



Sujet 1 - Correction

CCINP PSI 2024 Problème 2

Un corrigé de I. Bigeard, E. Auclair et M. Laamoum

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Q.30 • On a $u_0(e_j) = \begin{cases} e_{j+1} & \text{si } j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket \\ 0 & \text{si } j = p \end{cases}$ donc $u_0^2(e_j) = \begin{cases} e_{j+2} & \text{si } j \in \llbracket 1, p-2 \rrbracket \\ 0 & \text{si } j \in \{p-1, p\} \end{cases}$, et pour $p = 2$ on a $u_0^2(e_1) = u_0^2(e_2) = 0$.

• On en déduit en déduire :

$$J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $J_0^2 = 0$ si $p = 2$.

• Par récurrence on a $u_0^{p-1}(e_j) = \begin{cases} e_1 = e_p & \text{si } j \in \llbracket 2, p \rrbracket \\ 0 & \text{si } j \in \llbracket 1, p \rrbracket \end{cases}$ et $u_0^p(e_j) = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Ainsi

$$J_0^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_0^p = 0$$

$J_0^p = 0$ et $J_0^{p-1} \neq 0$ donc J_0 est nilpotente d'indice p .

Q31. J_λ est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Et u_λ et J_λ ont même spectre donc

$$\text{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}.$$

De plus $J_\lambda - \lambda I_p = J_0$ et le rang de J_0 vaut $p-1$ donc, par le théorème du rang :

$$\dim(\ker(J_\lambda - \lambda I_p)) = p - (p-1) = 1.$$

Il est clair que e_p est un vecteur non nul tel que $u_\lambda(e_p) = \lambda e_p$ donc

$$\text{Le sous espace propre de } u_\lambda \text{ associé à } \lambda \text{ est } \text{Vect}(e_p).$$

Q32. On remarque que : $u_\lambda = u_0 + \lambda Id_{\mathbb{R}^p}$, donc $\forall X \in E, u_\lambda(X) = u_0(X) + \lambda X$.
Soit V un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

— Supposons V stable par u_λ .

On a alors : $\forall X \in V, u_0(X) = \underbrace{u_\lambda(X)}_{\in V} - \underbrace{\lambda X}_{\in V}$ donc $u_0(X) \in V$.

Donc V est stable par u_0 .

— On montre de même que si V est stable par u_0 alors V est stable par u_λ .

— Conclusion : V est stable par u_λ si et seulement si V est stable par u_0 .

Q33. La matrice de u_λ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ est une matrice par blocs de la forme :

$$W = \begin{pmatrix} A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) & B \in \mathcal{M}_{p-k,k}(\mathbb{R}) \\ 0 \in \mathcal{M}_{k,p-k}(\mathbb{R}) & D \in \mathcal{M}_{p-k,p-k}(\mathbb{R}) \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de v dans la base $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$.

Q34. Notons P le polynôme caractéristique de u_λ et Q celui de v . On a pour tout réel x

$$P(x) = \det(xI_p - W) = \det \begin{pmatrix} xI_k - A & -B \\ 0 & xI_{p-k} - D \end{pmatrix} = \det(xI_k - A) \times \det(xI_{p-k} - D) = Q(x) \times R(x).$$

Or $\det(xI_k - A) = Q(x)$ et R est un polynôme.

Donc le polynôme caractéristique de v divise celui de u_λ .

On en déduit que $Sp(v) = \{\lambda\}$. Si X est un vecteur propre de v associé à λ alors $X \in V$ et $v(X) = \lambda X$ donc $u_\lambda(X) = \lambda X$ donc X est un vecteur propre de u_λ associé à λ . Et comme l'espace propre de u_λ associé à λ est de dimension 1 engendré par e_p , $X \in Vect(e_p)$. Puisque X est non nul, nécessairement

$$\boxed{e_p \in V}$$

Q35. Supposons par l'absurde qu'il existe deux sous espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^p$, stables par u_λ , non réduits à $\{0\}$ et tels que $V \oplus W = \mathbb{R}^p$.

Comme ces sous espaces sont non nuls, d'après **Q34.**, ils contiennent tous deux e_p et cela contredit le fait qu'ils soient en somme directe.

Il n'existe pas de sous espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^p$, stables par u_λ , non réduits à $\{0\}$ et tels que $V \oplus W = \mathbb{R}^p$.

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

Q36. Par hypothèse X_0 est un vecteur non nul tel que $J_\lambda X_0 = \lambda X_0$.

La fonction $\tilde{X}$ est bien de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{X}'(t) = \lambda e^{\lambda t} X_0 = e^{\lambda t} \lambda X_0 = e^{\lambda t} J_\lambda X_0 = J_\lambda \tilde{X}(t).$$

Donc $\tilde{X}$ est solution particulière de (S) .

