Révisions pour l'écrit

Jeudi 27 mars (3h)

DS8 (facultatif) de 9h à 12h en salle Descartes.

Intégration, Suites et séries de fonctions, Séries entières.

Vendredi 28 mars matin (2h)

Sujet 1 (CCINP PSI 2024 problème 2)

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $J_\lambda \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Les matrices J_λ, dites « matrices de Jordan », sont particulièrement importantes dans la mesure où on peut montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice est scindé, alors elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont formés de matrices de Jordan.

On se propose de montrer dans un premier temps une propriété d'irréductibilité des blocs de Jordan. Dans un second temps, on étudie le caractère borné des solutions du système différentiel linéaire associé à une matrice de Jordan.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k tel que $M^k = 0$ est appelé l'indice de nilpotence de M.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^p$ est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $x \in V$, $f(x) \in V$.

On note $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E$, on définit :

$$\mathcal{N}(A) = \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|X\| = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

On admet que $\mathcal{N}$ et $\|\cdot\|$ définissent des normes respectivement sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et E.

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $u_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à J_λ.

30. Calculer $u_0^2(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et en déduire J_0^2.

    Calculer de même J_0^{p-1} et J_0^p. En déduire que J_0 est nilpotente d'indice p.
31. Montrer que $\mathrm{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.
32. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Montrer que V est stable par u_λ si, et seulement si, V est stable par u_0.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ stable par u_λ, de dimension $k \in [\![1, p]\!]$. On note ν l'endomorphisme induit par u_λ sur V et $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$ une base de V, que l'on complète en une base $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_p)$ de $\mathbb{R}^p$.

33. Quelle est la forme de la matrice de u_λ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$?
34. En déduire que le polynôme caractéristique de ν divise le polynôme caractéristique de u_λ et que $e_p \in V$.
35. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de décomposition $\mathbb{R}^p = V \oplus W$ où V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^p$ stables par u_λ non réduits à $\{0\}$.

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

On s'intéresse dans cette partie aux solutions du système différentiel :

$$(S) \quad X' = J_\lambda X.$$

Une solution de (S) est une fonction :

$$X : \begin{cases} \mathbb{R} \to E \\ t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

de classe C^1 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = J_\lambda X(t)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la matrice carrée de taille p notée $\exp(tJ_\lambda)$ par :

$$\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k.$$

36. Montrer que si X_0 est un vecteur propre pour J_λ associé à la valeur propre λ, alors $\tilde{X} : t \mapsto e^{\lambda t} X_0$ est une solution particulière de (S).
37. On définit la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ t \mapsto \exp(tJ_\lambda) \end{cases}$.

    Montrer que φ est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = J_\lambda \exp(tJ_\lambda) = \exp(tJ_\lambda) J_\lambda$.
38. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$.

    Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tJ_\lambda)$ est inversible, d'inverse $\exp(-tJ_\lambda)$.
39. Montrer que $X : t \mapsto X(t)$ est solution de (S) si, et seulement si, $Y : t \mapsto \exp(-tJ_\lambda)X(t)$ est constante. En déduire que les solutions de (S) sont exactement les fonctions $X : t \mapsto \exp(tJ_\lambda)X_0$ où $X_0 \in E$.
40. Montrer que si $\lambda > 0$, (S) admet une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.
41. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $X \in E$, on a $\|AX\| \leqslant \mathcal{N}(A)\,\|X\|$.
    En déduire que si $\lambda < 0$, toutes les solutions de (S) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
42. Que dire concernant l'existence de solutions de (S) non bornées sur $\mathbb{R}_+$ si $\lambda = 0$?

Vendredi 28 mars après-midi (2h)

Sujet 2 (E3A PC 2010 maths A et CCP MP 2011 maths 1)

Dans tout ce problème, E désigne l'ensemble formé des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $[0,+\infty[$. On définit aussi :

- E_1 l'ensemble des fonctions f de E vérifiant :

$$\text{pour tout } x>0 \text{ la fonction } t \longmapsto f(t)e^{-xt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+.$$

- E_2 l'ensemble des fonctions f de E vérifiant :

$$\exists A>0,\ \exists C>0,\ \exists n\in\mathbb{N},\qquad \forall t\geq A,\quad |f(t)|\leq Ct^n.$$

- E_3 l'ensemble des fonctions f de E qui sont bornées sur $[0,+\infty[$.

On sera très attentif à l'énoncé :
pour certaines questions $f\in E_1$ (sujet MP), pour d'autres $f\in E_2$ (sujet PC).

