)e^{-xT} - f(0) + x\int_0^T f(t)e^{-xt}dt\end{aligned}$$

Avec, puisque $f \in E_2$, *pour* T *assez grand on a* $|f(T)e^{-xT}| \le CT^n e^{-xT}$ *qui tend vers 0 quand* T *tend vers* $+\infty$ *on obtient*

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).}$$

   ii. $(\star)$ Montrer que (1) est encore valable si on suppose seulement que $f \in E_1$ de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est aussi un élément de E_1.

Réponse :
L'intégration par parties précédente s'écrit aussi :

$$f(T)e^{-xT} = \int_0^T f'(t)e^{-xt}dt + f(0) - \int_0^T f(t)e^{-xt}dt \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}dt + f(0) - \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = L$$

car f, f' *sont dant* E_1 *par hypothèse.*
Il reste à montrer que $L=0$, *le raisonnement précédent, donnera alors à nouveau la relation* (1).

Par l'absurde : *si on avait* $L \neq 0$, *alors on aurait* $|f(t)e^{-xt}| \underset{t\to+\infty}{\sim} |L| > 0$ *et, puisque la fonction constante* $|L|$ *n'est pas intégrable sur* $[0,+\infty[$, *par comparaison,* $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ *ne le serait pas non plus. Ceci contredit le fait que* $f \in E_1$.
Et donc on a bien $\lim\limits_{T\to+\infty} f(T)e^{-xT} = 0$ *et la relation* (1) *en découle immédiatement.*

(b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et que f, f', f'' sont des éléments de E_2.
Pour tout $x>0$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(x)$ en fonction de $x, \mathcal{L}(f)(x), f(0)$ et $f'(0)$.

Réponse :
Il suffit d'appliquer le résultat précédent à f et à f' :

- $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$
- $\mathcal{L}(f'')(x) = x\mathcal{L}(f')(x) - f'(0)$

On obtient

$$\boxed{\forall x>0, \qquad \mathcal{L}(f'')(x) = x^2\mathcal{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0).}$$

Remarque : On pourrait démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ et si pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ $f^{(k)}$ est un élément de E_2, alors :

$$\forall x>0, \qquad \mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n\mathcal{L}(f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}f^{(k)}(0).$$

2. **Régularité de la transformée de Laplace.**

(a) Démontrer que si $f \in E_2$, alors $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et exprimer $\mathcal{L}(f)'$ comme transformée de Laplace d'une fonction g à préciser.
On pourra restreindre l'hypothèse de domination à des intervalles $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$.

Réponse :
Pour $x>0$ et $t \geq 0$, on pose encore $h(x,t) = f(t)e^{-xt}$.

- *Pour tout $t \in [0,+\infty[$: l'application $x \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et on a*

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -tf(t)e^{-xt}.$$

- *Pour tout $x \in [0,+\infty[$: l'application $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux et intégrable $[0,+\infty[$ (puisque $E_2 \subset E_1$). De même, il est évident que $t \longmapsto -tf(t)$ est encore un élément de E_2 donc aussi de E_1 et donc, $t \longmapsto -tf(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux et intégrable $[0,+\infty[$.*
- *Hypothèse de domination restreinte : Soit $a>0$. $t \in [0,+\infty[$ et pour tout $x \in [a,+\infty[$ on a :*

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = |tf(t)|e^{-xt} \leq |tf(t)|e^{-at} = \psi_a(t)$$

avec ψ_a continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (déjà vu).

Conclusion : *D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, l'application $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ a fortiori, elle l'est sur $]0,+\infty[$ et la formule de Leibniz donne :*

$$\boxed{\forall x>0, \qquad (\mathcal{L}(f))'(x) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}dt = \mathcal{L}(w)(x) \quad \textit{avec} \quad w(t) = -tf(t).}$$

(b) Démontrer que si $f \in E_2$, alors $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et préciser $(\mathcal{L}(f))^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une transformée de Laplace.

