Sujet 11 - Correction

Mines-Ponts MP 2020 Mathématiques 2

Un corrigé de E. Lucas

A. Préliminaires

1. Je note $(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ où pour $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = b_k = \binom{n}{k}$ selon la formule du binôme.
   Selon le cours, le coefficient de degré n du produit $(X+1)^n(X+1)^n$ est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

   or le coefficient de degré n de $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$ est $\binom{2n}{n}$ selon la formule du binôme.

   On en déduit que $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$

2. D'après Stirling, on a $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ Ainsi

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}}$$

3. Soit $\alpha > 0$. On note la fonction $f : t \longmapsto 1/t^\alpha$ qui est continue, décroissante et positive sur $]0,+\infty[$.
   Ainsi $\forall k \geq 2$, $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f$ et $\int_1^2 f \leq f(1) = 1$ donc

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

   Or pour $A > 0$, on a $\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=1}^{t=A} = \frac{A^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$. donc

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

   Si $\alpha \in]0,1[$, on a $1-\alpha > 0$ et $n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
   donc en utilisant le théorème des gendarmes et les théorèmes généraux, on obtient :

$$\frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

   d'où $\boxed{\text{si } \alpha \in]0,1[\text{, on a } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$

Si $\alpha > 1$, on obtient pour $N \geq n \geq 1$:

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et la série étant convergente, par passage à la limite quand $N \to +\infty$, on a :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

or $1-\alpha < 0$ ainsi pour $A \geq 1$, on a $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=A}^{t\to+\infty} = 0 - \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}}$ donc

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Comme pour le cas précédent, on conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$

4. Soir $x \in [2, +\infty[$. Les fonctions $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et $g : t \longmapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, x]$ de dérivées respectives $f' : t \mapsto \dfrac{-1}{t(\ln(t))^2}$ et $g' : t \longmapsto 1$. Par théorème d'intégration par parties, on a donc

$$I(x) = \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_{t=2}^{t=x} + \int_2^x \frac{t\mathrm{d}t}{t\left(\ln(t)\right)^2}$$

On a bien la relation $\boxed{I(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)} + \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}}$

Par croissances comparées, $tf(t) = \dfrac{t}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(f(t)\right)$

Par comparaison de fonctions positives, la fonction f étant positive sur $[2, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge.

De plus $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f(t)^2 = \underset{t\to+\infty}{o}\left(f(t)\right)$

En MP, un théorème permet directement d'intégrer cette comparaison sur $[2, x]$ et de conclure. En PSI, nous ne disposons pas de ce théorème. Nous donnons les grandes lignes de la solution.

$\boxed{\text{Soit } \varepsilon > 0.}$

On sait que $f(t)^2 = \underset{t\to+\infty}{o}\left(f(t)\right)$ et donc :

$$\exists A > 0,\ \forall t \geq A, \quad 0 \leq f^2(t) \leq \varepsilon|f(t)| = \varepsilon f(t).$$

Par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale, pour tout $x \geq a$, on a :

$$\int_2^x f^2(t)\mathrm{d}t = \int_2^A f^2(t)\mathrm{d}t + \int_A^x f^2(t)\mathrm{d}t \leq \int_2^A f^2(t)\mathrm{d}t + \varepsilon \int_A^x f(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, puisque la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante et divergente, elle diverge vers $+\infty$. Et donc il existe $B > 0$ tel que :

$$\forall x \geq B, \quad \int_2^A f^2(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_2^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Finalement, pour tout $x \geq C = \max(A, B)$, on a :

$$0 \leq \int_2^x f^2(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_2^x f(t)\mathrm{d}t + \varepsilon \int_A^x f(t)\mathrm{d}t \leq 2\varepsilon \int_2^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Quitte à reprendre le raisonnement en changeant ε en $\varepsilon/2$, on a bien démontré :

$$\boxed{\int_2^x f^2(t)\mathrm{d}t = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\int_2^x f(t)\mathrm{d}t\right)} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} = \underset{x\to+\infty}{o}(I(x))}$$

donc lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)} = I(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(I(x))$

d'où $I(x) \sim \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)}$ or $\dfrac{x}{\ln(x)} \longrightarrow +\infty$. On en déduit $\boxed{I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}}$

5. D'après le cours, on a $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha - i)}{n!} x^n}$ avec la convention $\prod_{i=0}^{-1} \star = 1$.

