Sujet 10 - Correction

E3A PC 2024 Exercice 2

à partir d'un corrigé de B. Groux

1. **Questions de cours**

   (a) On a $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
   De plus, X admet une espérance et une variance toutes deux égales à λ.

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{V}(X)=\lambda.$$

   (b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{sh}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad \text{et}\quad \mathrm{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

   (c) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω. On dit que X_1 et X_2 sont indépendantes si :

$$\forall x_1\in X_1(\Omega),\ \forall x_2\in X_2(\Omega),\qquad \mathbb{P}(X_1=x_1,\ X_2=x_2)=\mathbb{P}(X_1=x_1)\mathbb{P}(X_2=x_2).$$

2. (a) L'évènement $\{Y=0\}$ se réalise si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que l'évènement $\{X=2k\}$ se réalise.
   On a donc $\boxed{\{Y=0\}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{X=2k\}}$. De même, on a $\boxed{\{Y=1\}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{X=2k+1\}}$.

   (b) Puisque Y est à valeurs dans $\{0,1\}$, Y est une variable de Bernoulli dont le paramètre, noté p, est $\mathbb{P}(Y=1)$.
   Les évènements $\{X=2k+1\}$, $k\in\mathbb{N}$, étant deux à deux incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(Y=1)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2k+1)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}=e^{-\lambda}\mathrm{sh}(\lambda)=\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}.$$

   En conclusion, $\boxed{Y\sim\mathcal{B}(p)\text{ avec } p=\dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2}=e^{-\lambda}\mathrm{sh}(\lambda)\text{ et donc } \mathbb{E}(Y)=p=\dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2}=e^{-\lambda}\mathrm{sh}(\lambda).}$

3. (a) Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Z est à valeurs dans $\{1,2\}$, on a $\boxed{T(\Omega)=\mathbb{N}}$.

   (b) Puisque Z est à valeurs dans $\{1,2\}$, la famille $(\{Z=1\},\{Z=2\})$ est un système complet d'évènements.
   Soit $k\in\mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(T=k,\ Z=1)+\mathbb{P}(T=k,\ Z=2)=\mathbb{P}(X=k,\ Z=1)+\mathbb{P}(2X=k,\ Z=2).$$

   Or, les variables aléatoires X et Z sont indépendantes, donc $2X$ et Z le sont aussi. On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Z=1)+\mathbb{P}(2X=k)\mathbb{P}(Z=2)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X=k)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(2X=k)}.$$

   (c) Soit $k\in\mathbb{N}$.
   Si k est impair, l'évènement $\{2X=k\}$ est impossible donc on a $\mathbb{P}(T=k)=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{2}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
   Si k est pair, on a $\mathbb{P}(T=k)=\dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X=k)+\dfrac{1}{2}\mathbb{P}\left(X=\dfrac{k}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^k}{k!}+\dfrac{\lambda^{k/2}}{(k/2)!}\right)$.
   $\boxed{\text{On a ainsi déterminé la loi de } T.}$

(d) On note A l'évènement : « T prend une valeur paire ». En procédant comme dans la question 2a, on établit que $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{T = 2j\}$. Par incompatibilité des évènements $\{T = 2j\}$, $j \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = 2j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \frac{\lambda^j}{j!} \right) = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right) .$$

La probabilité que T prenne des valeurs paires est donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} e^{-\lambda}(\mathrm{ch}(\lambda) + e^{\lambda}) = \frac{3 + e^{-2\lambda}}{4}}$.