Réponse :

On applique le théorème de dérivations successives sous le signe intégrale. On reprend les notations de la question précédente.

- *Pour tout* $t \in [0, +\infty[$ *: par opération sur les fonctions continues, l'application* $x \longmapsto h(x, t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $[0, +\infty[$ *et on a :*
$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (-1)^k t^k f(t) e^{-xt}.$$
- *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $x \in [0, +\infty[$ *: l'application* $t \longmapsto (-1)^k t^k f(t) e^{-xt}$ *est continue par morceaux et intégrable* $[0, +\infty[$ *(car* $t \longmapsto (-1)^k t^k f(t)$ *est dans* E_2*).*
- *Hypothèse de domination restreinte : Soit* $a > 0$*.* $t \in [0, +\infty[$ *et pour tout* $x \in [a, +\infty[$ *on a :*
$$\left| \frac{\partial h^k}{\partial x^k}(x, t) \right| = |t^k f(t)| e^{-xt} \leq |t^k f(t)| e^{-at} = \phi_a(t)$$
avec ϕ_a *continue par morceaux et intégrable sur* $[0, +\infty[$*.*

Conclusion : *D'après le théorème de dérivations successives sous le signe intégrale, l'application* $\mathcal{L}(f)$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur tout* $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$ *a fortiori, elle l'est sur* $]0, +\infty[$ *et l'on a :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0, \qquad (\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt = \mathcal{L}(w_n)(x) \quad \textit{avec} \quad W_n(t) = (-1)^n t^n f(t).}$$

III - Comportement au voisinage de 0

On veut montrer le théorème suivant.

Théorème 1 (Théorème de la valeur finale)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est bornée et si l'on note $\mathcal{L}(f)$ sa transformée de Laplace, on a :
$$\lim_{x \to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell.$$

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que f appartient à E_3.

Réponse :
La fonction f *est continue sur* $[0, +\infty[$ *et* $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ *donc* $\lim_{t \to +\infty} |f(t)| = |\ell|$ *et donc, par définition de limite avec* $\varepsilon = 1$*, on a :*
$$\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \geq A, \quad |f(t)| \leq |\ell| + 1.$$
D'autre part, f *est continue sur le segment* $[0, A]$ *donc elle y est bornée :*
$$\exists M > 0, \quad \forall t \in [0, A], \quad |f(t)| \leq M.$$
On a ainsi $\forall t \geq 0,\ |f(t)| \leq \max\big(M, |\ell| + 1\big)$*. Et donc* $\boxed{f \in E_3.}$

2. Soit $x \in]0,+\infty[$. Démontrer que $x\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f\left(\frac{t}{x}\right) dt.$

Réponse :
En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{u}{x}$ *(affine), on a*

$$x\mathcal{L}(f)(x) = x\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\frac{1}{x}\mathrm{d}u$$

soit $\boxed{x\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f\left(\frac{t}{x}\right) dt.}$

3. En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée à paramètre continu, que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

Réponse :
On définit $h : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & h(x,t) = e^{-t} f\left(\dfrac{t}{x}\right) \end{array} \right.$

- *Pour tout* $x \in]0,+\infty[$, *la fonction* $t \longmapsto h(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $]0,+\infty[$.
- *Pour tout* $t \in]0,+\infty[$, *on a* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x,t) = L(t) = \ell\mathrm{e}^{-t}$.