   Pour $\alpha = -1/2$, en ayant posé $a_n = (-1)^n \dfrac{\prod_{i=0}^{n-1}(-1/2 - i)}{n!}$, cela devient

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   Pour $n = 0$, on a $a_0 = 1$ et $\dfrac{\binom{2\times 0}{0}}{4^0} = \dfrac{1}{1} = 1$ et pour $n \geq 1$

$$a_n = (-1)^n \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \prod_{i=0}^{n-1}(2i+1) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{i=1}^{n}(2i)} = \frac{(2n)!}{(n! 2^n)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

   On en déduit la formule : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n}$

B. Marches aléatoires, récurrence

Je note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé.

6. Les suites $(\mathbb{P}(S_n = 0_d)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbb{P}(R = n)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
   Ainsi selon le lemme d'Abel, les rayons de convergences les séries entières $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0_d)x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(R = n)x^n$ sont ≥ 1 ie $\boxed{\text{les séries entières définissant } F \text{ et } G \text{ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1}}$
   La somme d'une série entière est de classe ∞ sur son intervalle ouvert de convergence
   donc $\boxed{\text{les fonctions } F \text{ et } G \text{ sont définies et de classe } \infty \text{ sur }]-1,1[}$

   Comme R est à valeur dans $\mathbb{N}^* \bigcup \{+\infty\}$, on a $\Omega \setminus (R = +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (R = n)$

   On a donc l'union disjointe $(R \neq +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (R = n)$ car $(R = 0) = \emptyset$

Ainsi $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R=n)$ en particulier la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(R=n)$ converge.
Pour $n \in \mathbb{N}$, je note $g_n : x \mapsto \mathbb{P}(R=n)x^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ (i) et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ |g_n(x)| \leq \mathbb{P}(R=n)$$

or la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(R=n)$ converge
Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$ de somme G (ii)
D'après le cours, avec (i) et (ii), $\boxed{G \text{ est définie et continue sur } [-1,1]}$
de plus $\boxed{G(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R=n)\, 1^n = 1 - \mathbb{P}(R=+\infty) = \mathbb{P}(R \neq +\infty)}$

7. Soit $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$.
Si $k=0$, on a $(R=0)=\emptyset$ donc $(S_n = 0_d) \cap (R=0)) = \emptyset$
donc $\mathbb{P}((S_n=0_d) \cap (R=0)) = 0 = \mathbb{P}(R=0) = \mathbb{P}(R=0)\mathbb{P}(S_{n-0}=0_d)$
Si $k \geq 1$, on remarque que $(S_n - S_k = 0_d) = \left(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0_d\right)$ et :

$$(R=k) = \left(\sum_{i=1}^{k} X_i = 0_d\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{j} X_i \neq 0_d\right)\right),$$

avec la convention $\bigcap_{j=1}^{0} \star_j = \Omega$ pour le cas $k=1$. Ainsi

$$(R=k) = \left(\left(\sum_{i=1}^{1} X_i, \sum_{i=1}^{2} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{k-1} X_i, \sum_{i=1}^{k} X_i\right) \in \left(\mathbb{Z}^d \setminus \{0_d\}\right)^{k-1} \times \{0_d\}\right)$$

Comme $X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors selon le lemme des coalitions les variables aléatoires $\sum_{i=k+1}^{n} X_i$ et $\left(\sum_{i=1}^{1} X_i, \sum_{i=1}^{2} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{k-1} X_i, \sum_{i=1}^{k} X_i\right)$ sont indépendantes.
D'où les événements $(R=k)$ et $(S_n - S_k = 0_d)$ sont indépendants donc

$$\mathbb{P}\left((S_n = 0_d)\bigcap(R=k)\right) = \mathbb{P}\left((S_n - S_k = 0_d)\bigcap(R=k)\right) = \mathbb{P}(S_n - S_k = 0_d)\,\mathbb{P}(R=k) \quad (*)$$

Soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k} \in \mathbb{Z}^d$, comme $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, on a

$$\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_{n-k}) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k})) = \prod_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{n-k} \mathbb{P}(X = \varepsilon_i) = \prod_{i=k}^{n} \mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i)$$

d'où $\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_{n-k}) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k})) = \mathbb{P}((X_{k+1}, \ldots, X_n) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k})) \quad (**)$
donc $(X_1, \ldots, X_{n-k}) \sim (X_{k+1}, \ldots, X_n)$ ie les vecteurs $(X_1, \ldots, X_{n-k})$ et $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ suivent la même loi.
Il reste à établir que $S_n - S_k \sim S_{n-k}$. Comme je l'ai dit en TD, ce n'est pas si immédiat. En particulier, sans l'hypothèse d'indépendance, ce n'est plus vrai.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n - S_k = i) = \mathbb{P}(X_{k+1} + \cdots + X_n = i) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-k})\in\mathbb{N}^{n-k}\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-k}=i}} (X_{k+1} = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_{n-k})\right)\\
&= \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-k})\in\mathbb{N}^{n-k}\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-k}=i}} \mathbb{P}(X_{k+1} = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_{n-k})\\
&\underset{(**)}{=} \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-k})\in\mathbb{N}^{n-k}\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-k}=i}} \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_{n-k} = \varepsilon_{n-k})\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-k})\in\mathbb{N}^{n-k}\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{n-k}=i}} (X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_{n-k} = \varepsilon_{n-k})\right)\\
&= = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{n-k} = i) = \mathbb{P}(S_{n-k} = i)\end{aligned}$$

d'où avec $(*)$, on a bien $\boxed{\mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)}$ dans tous les cas.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour $k > n$, $(R = k) \cap (S_n = 0_d) = \emptyset = (R = +\infty) \cap (S_n = 0_d)$
La famille $((R = k))_{k\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}}$ est un système complet d'événements ainsi selon la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(S_n = 0_d) = \mathbb{P}\left((R = +\infty) \cap (S_n = 0_d)\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((R = k) \cap (S_n = 0_d)\right) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left((R = k) \cap (S_n = 0_d)\right)$$

Avec l'égalité précédente, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)}$

8. Par produit de Cauchy de séries entières de rayon 1, on a

$$\forall x \in\,]-1,1[\,,\ F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)\right) x^n$$

Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d) = \mathbb{P}(R = 0)\mathbb{P}(S_0 = 0_d) = 0$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d) = \mathbb{P}(R = 0)\mathbb{P}(S_n = 0_d) + \mathbb{P}(S_n = 0_d) = \mathbb{P}(S_n = 0_d)$$

$$\text{donc}\ \ \forall x \in\,]-1,1[\,,\ F(x)G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)x^n = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d)x^n = -1 + F(x)$$

d'où $\boxed{\forall x \in\,]-1,1[\,,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)}$ et ainsi $\forall x \in\,]-1,1[\,,\ F(x)\left(1 - G(x)\right) = 1$
d'où $\forall x \in\,]-1,1[\,,\ 1 - G(x) \neq 0$ et $F(x) = \dfrac{1}{1 - G(x)}$

Si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$ alors selon 6, on a $\forall x \in]-1, 1[\,,\ G(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n) = \mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$

donc $\forall x \in]-1, 1[\,,\ 1 - G(x) \geq 0$ or $G(1) = 1$ et G est continue sur $[-1, 1]$, donc $1 - G(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^+$

donc $\boxed{F(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty \text{ si } \mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1}$

Si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) \neq 1$ alors selon 6, $1 - G(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1 - \mathbb{P}(R \neq +\infty) > 0$

$\boxed{F(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \dfrac{1}{1 - \mathbb{P}(R \neq +\infty)} \text{ si } \mathbb{P}(R \neq +\infty) \neq 1}$

9. Soit $A > 0$. Comme la série à termes positifs $\sum_n c_k$ diverge, la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$.

Ce qui nous fournit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\sum_{k=0} c_k \geq A + 1$.

Comme la fonction polynomiale $\varphi : x \mapsto \sum_{k=0}^{N} c_k x^k$ est continue sur $[-1, 1]$ et que $\varphi(1) \geq A + 1$,

ceci nous fournit alors $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in]1 - \alpha, 1[$, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k > A$

Comme tous les termes sont positifs, on a donc

$$\forall A \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in]0, 1[\,,\ \forall x \in]1 - \alpha, 1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A$$

ce qui signifie : $\boxed{\lim x \to 1^- \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty}$

10. **$\Rightarrow$:** On suppose que $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ est divergente.

Alors la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d) 1^n$ étant divergente, le rayon de la série entière $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d) x^n$ est de rayon inférieure ou égale à 1.

Ainsi avec 6, cette série entière a pour rayon 1 de somme F or les coefficients sont dans $\mathbb{R}^+$

donc d'après la question précédente $F(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$.

Ainsi d'après 8, nécessairement $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$.

$\Leftarrow$: On suppose que $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$.

On remarque que $F(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$ d'après la question 8.