Préliminaire

1. Démontrer que $E_3\subset E_2\subset E_1\subset E$.
   Justifier par des contre-exemples que toutes ces inclusions sont strictes.
2. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de E_1.

I - Définition et premiers exemples

Définition

Pour $f\in E_1$, on définit sa transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad \mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt.$$

1. Démontrer que l'application $\mathcal{L}: E_1\longrightarrow \mathcal{F}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ est linéaire.
2. Justifier que chacune des fonctions suivantes est un élément de E_1 et déterminer leurs transformées de Laplace respectives.
   (a) $f_0 : t\in[0,+\infty[\longmapsto 1$.
   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : t\in[0,+\infty[\longmapsto t^n$.
   (c) Pour tout $\lambda\in[0,+\infty[$, $g_\lambda : t\in[0,+\infty[\longmapsto e^{-\lambda t}$.
   (d) Pour tout $a\in\mathbb{R}$, $h_a : t\in[0,+\infty[\longmapsto \sin(at)$.

II - Premières propriétés

1. **Transformée de Laplace d'une fonction dérivée.**
   (a) On suppose dans cette question que $f\in E_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que sa dérivée f' est aussi un élément de E_2.
      i. Montrer que pour tout $x>0$, on a

$$\mathcal{L}(f')(x)=x\mathcal{L}(f)(x)-f(0) \tag{1}$$

      ii. $(\star)$ Montrer que (1) est encore valable si on suppose seulement que $f\in E_1$ de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est aussi un élément de E_1.

(b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et que f, f', f'' sont des éléments de E_2.
Pour tout $x > 0$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(x)$ en fonction de $x, \mathcal{L}(f)(x), f(0)$ et $f'(0)$.

Remarque : On pourrait démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ et si pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ $f^{(k)}$ est un élément de E_2, alors :

$$\forall x > 0, \qquad \mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k} f^{(k)}(0).$$

2. **Régularité de la transformée de Laplace.**
   (a) Démontrer que si $f \in E_2$, alors $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et exprimer $\mathcal{L}(f)'$ comme transformée de Laplace d'une fonction g à préciser.
   On pourra restreindre l'hypothèse de domination à des intervalles $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$.
   (b) Démontrer que si $f \in E_2$, alors $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et préciser $(\mathcal{L}(f))^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une transformée de Laplace.

III - Comportement au voisinage de 0

On veut montrer le théorème suivant.

Théorème (Théorème de la valeur finale)

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est bornée et si l'on note $\mathcal{L}(f)$ sa transformée de Laplace, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell.$$

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que f appartient à E_3.
2. Soit $x \in]0,+\infty[$. Démontrer que $x\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f\left(\frac{t}{x}\right) dt$.
3. En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée à paramètre continu, que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
4. Si $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.
5. **Application :** Déterminer un équivalent quand $x \to 0$ de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(t) e^{-xt} dt$.

IV - Comportement au voisinage de $+\infty$

1. Montrer que si $f \in E_3$, alors $\mathcal{L}(f)(x) \longrightarrow 0$ lors que $x \to +\infty$.
2. Soit $f \in E_2$.
   On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que pour tout réel $t \geq A$, on ait $|f(t)| \leq Ct^n$.
   (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a
   $$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}| dt + C\frac{n!}{x^{n+1}}.$$
   (b) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^A |f(t)e^{-xt}| dt = 0$.
   (c) En déduire que $\mathcal{L}(f)(x) \longrightarrow 0$ lors que $x \to +\infty$.

3. ($\star\star$) En s'inspirant de la démarche précédente, ou en utilisant le théorème de convergence dominée à paramètre continu, retrouver ce résultat lorsque $f \in E_1$ seulement.
4. **Théorème de la valeur initiale**.
   On veut montrer le théorème suivant.

Théorème (Théorème de la valeur initiale)

Soit $f \in E_1$ une fonction bornée et $\mathcal{L}(f)$ sa transformée de Laplace. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0).$$

On revient à la définition de limite, et on montre que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \geq A, \qquad |x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

On fixe donc $\varepsilon > 0$.

(a) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \alpha]$, on ait $|f(t) - f(0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ce $\alpha > 0$ est désormais fixé.

(b) Soit $x > 0$. Démontrer que :

$$|x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)| \leq x \int_0^\alpha |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt + x \int_\alpha^{+\infty} |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt.$$

(c) Démontrer aussi que pour $x > 0$, on a $x \displaystyle\int_0^\alpha |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(d) Montrer enfin que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \int_\alpha^{+\infty} |f(t) - f(0)|e^{-xt}dt = 0$ et conclure.