La fonction L *est continue par morceaux sur* $]0,+\infty[$.
- **Hypothèse de domination :** *La fonction* f *est bornée sur* $[0,+\infty[$. *On note* $M = \|f\|_{\infty,[0,+\infty[}$. *On a :*

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall t \in]0,+\infty[, \quad |h(x,t)| \leq M\,\mathrm{e}^{-t}$$

et $t \longmapsto M\,\mathrm{e}^{-t}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.
Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-t} f\left(\frac{t}{x}\right) dt = \ell \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \ell.$$

Et donc : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell.}$

4. Si $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

Réponse :
Si $\ell \neq 0$, *la limite précédente donne immédiatement,* $\boxed{\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ell}{x}.}$

5. **Application :** Déterminer un équivalent quand $x \to 0$ de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}(t) e^{-xt} dt.$

Réponse :
La fonction $f : t \longmapsto \mathrm{Arctan}(t)$ *est continue et bornée sur* $[0,+\infty[$.
On a de plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi}{2} \neq 0.$

Les résultats précédents donnent alors $\boxed{F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}(t) e^{-xt} dt = \mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x}.}$

IV - Comportement au voisinage de $+\infty$

1. Montrer que si $f \in E_3$, alors $\mathcal{L}(f)(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Réponse :
La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \geq 0, \quad |f(t)| \leq M.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geq 0$, on a $|f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$. Par inégalité triangulaire et par positivité de l'intégrale, on obtient :

$$|\mathcal{L}(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-xt}|dt \leq M\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{M}{x}.$$

Et par le théorème d'encadrement, on trouve $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0.}$

2. Soit $f \in E_2$.
On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que pour tout réel $t \geq A$, on ait $|f(t)| \leq Ct^n$.

(a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a

$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt + C\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Réponse :
Soit $x > 0$. On a les majorations suivantes.

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| = \left|\int_0^{A} f(t)e^{-xt}dt + \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| && \textit{(relation de Chasles)} \\ &\leq \left|\int_0^{A} f(t)e^{-xt}dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| && \textit{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \int_0^{A} |f(t)e^{-xt}|dt + \int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt && \textit{(inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \geq A$, on a $|f(t)|e^{-xt} \leq Ct^n e^{-xt}$. Donc par positivité de l'intégrale, on a

$$\int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt \leq C\int_A^{+\infty} t^n e^{-xt}dt \leq C\underbrace{\int_0^{A} t^n e^{-xt}dt}_{\textit{positif}} + C\int_A^{+\infty} t^n e^{-xt}dt = C\underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}dt}_{=I_n(x)}.$$

En reportant dans la majoration précédente, on obtient bien

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad |\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt + C\frac{n!}{x^{n+1}}.}$$

(b) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt = 0$.

Réponse :

La fonction f est continue sur le segment $[0, A]$, donc elle est bornée.

$$\exists M = M(A) > 0,\ \forall t \in [0, A], \quad |f(t)| \leq M.$$

Ainsi, $\displaystyle 0 \leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt \leq M\int_0^A e^{-xt}dt \leq M\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{M}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt = 0.}$

(c) En déduire que $\mathcal{L}(f)(x) \longrightarrow 0$ lors que $x \to +\infty$.

Réponse :

L'entier n étant fixé, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{x^{n+1}} = 0$ *et on vient de voir que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt = 0$. *En appliquant le théorème d'encadrement à la majoration obtenue en question II.3(a), on obtient :*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\mathcal{L}(f)(x) = 0.}$$

3. ($\star\star$) En s'inspirant de la démarche précédente, ou en utilisant le théorème de convergence dominée, retrouver ce résultat lorsque $f \in E_1$ seulement.

Réponse :

On coupe encore l'intégrale en deux. Et on essaie de majorer chacune des deux intégrales par $\varepsilon/2$ pour un $\varepsilon > 0$ donné. En général dans ce type de raisonnement, la dernière majoration porte sur la variable concernée, ici x qui tend vers $+\infty$.