Par l'absurde si la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ était convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs,

cela nous fournirait $M > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_n = 0_d) \leq M$ d'où

$$\forall x \in [0, 1[\,,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_n = 0_d) x^n \leq M$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ à x fixé, cela donne :

$$\forall x \in [0, 1[\,,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d) x^n \leq M$$

Ainsi F serait majorée sur $[0, 1[$ ce qui est en contradiction avec la limite en 1^-.

On bien montré que $\boxed{\text{la série } \sum \mathbb{P}(S_n = 0_d) \text{ est divergente si et seulement si } \mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1}$

11. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On remarque que : $(Y_i = 1) = \bigcap_{k=0}^{i-1} (S_i \neq Sk)$ donc

$$(Y_i = 0) = \bigcup_{k=0}^{i-1} (S_i = Sk) = \bigcup_{k=0}^{i-1} \left(\sum_{j=k+1}^{i} X_j = 0_d \right)$$

De façons analogues à la question 7, on montre que $(X_1, \ldots, X_i) \sim (X_i, \ldots, X_1)$ puis à l'aide de la fonction $(x_1, \ldots x_i) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^i \mapsto \left(\sum_{j=1}^{i} x_j, \ldots, x_{i-1} + x_i, x_i \right) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^i$ on établit que

$$\mathbb{P}\left(Y_i = 0\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{i-1} \left(\sum_{j=k+1}^{i} X_j = 0_d \right) \right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\ell=1}^{i} \left(\sum_{j=1}^{\ell} X_j = 0_d \right) \right)$$

or $\bigcup_{\ell=1}^{i} \left(\sum_{j=1}^{\ell} X_j = 0_d \right) = \bigcup_{\ell=1}^{i} (S_\ell = 0_d) = (R \leq i)$

ainsi $\mathbb{P}\left(Y_i = 0\right) = \mathbb{P}\left(R \leq i\right)$ en passant aux événements contraires, on obtient : $\boxed{\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(R > i)}$

On précise que $(R > i) = (R = +\infty) \bigcup (R \in \{k \in \mathbb{N},\ k > i\})$.

Or par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $N_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Les Y_i suivant des lois de Bernoulli, on a donc existences des membres et les inégalités :

$$\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(Y_i = 1\right)$$

On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R > i)}$

12. On remarque que $((R > i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion. Ainsi par continuité décroissante, on a :

$$\mathbb{P}(R > i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} (R > j) \right) = \mathbb{P}(R = +\infty)$$

Or d'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n} = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(R > i)$.

À l'aide du théorème de Cesàro, on peut conclure que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n} = \mathbb{P}(R = +\infty)}$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

13. Soit $\omega \in \Omega$. On remarque que $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ X_i(\omega) \equiv 1\ [2]$ donc $\forall p \in \mathbb{N},\ S_p(\omega) \equiv p\ [2]$
d'où $S_{2n+1}(\omega) \equiv 1\ [2]$ ainsi $S_{2n+1}(\omega) \neq 0$
On vient de montrer que $(S_{2n+1} = 0) = \emptyset$ d'où $\boxed{\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0}$

Méthode 1 pour $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ (par dénombrement) : Je note $\Lambda = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n},\ \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0\}$.

Comme les X_i sont presque sûrement à valeurs dans $\{-1,1\}$, on a alors

$$(S_{2n}=0)=\left(\sum_{i=1}^{2n} X_i=0\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}((X_1,\ldots,X_{2n})=\lambda)$$

comme la réunion est finie et disjointe on a donc

$$\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{P}\left((X_1,\ldots,X_{2n})=\lambda\right)$$

Soit $\lambda\in\Lambda$. On écrit $\lambda=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})$.
On remarque que nécessairement $|\{i\in[\![1,2n]\!],\ \varepsilon_i=1\}|=|\{i\in[\![1,2n]\!],\ \varepsilon_i=-1\}|=n$
donc par indépendance mutuelle des X_i qui suivent toutes la même loi que X, on a :

$$\mathbb{P}\left((X_1,\ldots,X_{2n})=\lambda\right)=\prod_{i=1}^{2n}\mathbb{P}\left(X=\varepsilon_i\right)=p^nq^n=(pq)^n$$

De plus pour caractériser un élément de Λ, il suffit de choisir la position des n « 1 » d'un $2n$-uplet de $\{-1,1\}^{2n}$; ainsi $|\Lambda|=\binom{2n}{n}$ donc

$$\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(pq)^n=|\Lambda|\times(pq)^n=\binom{2n}{n}(pq)^n$$