V - Injectivité

Le but de cette partie est de montrer que $\mathcal{L}$ est injective.

On se donne $f \in E_1$ et on considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s}ds.$$

1. Justifier que $g(t)$ possède une limite finie L lorsque $t \to +\infty$.
2. En déduire que g est un élément de E_1.
3. (a) Justifier que g est dérivable et montrer que g' est un élément de E_1.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+1)t}dt$.
   (c) On définit l'application ψ sur $[0, 1]$ par

$$\psi(u) = \begin{cases} g(-\ln(u)) & \text{si} \quad u \in]0, 1] \\ L \quad \text{si} \quad u = 0 \end{cases}$$

   Montrer que ψ est continue.
   (d) À l'aide d'un changement de variable, démontrer l'égalité suivante.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}dt = \int_0^1 u^{x-1}\psi(u)du.$$

(e) On suppose que $\mathcal{L}(f) = 0$.

i. Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(u)\psi(u)du = 0$.

On admet le théorème suivant :

Théorème (théorème de Weierstrass)

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiale convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

ii. En utilisant ce théorème, démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \psi^2(u)du = 0$.

iii. En déduire que f est la fonction nulle et conclure.

Sujet 3 (Centrale PSI 2016 maths 2)

Ce problème aborde l'étude de deux transformations intégrales utilisées pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier et celle de Laplace. Chacune d'elles permet de modéliser le comportement fréquentiel dun signal. La partie 1 étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie 2 aboutit à la formule dinversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie 3 traite le cas particulier d'un signal dont le spectre des fréquences est limité à $[-1/2, 1/2]$. La partie 4 étudie le cas particulier dun signal périodique. Le résultat auquel elle aboutit est utilisé dans la partie 5 pour démontrer le théorème de l'échantillonnage de Shannon. la partie 6 utilise un résultat classique de probabilité pour démontrer l'injectivité de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et nulles hors d'un segment.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

1. Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi,\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i t\xi}\, dt$$

1.A On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

1.B On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

1.B.1 Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1.B.2 Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} |\psi(x)|\ dx \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

1.C Soit $f \in E_{cpm}$. montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

1.D.1 Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.D.2 Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^n(\xi) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2i\pi\xi}\ dt$$

1.E On considère la fonction $\theta\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1.E.1 justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$$

1.E.2 Etablir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$. *On admettra que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\ dx = 1$.

2. Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\ d\xi \qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathcal{F}(\theta)(t)\ dt$$

2.A Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\ d\xi$.

2.B Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

2.C Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_n$. *On admettra la formule de Fubini :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)e^{-2i\pi\xi t}\ d\xi\right)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)e^{-2i\pi\xi t}\ dt\right)\ d\xi$$

2.D Démontrer que $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\ d\xi$.

En déduire en utilisant la fonction $h\ :\ t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{2i\pi x\xi}\ d\xi \tag{2.1}$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

2.E Une application

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi\xi x}}{1+(2\pi\xi)^2}\ d\xi = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

3. Transformée de Fourier à support compact

Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. D'après la relation (2.1), on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x\xi}\, d\xi$$

3.A Démontrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.B Prouver que

$$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2,\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \int_{-1/2}^{1/2} (2i\pi\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x_0 \xi}\, d\xi = f(x)$$

3.C On suppose que f est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$. Montrer que $f = 0$.

4. Cas de fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n, on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k x}$$

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

- la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\},\ g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\pi x)} \qquad g(0) = 0 \qquad g(1) = g(-1) = -g(0)$$

- la suite de complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx$$

4.A

4.A.1 Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$ et continue sur $]-1, 1[$.

4.A.2 Calculer la limite de g' en 0. En déduire que g est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.
On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.

4.B Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\, dx$.

4.C Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\},\ S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi i x)}$$

4.D Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x)\, dx$$

4.E A l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left| \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) \, dx \right| \leq \frac{C}{2n+1}$$

4.F Soit $t \in [-1/2, 1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2, 1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \ G_t(x) = f'(x+t)\sin(\pi x) - (f(x+t) - f(t))\pi \cos(\pi x)$$

Etablir l'existence d'un réel D, indépendant de x et de de t, tel que

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \ \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \ |G_t(x)| \leq Dx^2$$

4.G Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \ \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{2i\pi kt} \right| \leq \frac{E}{2n+1} \tag{4.1}$$

On pourra introduire la fonction $h_t \ : \ x \mapsto f(x+t)$.