Soit $A > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(f)(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| = \left|\int_0^A f(t)e^{-xt}dt + \int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| && \textit{(relation de Chasles)}\\
&\leq \left|\int_0^A f(t)e^{-xt}dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt\right| && \textit{(inégalité triangulaire)}\\
&\leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt + \int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt && \textit{(inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

• *On choisit A pour que la deuxième intégrale soit majorée par $\varepsilon/2$. Puisque x tend vers $+\infty$, on peut supposer que $x > 1$. On a alors :*

$$0 \leq \int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt \leq \underbrace{\int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt}_{=u(a)}.$$

Et $\displaystyle u(a) = \int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt - \int_0^A |f(t)|e^{-t}dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *par définition d'intégrale convergente.*

Et par définition de limite, on peut trouver un A assez grand pour lequel $0 \leq u(A) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

A fortiori, pour ce A désormais fixé, on aura aussi : $\displaystyle 0 \leq \int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$

• *Le $A>0$ étant fixé, on peut reprendre le raisonnement de la question précédente.*
La fonction f est continue sur le segment $[0,A]$, donc elle est bornée.

$$\exists M>0,\ \forall t\in[0,A],\quad |f(t)|\leq M.$$

Ainsi, $0\leq \displaystyle\int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt \leq M\int_0^A e^{-xt}dt \leq M\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{M}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt = 0.$

Et donc il existe $B>0$ tel que pour tout $x\geq B$, on a $0\leq \displaystyle\int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$

• *On a montré l'existence de B positif telq ue :*

$$\forall x>B,\quad |\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}|dt + \int_A^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

C'est la définition de $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathcal{L}(f)(x)=0.}$

Autre méthode : *On aurait aussi pu utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.*

On définit $u:\left\{\begin{array}{ccc} [1,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & u(x,t)=f(t)e^{-xt}\end{array}\right.$

• *Pour tout $x\geq 1$, $t\longmapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.*

• *Pour tout $t>0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(t)e^{-xt}=0$ (car $t>0$),*

• *Hypothèse de domination :*

$$\forall x\in[1,+\infty[,\ \forall t\in]0,+\infty[,\quad |u(x,t)|=|f(t)e^{-ft}|\leq |f(t)|e^{-t}=\varphi(t)\qquad \textit{car } x\geq 1$$

Et φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ car $f\in E_1$.
Le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique, et on trouve $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathcal{L}(f)(x)=0.}$

4. **Théorème de la valeur initiale**.

On veut montrer le théorème suivant.

Théorème 2 (Théorème de la valeur initiale)

Soit $f\in E_1$ une fonction bornée et $\mathcal{L}(f)$ sa transformée de Laplace. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x)=f(0).$$

On revient à la définition de limite, et on montre que :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists A>0,\quad \forall x\geq A,\qquad |x\mathcal{L}(f)(x)-f(0)|<\varepsilon.$$

On fixe donc $\varepsilon>0$.

(a) Justifier qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $t\in[0,\alpha]$, on ait $|f(t)-f(0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ce $\alpha > 0$ est désormais fixé.

Réponse :
Par hypothèse, la fonction f est continue en 0, et donc par définition :

$$\boxed{\exists \alpha > 0,\ \forall t \in [0, \alpha], \quad |f(t) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.}$$

(b) Soit $x > 0$. Démontrer que :

$$|x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)| \leq x \int_0^\alpha |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt + x \int_\alpha^{+\infty} |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt.$$

Réponse :
Le second membre donne envie de faire apparaître l'intégrale $x \displaystyle\int_0^{+\infty} f(0)e^{-xt}dt = f(0)$.

$$\begin{aligned} |x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)| &= \left| x \int_0^{+\infty} (f(t) - f(0))e^{-xt}dt \right| \\ &\leq x \int_0^{+\infty} |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt = x \int_0^\alpha |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt + x \int_\alpha^{+\infty} |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Démontrer aussi que pour $x > 0$, on a $x \displaystyle\int_0^\alpha |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt < \frac{\varepsilon}{2}$.