Méthode 2 pour $\mathbb{P}(S_{2n}=0)$ (utilisation d'une loi binomiale) : Je note pour $i\in\mathbb{N}^*$, $Y_i=\dfrac{1+X_i}{2}$ de sorte que $Y_i\sim\mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli de paramètre p).
On remarque que par lemme des coalitions que les Y_i sont mutuellement indépendants.
Je note alors $T_{2n}=\sum_{i=1}^{2n}Y_i$ de sorte que $T_{2n}\sim\mathcal{B}(2n,p)$. On remarque

$$T_{2n}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1+X_i}{2}=n+\frac{S_{2n}}{2}$$

donc $(S_{2n}=0)=(T_{2n}=n)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\mathbb{P}(T_{2n}=n)=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^{2n-n}=\binom{2n}{n}p^nq^n$$

On a bien justifié l'égalité $\boxed{\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\binom{2n}{n}(pq)^n}$

14. Soit $x\in\,]-1,1[$. On a, à l'aide de 13, en passant par des sommes partielles :

$$F(x)=0+\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_{2n}=0)x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\left(pqx^2\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\left(4pqx^2\right)^n$$

On a $pq=p(1-p)$ et $p\in]0,1[$
or une étude de la fonction $t\mapsto t(1-t)$, montre que $\forall t\in[0,1],\ 0\leq t(1-t)\leq 1/4$ (maximum atteint en 1/2).
Comme $x^2\in[0,1[$, alors on a $4pqx^2\in[0,1[$.
donc en utilisant la question 5, on obtient $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\neq 0$

Ainsi selon 8, on a $G(x) = 1 - \dfrac{1}{F(x)}$ d'où $\boxed{G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}}$

Selon 6, G est continue sur $[-1,1]$ et on a :

$$\mathbb{P}(R \neq +\infty) = G(1) = \lim_{x \to 1^-} G(x) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{1-4p+4p^2} = 1 - \sqrt{(1-2p)^2}$$

donc

$$\mathbb{P}(R = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(R \neq +\infty) = |2p-1|$$

or $p - q = p - (1-p) = 2p - 1$

On a donc $\boxed{\mathbb{P}(R = +\infty) = |p-q|}$ Puis en utilisant 5, on a

$$\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(1/2 - i)}{n!}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(2i-1)}{2^n n!} x^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)}{2^n n!} x^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\left((n-1)!\right)2^n n!} x^n$$

donc $\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1} n} x^n$

Il eût été sans doute plus simple de primitiver la série entière du 5 sur son intervalle ouvert de convergence
comme $4pqx^2 \in]-1,1[$, on a alors

$$G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1} 4^n (pq)^n}{2^{2n-1} n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n}{n} x^{2n}$$

On remarque que R est à valeurs dans $2\mathbb{N}^* \bigcup \{+\infty\}$ car $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{2j+1} = 0) = 0$

Par unicité du développement en séries entières, on obtient la loi de R :

$$\boxed{R \text{ est à valeurs dans } 2\mathbb{N}^* \bigcup \{+\infty\} \text{ et } \mathbb{P}(R = +\infty) = |p-q| \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(R = 2n) = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n}{n}}$$

15. Comme $p = q = 1/2$, quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\mathbb{P}(R = 2n) = \dfrac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n4^n}$.

Or d'après 2, $\dbinom{2n-2}{n-1} \sim \dfrac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n-1}} \sim \dfrac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$

donc $\boxed{\mathbb{P}(R = 2n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi} n \sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}}$

On remarque que $\mathbb{P}(R = +\infty) = |p-q| = 0$ donc R est presque sûrement à valeurs dans $2\mathbb{N}^*$.

On a pour $p \in \mathbb{N}$, $(R > 2p) = (R > 2p+1) = \bigcap_{k=p+1}^{+\infty} (R = 2k)$ (union disjointe) donc

$$\mathbb{P}\left(R > 2p\right) = \mathbb{P}\left(R > 2p+1\right) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(R = 2k\right)$$

Ainsi en utilisant la sommation des relation de comparaison dans le cas convergent avec une série de référence à termes positifs et avec 3, on a quand p tend vers $+\infty$:

$$\mathbb{P}\left(R > 2p\right) = \mathbb{P}\left(R > 2p+1\right) \sim \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}} \sim \frac{1}{(3/2-1)2\sqrt{\pi} p^{3/2-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} p^{1/2}}$$

donc $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(2p)^{1/2}\mathbb{P}(R>2p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ et $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(2p+1)^{1/2}\mathbb{P}(R>2p+1) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$

ainsi par théorème de cours $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}i^{1/2}\mathbb{P}(R>i) \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$ donc

$$\mathbb{P}(R>i) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}i^{1/2}}$$