5. Formule d'échantillonage de Shannon

Soit $f \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \psi_k(x) = \psi(x+k) \tag{5.1}$$

où ψ est définie à la question 1.B.

5.A Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \ (\mathcal{F}(f))^{(n)} \left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)} \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

5.B Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathcal{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5.C A l'aide de l'inégalité (4.1), prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2\pi i k x} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(f)$ sur $[-1/2, 1/2]$.

5.D Démontrer que la suite de fonctions $\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On notera symboliquement $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \psi_k$.

5.E Etablir que $\forall j \in \mathbb{Z}, \ f(-j) = d_j$.

L'égalité $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k)\psi_k$ traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$.

6.Transformation de Laplace

Soit $f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. On définit la fonction $\mathcal{L}(f)$(*transformée de Laplace de* f) sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \, dt$$

On admettra que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} f(t)t^n e^{-xt}\, dt$$

Rappelons que, pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

6.A On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

6.A.1 Par récurrence, démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, S_n suit la loi de poisson de paramètre $n\lambda$.
On admettra que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

6.A.2 Soit $\varepsilon > 0$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

6.A.3 Soit $\varepsilon > 0$. Justifier les deux inclusions suivantes :

$$(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

$$(S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

6.A.4 Dans toutes les questions qui suivent, on suppose $x \geq 0$.
Déduire du 6.A.3 que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } \ x > \lambda \end{cases}$$

6.B A l'aide de la question 6.A, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k\leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } \ x > \lambda \end{cases}$$

6.C Dans la suite de cette partie, on admettra que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k\leq \lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \frac{1}{2} \ \text{ si } \ x = \lambda$$

6.C.1 Soit $x \geq 0$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k\leq \lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \int_0^x f(y)\, dy$$

6.C.2 En déduire que $\mathcal{L}\ :\ f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est injective sur l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, continues sur $\mathbb{R}_+$, et nulles en dehors d'un segment.

Mardi 1er avril (2h+1h)

Sujet 4 (CCINP MP 2012)

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A. On admet son existence et son unicité.

On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de ϕ_A, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \phi_A$.
   Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice de ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Dans la suite de cette partie, on suppose que $\phi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).
3. Donner le polynôme caractéristique de ϕ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).
4. En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.
5. Démontrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
   On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

(a) Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

(b) Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

(c) En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(P_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

(a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

i. Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.

ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de A^T.

iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(X \neq 0)$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ $(Y \neq 0)$ tels que $AX = zX$ et $A^TY = \overline{z}Y$.
En calculant $\phi_A\left(XY^T\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.

(b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(X \neq 0)$ une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

(c) Démontrer que, pour tout couple (i,j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

(d) En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0

8. Démontrer qu'il existe un polynôme π_A annulant A et de degré minimal.
On pourra considérer l'ensemble $\Delta_A = \{\deg(P), \exists P \in \mathbb{R}[X], P(B) = 0 \text{ et } P \neq 0\}$.
On note m le degré de π_A.

9. Démontrer que si un polynôme annule A, alors, il est divisible par π_A. On pourra effectuer une division euclidienne.

10. Démontrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

11. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker \phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \phi_A$.

12. *Un cas d'égalité*
On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

(a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soient $B \in \ker \phi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.
Démontrer que si $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ alors $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

(c) En déduire $\ker \phi_A$.

13. *Cas où u est diagonalisable*
On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leq p \leq n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k.
On note m_k la dimension de cet espace propre.

(a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.
Démontrer que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

(b) En déduire que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces
propres de u, a une forme que l'on précisera.

(c) Préciser la dimension de $\ker \phi_A$.

(d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

Partie IV. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$).
On note π_B le polynôme minimal de B et d son degré.

12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.
13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\phi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.
14. Démontrer que le polynôme $X\pi_B' - d\pi_B$ est le polynôme nul (π_B' étant le polynôme dérivé du polynôme π_B).
15. En déduire que $B^d = 0$.

Jeudi 3 avril (3h)

Sujet 5 (Compilation autour des matrices stochastiques)

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
• $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On identifie un élément de $x \in \mathbb{K}^n$ à une matrice colonne et si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on note

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est **stochastique** si elle vérifie les propriétés suivantes.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on note

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

Cette quantité s'appelle le rayon spectral de A.

Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi P_X de X au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

(1) $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}^+$

(2) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On « rappelle » qu'une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si chacune des n^2 suites complexes définies par les coefficients de A_p converge vers les coefficients respectifs de B.