Réponse :
On sait que $\forall t \in [0, \alpha], \quad |f(t) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. *Par positivité de l'intégrale, on obtient :*

$$x \int_0^\alpha |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt \leq x \int_0^\alpha \frac{\varepsilon}{2}e^{-xt}dt,$$

et l'inégalité est stricte car l'application $t \longmapsto \frac{\varepsilon}{2}e^{-xt} - |f(t) - f(0)|e^{-xt}$ *est continue, positive et non identiquement nulle sur* $[0, \alpha]$.
Enfin, puisque la fonction intégrée est positive, on a :

$$x \int_0^\alpha \frac{\varepsilon}{2}e^{-xt}dt \leq x \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2}e^{-xt}dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a bien démontré que $\boxed{\forall x > 0,\ x \displaystyle\int_0^\alpha |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt < \frac{\varepsilon}{2}.}$

(d) Montrer enfin que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \int_\alpha^{+\infty} |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt = 0$ et conclure.

Réponse :
On sait que f est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|f(t)| \leq M$.
Par inégalité triangulaire, on a aussi : $|f(t) - f(0)| \leq |f(t)| + |f(0)| \leq 2M$. *Et donc :*

$$x \int_\alpha^{+\infty} |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt \leq 2M \int_\alpha^{+\infty} xe^{-xt} = 2Me^{-x\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (\textit{car } \alpha > 0),$$

Et par encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \int_\alpha^{+\infty} |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt = 0.}$

Par définition de cette limite, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x > B$ on ait $x \int_\alpha^{+\infty} |f(t)-f(0)|e^{-xt}dt < \frac{\varepsilon}{2}$.
En reportant dans la majoration de la question 3(b), on obtient :

$$\forall x > B, \qquad |x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)| \leq x\int_0^\alpha |f(t)-f(0)|e^{-xt}dt + x\int_\alpha^{+\infty} |f(t)-f(0)|e^{-xt}dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

C'est la définition de $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0).}$

V - Injectivité

Le but de cette partie est de montrer que $\mathcal{L}$ est injective.

On se donne $f \in E_1$ et on considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s}ds.$$

1. Justifier que $g(t)$ possède une limite finie L lorsque $t \to +\infty$.

Réponse :
Puisque f est un élément de E_1, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(s)e^{-s}ds$ converge et donc par définition :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(s)e^{-s}ds = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-s}ds = L.}$$

2. En déduire que g est un élément de E_1.

Réponse :
Tout d'abord, $s \longmapsto f(s)e^{-s}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et donc par le théorème fondamental de l'analyse, g est sa primitive qui s'annule en 0. Ainsi, g est dérivable sur $[0, +\infty[$, a fortiori continue (ne pas oublier ce détail !). Comme $\lim_{t\to+\infty} g(t) = L$, le raisonnement de la question IV.1. s'applique et donc g est bornée. Ainsi :

$$\boxed{g \in E_3 \subset E_1.}$$

3. (a) Justifier que g est dérivable et montrer que g' est un élément de E_1.

Réponse :
On vient de voir que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad g'(t) = f(t)e^{-t}.$$

La fonction g' est donc continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$|g'(t)e^{-xt}| = |f(t)e^{-t}e^{-xt}| \leq |f(t)e^{-xt}|.$$

Et comme $f \in E_1$, $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc par comparaison, $t \longmapsto g'(t)e^{-xt}$ l'est aussi. On a donc bien démontré que : $\boxed{g' \in E_1}$

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t}dt.$

Réponse :
On utilise la question II.1.
On sait que $g \in E_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que g' est aussi un élément de E_1. Par la question II.1(a)ii, on a

$$\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(g')(x) = x\mathcal{L}(g)(x) - g(0).$$

Et comme $g(0) = 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}e^{-xt}dt = x\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt.$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t}dt.}$$

(c) On définit l'application ψ sur $[0,1]$ par

$$\psi(u) = \begin{cases} g(-\ln(u)) & \text{si} \quad u \in]0,1] \\ L \quad \text{si} \quad u = 0 \end{cases}$$

Montrer que ψ est continue.