À nouveau en utilisant 3 et les sommations des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R>i) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}n^{1-1/2}}{\sqrt{\pi}(1-1/2)}$$

Comme $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\mathbb{E}(N_n) = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R>i)$ selon 11

On en déduit l'équivalent $\boxed{\mathbb{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}}$

D. Un résultat asymptotique

16. On a, par décroissance de (a_p), et stricte positivité de (b_p) :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \geq \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = a_n \sum_{j=0}^{n} b_j = a_n B_n$$

d'où $\boxed{a_n \leq \dfrac{1}{B_n}}$ car $B_n > 0$ et

$$1 = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{m-k} + \sum_{k=n}^{m} a_k b_{m-k} \leq a_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} + a_n \sum_{k=n}^{m} b_{m-k}$$

or $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} b_{m-k} = \sum_{j=0}^{m-n} b_j$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} = \sum_{j=m-n+1}^{m} b_j = B_m - B_{m-n}$

d'où $\boxed{1 \leq a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n})}$

17. Pour n assez grand, on a $m_n > n$ donc à l'aide de la question précédente et par stricte positivité de (B_p), on a

$$\frac{1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})}{B_{m_n-n}} \leq a_n \leq \frac{1}{B_n}$$

donc

$$\frac{B_n}{B_{m_n-n}}\left(1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})\right) \leq a_n B_n \leq 1$$

Par hypothèse on a $\dfrac{B_n}{B_{m_n-n}}\left(1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ainsi selon les gendarmes $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{B_n}}$

18. En utilisant une comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto \dfrac{C}{t}$ qui est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{C}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n)$ puis par sommation des relation de comparaisons, on a

$$B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n)$$

d'où $B_n \underset{n\to+\infty}{=} C\ln(n)+\emptyset\left(\ln(n)\right)$

Je pose $m_n = \lfloor n\ln(n)\rfloor$ si $n\geq 1$ et $m_0=0$.
Pour $n\geq \mathrm{e}^2$, on a $m_n \geq 2n > n$ (i)
De plus pour n assez grand, on a $n\ln(n)\leq m_n \leq n\ln(n)+1$
donc quand $n\longrightarrow+\infty$, on a $m_n\sim n\ln(n)$
puis $m_n - n = n\ln(n) - n + \emptyset\left(n\ln(n)\right) = n\ln(n)+\emptyset\left(n\ln(n)\right)$ donc

$$B_{m_n-n} = C\ln\left(m_n-n\right)+\emptyset\left(\ln\left(m_n-n\right)\right)$$

Or $\ln\left(m_n-n\right) = \ln\left(n\ln(n)+\emptyset\left(n\ln(n)\right)\right) = \ln(n)+\ln(\ln(n))+\ln(1+\emptyset(1)) = \ln(n)+\emptyset\left(\ln(n)\right)$. Ainsi

$$B_{m_n-n}\sim C\ln(n)\sim B_n \qquad \text{(ii)}$$

Et enfin $B_{m_n}-B_{m_n-n} = \displaystyle\sum_{k=m_n-n+1}^{m_n} b_k$
L'équivalent, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$,
nous fournit $A\in\mathbb{N}$, tel que $\forall k\geq A,\ 0<b_k\leq \dfrac{2C}{k}$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n-n+1=+\infty$ ceci nous fournit $N\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq N \Longrightarrow m_n-n+1\geq A$
Ainsi pour $n\geq N$, on a

$$0\leq B_{m_n}-B_{m_n-n}\leq \sum_{k=m_n-n+1}^{m_n}\frac{2C}{k}\leq \frac{2Cn}{km_n-n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2Cn}{km_n-n+1}=0$ d'où
$dis\lim_{n\to+\infty} B_{m_n}-B_{m_n-n}=0$ (iii)

Avec (i), (ii) et (iii), les hypothèses de la question 17 sont vérifiées et donc on a bien $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{C\ln(n)}}$

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvorestsky

19. Je considère H somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\left(R>k\right)x^k$.

On montre comme 6, que le rayon de convergence est ≥ 1.