On montrerait aussi que si $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(A'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices convergeant respectivement vers B et B' alors les suites $(A_p + A'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(A_p A'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $B + B'$ et BB'.

Préliminaire :

Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Démontrer l'équivalence suivante.

$$AX = X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

2. En déduire que si $A \in \mathcal{S}_n$ alors 1 est valeur propre de A.
3. Déduire aussi de la première question que $\mathcal{S}_n$ est stable par le produit matriciel.
4. Montrer aussi que si $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n$ et si λ_1, λ_2 sont des réels positifs vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, alors $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ est dans $\mathcal{S}_n$.

Partie I : exemples en dimensions 2 et 3

1. Cas où $n = 2$: Soit $A \in \mathcal{S}_2$.

   (a) Justifier qu'il existe des réels $a, b \in [0,1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer A^p dans le cas où $(a,b) = (1,1)$, puis dans le cas où $(a,b) = (0,0)$.

   (c) On suppose désormais que $(a,b) \neq (1,1)$ et que $(a,b) \neq (0,0)$.

      i. On pose $P(X) = (X-1)(X-(a+b-1))$. Calculer $P(A)$.

      ii. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^p par P.

      iii. En déduire l'expression de A^p en fonction de a, b et p.

      iv. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

2. Un exemple où $n = 3$: Soit $\alpha \in [0,1[$. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que M est une matrice stochastique.

   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.
   La matrice M est-elle diagonalisable ?

   (c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ et $\mathrm{Im}(M - I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$.

   (d) On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Déterminer la matrice dans cette base, de la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(M - I_3)$.

   (e) Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

   (f) Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer T^p et montrer que la suite $(T^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

   (g) En déduire que la suite $(M^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

Partie II : exemples de matrices stochastiques symétriques

1. Un exemple où $n = 3$: On considère E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2$$

   On définit également $U = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = I_3 - U$.

   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on précisera une base et la dimension.

   (b) Démontrer que (U, V) est une base de E et déterminer les coordonnées de $M(a,b)$ dans cette base.

   (c) Calculer U^2, V^2, UV et VU.

   (d) En déduire l'expression de $M(a,b)^p$ en fonction de p, U et V.

   (e) A quelles conditions portant sur a et b la matrice $M(a,b)$ appartient-elle à $\mathcal{S}_3$?

   (f) On suppose cette condition vérifiée.
   Montrer que la suite $(M(a,b)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

2. Soit $n \geq 3$ un entier.

On considère ici la matrice de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer un réel a_n différent de 1 tel que $N - a_n I_n$ ne soit pas inversible.
Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Ker}(N - a_n I_n)$?

(b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(N - I_n)$.

(c) Déduire des questions précédentes les valeurs propres et les sous-espaces propres de N.
La matrice N est-elle diagonalisable ?

(d) Démontrer que $\mathrm{Im}(N - I_n) = \mathrm{Ker}(N - a_n I_n)$ et en préciser une équation cartésienne.

(e) On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Déterminer la matrice J dans cette base, de la projection sur $\mathrm{Ker}(N - I_n)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(N - I_n)$, puis la matrice K dans cette base, de la projection sur $\mathrm{Im}(N - I_n)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(N - I_n)$.

(f) Exprimer N en fonction de n, J et K, en déduire N^p en fonction de p, n, J et K.

(g) Montrer que la suite $(N^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

Partie III : étude du cas général

Dans cette partie, on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme suivante.

$$\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \qquad \|X\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Dans tout la suite du problème, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice stochastique.

1. Etude des éléments propres de A :

(a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on a $\|AX\| \leq \|X\|$.
En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.

(b) Soit Y un élément de $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ pour lequel il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y = AX - X$.

i. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $A^p X$ en fonction de p, X et Y.

ii. Montrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $p\|Y\| \leq 2\|X\|$ et en déduire que Y est nul.

(c) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathbb{C}^n$.

(d) Etablir que tout sous-espace propre associé à une valeur propre différente de 1 est inclus dans $\mathrm{Im}(A - I_n)$.

2. Etude de la convergence de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$:

(a) On suppose, dans cette question, que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B.

i. Démontrer que $B^2 = B$.

ii. Démontrer que A n'admet pas de valeur propre de module 1 autre que 1.

(b) On suppose désormais que A est diagonalisable.

i. Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés au valeurs propres distinctes de 1 est égale à $\mathrm{Im}(A - I_n)$.

ii. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de A dont le module est égal à 1.

iii. On suppose que cette condition est vérifiée et on note B la limite de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Donner la nature géométrique de B et déterminer ses éléments caractéristiques.