Q37. Par opérations sur les fonctions de classe C^1 , la fonction φ est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k.$$

Par ailleurs, $J_\lambda = J_0 + \lambda I_p$ donc

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad J_\lambda \varphi(t) &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^{k+1} + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k = e^{\lambda t} \sum_{k=1}^p \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \\ &= e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \quad \text{car, avec } \mathbf{Q30.}, \quad J_0^p = 0_p. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = J_\lambda \varphi(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda)$$

Comme $J_\lambda = J_0 + \lambda I_p$ commute avec J_0 , J_λ commute aussi avec $\exp(tJ_\lambda)$ et

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda) J_\lambda.}$$

Q38. D'après **Q30.**, $\forall k \geq p, \quad J_0^k = 0_p$.

Donc on peut écrire $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$ et cette somme est en fait une somme finie.

On a aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(-tJ_\lambda) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} J_0^k.$$

On peut donc calculer en manipulant en réalité des sommes finies :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tJ_\lambda) \times \exp(-tJ_\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^k \left(\frac{t^\ell}{\ell!} J_0^\ell \frac{(-t)^{k-\ell}}{(k-\ell)!} J_0^{k-\ell} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} \right) J_0^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (1 + (-1))^k J_0^k \\ &= I_p \quad \text{car les termes autres que pour } k=0 \text{ sont nuls.} \end{aligned}$$

On en conclut que, pour tout réel t , $\boxed{\text{la matrice } \exp(tJ_\lambda) \text{ est inversible d'inverse } \exp(-tJ_\lambda).}$

Q39. Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $Y : t \longmapsto \exp(-tJ_\lambda)X(t)$. On a donc, par **Q38.**, $X : t \longmapsto \exp(tJ_\lambda)Y(t)$. La fonction φ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on déduit que X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Supposons donc X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, par **Q37.** :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) &= -\varphi'(-t)X(t) + \varphi(-t)X'(t) \\ &= -\exp(-tJ_\lambda)J_\lambda X(t) + \exp(-tJ_\lambda)X'(t) \\ &= \exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t)). \end{aligned}$$

- Si X est solution de (S) , on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = 0$, et comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, Y est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si Y est constante sur $\mathbb{R}$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t)) = 0$. Comme la matrice $\exp(-tJ_\lambda)$ est inversible, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) - J_\lambda X(t) = 0$ et X est solution de (S) .
- Conclusion : $\boxed{X \text{ est solution de } (S) \text{ si et seulement si } Y \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$

Or Y est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $X_0 \in E$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = X_0$.

Ce qui précède et **Q38.** permettent de conclure que

$$\boxed{X \text{ est solution de } (S) \text{ si et seulement si } \exists X_0 \in E / \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tJ_\lambda)X_0.}$$

Q40. On suppose $\lambda > 0$.

Prenons $X_0 = e_p$. On a alors : $J_0 X_0 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J_0^k X_0 = 0$ **mais** $J_0^0 X_0 = X_0$. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tJ_\lambda)X_0 = e^{\lambda t}X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

D'après **Q39.**, X est solution de (S) et comme $\lambda > 0$, cette solution n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Si $\lambda > 0$, (S) admet une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q41. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $X \in E$.

Alors $AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $y_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}x_j$. Donc $\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^p y_i^2 = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \right)^2$.

À i fixé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans $\mathbb{R}^p$ donne

$$\left(\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^p x_j^2 \right) \leq \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right) \|X\|^2.$$

On en déduit :

$$\|AX\|^2 \leq \|X\|^2 \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right) \leq \|X\|^2 (N(A))^2.$$

Ainsi, comme on a des nombres positifs :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad \forall X \in E, \quad \|AX\| \leq N(A)\|X\|.$$

Considérons ensuite $\lambda < 0$ et une solution X de (S) . D'après **Q39.**, il existe $X_0 \in E$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \exp(tJ_\lambda)X_0$. Donc, par ce qui précède et comme N est une norme :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|X(t)\| \leq N(\exp(tJ_\lambda))\|X_0\| \leq e^{\lambda t} N \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \right) \|X_0\| \leq \|X_0\| e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k).$$

Comme $\lambda < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X_0\| e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k) = 0$.

De plus, la fonction $\left(t \mapsto \|X_0\| e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k) \right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Si $\lambda < 0$ alors toutes les solutions de (S) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Q42. Supposons à présent $\lambda = 0$. D'après **Q30.** :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \exp(tJ_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ t & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & \dots & \dots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons $X_0 \in E$ et $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda)X_0$ une solution de (S) .

On déduit de la matrice ci-dessus :

Si X_0 est un vecteur de $\text{Vect}(e_p)$ alors X est bornée, et sinon, X n'est pas bornée.