Soit $x\in\,]-1,1[$. On sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ (somme de série entière de rayon 1). De plus

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \Omega\setminus(R>k)=(R\leq k)=\bigcup_{i=0}^{k}(R=i) \quad \text{(union disjointe)}$$

On a donc existences des membres et l'égalité :

$$H(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(R\leq n\right)x^n=\frac{1}{1-x}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}\left(R=i\right)\right)x^n=\frac{1}{1-x}-\frac{G(x)}{1-x}$$

On a reconnu un produit de Cauchy de deux séries entières de rayon 1.
En effectuant un nouveau produit de Cauchy puis en utilisant 8, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0_d)\mathbb{P}(R>n-k)\right)x^n=F(x)H(x)=\frac{F(x)-F(x)G(x)}{1-x}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$

Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0, on a $\boxed{1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0_d)\mathbb{P}(R > n-k)}$

20. Pour $n = 0$, on a $(S_{2\cdot 0} = 0_2) = (S_0 = 0_2) = \Omega$ et on a bien $\left(\frac{\binom{2\cdot 0}{0}}{4^0}\right)^2 = 1 = \mathbb{P}(\Omega)$.

On suppose désormais que $n > 0$.

Méthode 1 pour $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ (par dénombrement) : Je note $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ et

$$\Lambda = \left\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n}) \in \{e_1, -e_1, e_2, -e_2\},\ \sum_{j=0}^{2n} \varepsilon_j = 0_2\right\}$$

En faisant comme en 13, on peut montrer que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = |\Lambda| \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, je note $\Lambda_k = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n}) \in \Lambda,\ \mathrm{card}\left(\{i \in [\![1, 2n]\!],\ \varepsilon_i = e_1\}\right) = k\}$ de sorte que l'on ait l'union disjointe

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^{n} \Lambda_k \quad \text{puis} \quad |\Lambda| = \sum_{k=0}^{n} |\Lambda_k|$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On va dénombrer les éléments de Λ_k.

Pour caractériser un élément de cet ensemble, on commence par choisir les positions des e_1, puis des $-e_1$ et enfin des e_2 ; les places restantes seront attribuées aux $-e_2$.

Parmi les places dévolues aux e_1, on choisit les k positions des e_1, on en trouve $\binom{2n}{k}$ possibles.

Parmi les places dévolues aux $-e_1$, il y en a nécessairement k également pour que la somme soit nulle, on en trouve $\binom{2n-k}{k}$ possibles.

Il reste alors $2n - 2k$ places à attribuer à parts égales aux e_2 et $-e_2$

Il y a donc $\binom{2n-2k}{n-k}$ possibilités pour les e_2. Ainsi

$$|\Lambda_k| = \binom{2n}{k} \times \binom{2n-k}{k} \times \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{(2n)! \cdot (2n-k)! \cdot (2n-2k)!}{(2n-k)! \cdot k! \cdot (2n-2k)! \cdot k! \cdot (n-k)! \cdot (n-k)!} = \binom{2n}{n} \times \left(\binom{n}{k}\right)$$

donc en utilisant la question 1 :

$$|\Lambda| = \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n} \times \binom{2n}{n}$$

.

Méthode 2 pour $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ (utilisation de lois binomiales) : Pour $i \in \{1, 2\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

je note $\pi_i : (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 \longmapsto a_i \in \mathbb{Z}$ et $X_k^{(i)} = \pi_i(X_k)$. Puis je note $u_k = X_k^{(1)} + X_k^{(2)}$ et $v_k = X_k^{(1)} - X_k^{(2)}$ de sorte que u_k et v_k suivent des lois uniformes sur $\{-1, 1\}$.

On remarque que $((u_k, v_k) = (1,1)) = (X = (1,0))$ donc

$$\mathbb{P}\left((u_k, v_k) = (1,1)\right) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\left(u_k = 1\right) \cdot \mathbb{P}\left(v_k = 1\right)$$

On montre de même que

$$\forall (\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 1\}^2,\ \mathbb{P}\left((u_k, v_k) = (\varepsilon, \varepsilon')\right) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\left(u_k = \varepsilon\right) \cdot \mathbb{P}\left(v_k = \varepsilon'\right)$$

d'où u_k et v_k sont des variables aléatoires sont indépendantes.

Je note aussi pour $m \in \mathbb{N}^*$, $U_m = \sum_{k=1}^{m} u_k$ et $V_m = \sum_{k=1}^{m} v_k$.