La suite est un extrait de CCINP PSI. Certaines questions ont déjà été posées, parfois sous une forme différente. Plusieurs questions apparaissent dans des sujets Centrale.

IV - Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique (respectivement strictement stochastique) si et seulement si elle est à coefficients positifs (respectivement strictement positifs) et

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

Coefficients

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique). Montrer que pours tous i, j compris entre 1 et n on a

$$0 \leq a_{i,j} \leq 1 \ \ \text{(respectivement } 0 < a_{i,j} < 1\text{)}$$

2. Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre associé.
3. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques (respectivement strictement stochastiques) est une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique).

Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$
2. Montrer que $\rho(A) = 1$.

Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que
$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$
2. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

1. On désigne par $A_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de $A - I_n$?
2. Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.
3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.

V - Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de lafaçon suivante : si elle se trouve au point i, elle y reste avec une probabilité égale à $1/10$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position X_0 en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de X_n.

1. Montrer qu'il existe une matrice Q, que l'on déterminera, telle que

$$P_1 = QP_0$$

   calculer P_n en fonction de Q et P_0.

2. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$, que l'on déterminera, tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, 4\},\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{4} p_i = 1,\ \Pi = Q\Pi$$

Rapidité de convergence

1. Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q.
3. En déduire que $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π et qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que

$$\|Q^p - R\| = O(r^p)$$

   où $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

   En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu.

VI - Puissances d'une matrice stochastique

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i, j) de A^p :

$$A^p = (a_{i,j}^{(p)})_{1\leq i,j\leq p}$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n, on note

$$m_j^{(p)} = \min_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)},\ M_j^{(p)} = \max_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)}$$

1. **Encadrement**

   Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

2. **Minoration**

   Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) \ \text{ et } \ M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

3. **Majoration**
   Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :
$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$
4. **Convergence de ces suites**
   En déduire que, pour tout j entre 1 et n, les suites $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
5. **Conclusion**
   En déduire que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochatique dont toutes les lignes sont identiques.

Vendredi 4 avril matin (2h)

Sujet 6 (Centrale PC 2023 maths 1)

Notations
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On utilisera les notations matricielles classiques :

— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles à n lignes ;

— 0_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls ;

— $S_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques ;

— $\text{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_1, \ldots, a_n$ dans cet ordre ;

— $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A ;

— $\text{sp}(A)$ désigne le spectre réel de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A.

Les éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont assimilés à des réels.
Avec ces notations, le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $(U \mid V) = U^\top V$.
On note $\|U\|$ la norme euclidienne canonique de $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On suppose que, pour tout $p \in]0,1[$, il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes définies sur Ω.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω, on note $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\text{cov}(X,Y)$ respectivement l'espérance de X, la variance de X et la covariance de X et Y, lorsqu'elles sont définies.

On rappelle la formule
$$\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Définition

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthodiagonalisable* s'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^T$.
Orthodiagonaliser A revient à déterminer un couple de telles matrices (D, P).

I - Généralités sur les matrices symétriques réelles

1. Démontrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

I.A - *Un exemple dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. En observant la première et la dernière colonne de A_1, déterminer un vecteur propre de A_1 et la valeur propre λ_1 associée.
2. Déterminer le sous-espace propre de A_1 associé à la valeur propre λ_1 et en déduire le spectre de A_1.
3. Orthodiagonaliser A_1.

I.B - *Un exemple dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application $\phi : (P, Q) \mapsto \phi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Écrire la matrice H de ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire la matrice de terme général $h_{i,j} = \phi(X^i, X^j)$ où les indices i et j varient entre 0 et $n-1$.
3. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer le produit $U^T HU$ à l'aide de ϕ et des coefficients de U.
4. Montrer que H appartient à $S_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont strictement positives.

I.C - *Rayon spectral*
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de spectre non vide, le *rayon spectral* de A, noté $\rho(A)$, est défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|.$$

1. Montrer que, si A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$, alors le rayon spectral de A est nul.
2. On note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^T U = 1\}$. Démontrer que C est une partie fermée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. En déduire que l'application : $U \mapsto |U^T AU|$ admet un maximum sur C.
4. Montrer que $\rho(A) \leq \max\limits_{U \in C} |U^T AU|$.

I.D - *Rayon spectral d'une matrice symétrique*
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\rho(A) = \max\limits_{U \in C} |U^T AU|$.

On suppose de plus que les valeurs propres de A sont toutes positives.