Réponse :
Pour tout $u \in]0,1]$, $-\ln(u) \in [0,+\infty[$ et g est continue sur $[0,+\infty[$. Donc par composition, ψ est continue sur $]0,1]$.
En 0 : par composition de limites, on a $\lim\limits_{u\to 0}\psi(u) = \lim\limits_{u\to 0} g(-\ln(u)) = \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = L = \psi(0)$.
Donc ψ est continue en 0. Et finalement, $\boxed{\psi \text{ est continue.}}$

(d) À l'aide d'un changement de variable, démontrer l'égalité suivante.

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \int_0^1 u^{x-1}\psi(u)du.$$

Réponse :
On effectue le changement de variable $t = -\ln(u) = \varphi(u)$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et strictement décroissante donc on peut travailler directement dans l'intégrale impropre dont on sait qu'elle est convergente.
On a $dt = -\dfrac{du}{u}$ et donc : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = -\int_1^0 g(-\ln(u))e^{x\ln(u)}\frac{du}{u} = \int_0^1 u^{x-1}\psi(u)du.$
On a bien $\boxed{\forall x > 0, \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \int_0^1 u^{x-1}\psi(u)du.}$

(e) On suppose que $\mathcal{L}(f) = 0$.

i. Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(u)\psi(u)du = 0.$

Réponse :
Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = 0$ donc d'après IV.3(b), on aussi

$$\mathcal{L}(g)(x) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \int_0^1 u^{x-1}\psi(u)du = 0.$$

En particulier avec $x = k+1 > 0$, *on obtient,* $\displaystyle\int_0^1 u^k \psi(u)du = 0$.

Si $P(u) = \displaystyle\sum_{k=0} a_k u^k \in \mathbb{R}[X]$, *par linéarité de l'intégrale, on trouve :*

$$\boxed{\int_0^1 P(u)\psi(u)du = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_0^1 u^k \psi(u)du = 0.}$$

On admet le théorème suivant (voir par exemple sujet 8B) :

Théorème 3 (théorème de Weierstrass)

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

ii. En utilisant ce théorème, démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \psi^2(u)du = 0$.

Réponse :

La fonction ψ *est continue sur* $[0,1]$, *donc d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

Par définition de convergence uniforme, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|\psi - P_n\|_{\infty,[0,1]} = 0$.

De plus la fonction, ψ *est continue sur* $[0,1]$ *donc elle est aussi bornée :* $\forall u \in [0,1],\ |\psi(u)| \leq \|\psi\|_{\infty,[0,1]}$.

On a donc les majorations suivantes.

$$\left|\int_0^1 \psi(u)(\psi(u) - P_n(u))du\right| \leq \int_0^1 |\psi(u)(\psi(u) - P_n(u))|du \leq \|\psi\|_{\infty,[0,1]}\|\psi - P_n\|_{\infty,[0,1]}$$

Et par le théorème d'encadrement :

$$\int_0^1 \psi(u)(\psi(u) - P_n(u))du = \int_0^1 \psi^2(u)du - \underbrace{\int_0^1 \psi(u)P_n(u)du}_{=0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc bien démontré que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \psi^2(u)du = 0.}$

iii. En déduire que f est la fonction nulle et conclure.

Réponse :

La fonction ψ^2 *est continue et positive sur* $[0,1]$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \psi^2(u)du = 0$, *donc :*

$$\forall u \in [0,1], \quad \psi(u) = 0.$$

En particulier, pour tout $t \geq 0$, *avec* $u = e^{-t} \in [0,1]$, *on obtient :* $\psi(u) = g(t) = 0$.

Ainsi la fonction g *est identiquement nulle sur* $[0,+\infty[$. *A fortiori,*

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad g'(t) = 0 = f(t)e^{-t}.$$

Et donc $\boxed{f = 0.}$

On a montré que $\mathcal{L}$ *est linéaire et que* $Ker(\mathcal{L}) = \{0\}$ *donc* $\boxed{\mathcal{L} \text{ est injective.}}$