On remarque $(S_{2n} = 0_2) = (U_{2n} = 0) \bigcap (V_{2n} = 0)$
Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, l'indépendance de U_m et V_m.
L'initialisation a été établi pour $m = 1$ car $U_1 = u_1$ et $V_1 = v_1$.
Pour l'hérédité, on considère $m \in \mathbb{N}^*$ tel que U_m et V_m soient indépendantes.
Soit $A, B \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \{-1, 1\}$. On a

$$((U_m, u_{m+1}) = (A, a), (V_m, v_{m+1}) = (B, b)) = ((U_m, V_m) = (A, B), (u_{m+1}, v_{m+1}) = (a, b))$$

Avec le lemme des coalitions, on a l'indépendance de (U_m, V_m) et de (u_{m+1}, v_{m+1}) fonctions respectives de $X_1, \ldots, X_m$ et de X_{m+1}. Ainsi :

$$\mathbb{P}\left[(U_m, u_{m+1}) = (A, a), (V_m, v_{m+1}) = (B, b)\right] = \mathbb{P}\left((U_m, V_m) = (A, B)\right) \cdot \mathbb{P}\left((u_{m+1}, v_{m+1}) = (a, b)\right)$$

Puis on a $\mathbb{P}\left[(U_m, u_{m+1}) = (A, a), (V_m, v_{m+1}) = (B, b)\right] = \mathbb{P}\left(U_m = A\right) \cdot \mathbb{P}\left(V_m = B\right) \cdot \mathbb{P}\left(u_{m+1} = a\right) \cdot \mathbb{P}\left(v_{m+1} = b\right)$
En réutilisant le lemme des coalitions, on obtient

$$\mathbb{P}\left[(U_m, u_{m+1}) = (A, a), (V_m, v_{m+1}) = (B, b)\right] = \mathbb{P}\left[(U_m, u_{m+1}) = (A, a)\right] \cdot \mathbb{P}\left[(V_m, v_{m+1}) = (B, b)\right]$$

On a établi que (U_m, u_{m+1}) et (V_m, v_{m+1}) sont indépendantes.
Puis avec le lemme des coalitions, $U_{m+1} = U_m + u_{m+1}$ et $V_{m+1} = V_m + v_{m+1}$ sont indépendantes.

Ainsi on conclut que la récurrence est établie. En particulier U_{2n} et V_{2n} sont indépendantes.
Ainsi $\mathbb{P}\left(S_{2n} = 0\right) = \mathbb{P}\left(U_{2n} = 0\right) \cdot \mathbb{P}\left(V_{2n} = 0\right)$
En faisant comme en 13, on montre que : $\mathbb{P}\left(U_{2n} = 0\right) = \mathbb{P}\left(V_{2n} = 0\right) = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

On bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2) = \left(\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2}$

21. En utilisant la question 2, on montre que $\mathbb{P}\left(S_{2n} = 0_2\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 19, on a $1 = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(S_k = 0_2)\mathbb{P}(R > 2n - k) = \sum_{p=0}^{2n} \mathbb{P}(S_{2n-p} = 0_2)\mathbb{P}(R > p)$
De plus on remarque que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(S_{2i+1} = 0_2\right) = 0$ comme en 13. Ainsi :

$$1 = 0 + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0_2)\mathbb{P}(R > 2k)$$

En posant $a_n = \mathbb{P}(R > 2n)$ et $b_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0_2)$
À l'aide de la question précédente (b_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ de plus, on a $b_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1/\pi}{n}$.
On a bien (a_n) est décroissante à valeurs positives
On suppose que la suite (a_n) s'annule ceci nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(R > N) = a_N = 0$.
donc $\forall k \geq N$, $\mathbb{P}(R > k) = 0$ car $(R > k) \subset \mathbb{P}(R > N)$ donc on aurait avec 19 :

$$\forall n \geq N,\ 1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0_d)\mathbb{P}(R > n - k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)\mathbb{P}(R > k) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)\mathbb{P}(R > k)$$

donc en remarquant que $S_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (termes pairs et impairs), on a obtient par combinaison linéaire

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)\mathbb{P}(R > k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $0 = 1$ ce qui n'est pas d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.
Les hypothèses de la partie D étant vérifiée ainsi que celle de la question 18, on déduit que

$$\mathbb{P}(R > 2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi \ln(2n)}$$

De manière analogue à 15, on a $\mathbb{P}(R > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi \ln(n)}$
Puis en utilisant 11, une comparaison série-intégrale comme en 3 et à l'aide de 4 et d'une sommation de relation de comparaison (cas divergent), on trouve

$$\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (R > i) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi \ln(n)}$$