1. Montrer alors que $\rho(A) = \max\limits_{U \in C} (U^T AU)$.
2. Démontrer que l'application ρ définit une norme sur $S_n(\mathbb{R})$.

II - Matrice de covariance

Dans la suite du problème, on considère n variables aléatoires discrètes $Y_1, ..., Y_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles et on définit la fonction Y de Ω dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{pmatrix} Y_1(\omega) \\ \vdots \\ Y_n(\omega) \end{pmatrix}.$$

Un tel vecteur aléatoire est dit *constant* si la fonction Y est constante.
Si chacune des variables aléatoires discrètes Y_i admet une espérance finie, on définit le vecteur espérance de Y en posant

$$\mathbb{E}(Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y_n) \end{pmatrix}.$$

Si toutes les covariances existent, la *matrice de covariance* de Y est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée Σ_Y, de terme général $\sigma_{i,j} = \operatorname{cov}(Y_i, Y_j)$.

La *variance totale* de Y est définie par $\mathbb{V}_T(Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i)$.

Dans la suite du problème, on suppose que $\mathbb{E}(Y)$ et Σ_Y sont bien définies.

II.A
On admet que Y est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On admet aussi que $(Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^\top$ est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont l'espérance, par définition, est également calculée terme à terme.

1. Vérifier que Σ_Y est une matrice symétrique, que

$$\Sigma_Y = \mathbb{E}\Big((Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^\top\Big)$$

   et que, si U est un vecteur constant dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y.$$

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $Z = MY$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Justifier que Z admet une espérance et exprimer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$. Montrer que Z admet une matrice de covariance Σ_Z et que

$$\Sigma_Z = M \Sigma_Y M^\top.$$

II.B – *Propriété des valeurs propres*
On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à une base orthonormée formée de vecteurs propres de Σ_Y.

On définit la variable aléatoire discrète $X = P^\top Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que Σ_X est une matrice diagonale.
2. En déduire que les valeurs propres de Σ_Y sont toutes positives.
3. Montrer que la variance totale de X est égale à celle de Y.

II.C – *Étude de la réciproque*
Soit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux λ_i sont tous positifs.

1. Montrer l'existence d'une variable aléatoire discrète Z à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Z = D$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives.

1. Démontrer l'existence d'une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A$.

II.D - Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit la variable aléatoire discrète $X = U^\top Y$.

1. Montrer que X admet une variance et que
$$\mathbb{V}(X) = U^\top \Sigma_Y U.$$

II.E – *Image de* Σ_Y

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que
$$\mathbb{P}(Y - \mathbb{E}(Y) \in \mathrm{Im}\Sigma_Y) = 1.$$

On note r le rang de la matrice de covariance de Y.

1. Traiter le cas où $r = n$.

On suppose maintenant $r < n$.

1. Montrer que le noyau et l'image de Σ_Y sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $d = \dim(\ker \Sigma_Y)$ et on considère une base orthonormée $(V_1, \dots, V_d)$ de $\ker \Sigma_Y$.

1. Démontrer que
$$\forall j \in [\![1, d]\!], \quad \mathbb{V}\Big(V_j^\top (Y - \mathbb{E}(Y))\Big) = 0.$$
2. En déduire que $\mathbb{P}\Big(V_j^\top (Y - \mathbb{E}(Y)) = 0\Big) = 1$.
3. Conclure.

III - Maximisation de la variance

Les notations sont celles de la partie II. On cherche un vecteur U unitaire tel que la variance de $U^\top Y$ soit maximale.

Comme en I.C, on note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$.

On note q_Y l'application de C dans $\mathbb{R}$ définie par $q_Y(U) = \mathbb{V}(U^\top Y)$.

III.A – *Un exemple dans* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

On pose $A_2 = \mathrm{diag}(9, 5, 4)$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur aléatoire dont A_2 est la matrice de covariance.
2. Dans cette question uniquement, on suppose que Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\Sigma_Y = A_2$. Déterminer le maximum de q_Y sur C.

III.B – *Cas général*

1. Dans le cas général, démontrer que la fonction q_Y admet un maximum sur C. Préciser la valeur de ce maximum ainsi qu'un vecteur $U_0 \in C$ tel que
$$\max_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y) = \mathbb{V}(U_0^\top Y).$$

III.C – *Étude d'un exemple*

On suppose, dans cette sous-partie III.C uniquement, que Σ_Y vérifie
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sigma_{i,i} = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies \sigma_{i,j} = \sigma^2 \gamma$$
où σ et γ sont deux réels strictement positifs.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Montrer que $\gamma \leq 1$ et exprimer Σ_Y en fonction de J.
2. Déterminer les valeurs propres de J et la dimension de chaque sous-espace propre associé. Déterminer également un vecteur propre associé à sa valeur propre de module maximal.
3. Préciser un vecteur U_0 unitaire tel que la variance de $Z = U_0^\top Y$ soit maximale.
4. Calculer le pourcentage de la variance totale représenté par Z, c'est-à-dire le rapport $\dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{V}_T(Y)}$.

III.D - On suppose, dans cette dernière sous-partie, que Σ_Y présente n valeurs propres distinctes qu'on classe par ordre strictement décroissant $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$.

On se munit d'un vecteur U_0 tel que $\mathbb{V}(U_0^\top Y) = \max\limits_{U \in C} \mathbb{V}(U^\top Y)$.

On note
$$C' = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1 \text{ et } U_0^\top U = 0\}.$$

1. Justifier que q_Y admet un maximum sur C'.
2. Déterminer la valeur de ce maximum et préciser un vecteur $U_1 \in C'$ tel que
$$\max_{U \in C'} \mathbb{V}(U^\top Y) = \mathbb{V}(U_1^\top Y).$$
3. Calculer la covariance des variables aléatoires discrètes $U_0^\top Y$ et $U_1^\top Y$ (pour simplifier l'écriture, on pourra supposer Y centrée, c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y) = 0$).

Vendredi 4 avril après-midi (2h)

Sujet 7 (E3A PSI 2020 exercice 3)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$.

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.
2. Soient α et β deux réels et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.
3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

   3.1. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

   3.2. Exprimer l'évènement $(X_1 = X_2)$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

   3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

   $$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega) - X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega) - X_3(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & X_2(\omega) - X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

   On notera ainsi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}$ la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

   Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.
4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.

   4.1. Calculer $\mathbf{tr}(A^T A)$ en fonction des coefficients de la matrice A où $\mathbf{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.

   4.2. On suppose dans cette question que A est une matrice symétrique réelle.

   Démontrer que $\mathbf{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes ou non de A.

   4.3. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Sujet 8 (CCINP PSI 2018 problème 2)

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif
Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbb{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|X| \geq \alpha\big) \leq \frac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\big(S_n \geq \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(\mathrm{e}^{tnS_n} \geq \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\big) \leq \frac{\big(\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)\big)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$.

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-a}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q36. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1, 1],\ \mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

Q37. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leq \mathrm{ch}t.$$

Q38. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathrm{e}^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement est que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

Q43. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \{\omega \in \Omega\,;\ \lim_{n \to \infty} S_n(\omega) = 0\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Sujet 9 (E3A PSI 2024 Exercice 1)

Soit n un entier naturel non nul. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On pose, pour tout $\omega \in \Omega$: $A(\omega) = \begin{pmatrix} Y(\omega) & 0 \\ 2 & Z(\omega) \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$.
   (b) En remarquant que $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer le coefficient précédent d'une autre manière.
   (c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a et c la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$.
   On utilisera la question 1c pour simplifier le résultat.
4. Calculer la probabilité de l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est inversible}\}$.

Sujet 10 (E3A PC 2024 Exercice 2)

On considère une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. **Questions de cours**
   (a) Rappeler sans démonstration la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Écrire les développements en séries entières des fonctions **sh** et **ch** ainsi que leurs domaines de validité.
   (c) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω.
   Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X et définie par :

$$Y = 0 \text{ si } X \text{ est paire et } Y = 1 \text{ si } X \text{ est impaire.}$$

   (a) Exprimer les événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 1\}$ à l'aide d'événements $\{X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la loi de Y et son espérance.
   On donnera les résultats en utilisant les fonctions **exp**, **sh** et **ch**.

3. Soit Z une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X, indépendante de X et telle que :

$$Z(\Omega) = \{1, 2\} \text{ avec } \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

   On pose $T = XZ$.
   (a) Préciser $T(\Omega)$.
   (b) Soit k un entier naturel.
   En utilisant le système complet d'événements $(\{Z = 1\}, \{Z = 2\})$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(T = k)$ à l'aide de probabilités d'événements $\{X = j\}$ et $\{2X = j\}$ où $j \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer la loi de T.
   (d) Quelle est la probabilité que T prenne des valeurs paires ?
   On donnera le résultat en utilisant les fonctions **exp**, **sh** et **ch**.

Sujet 11 (MinesPonts MP 2020 maths 2)

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d-uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est à dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas* X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne revient jamais en 0_d, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k,\ k \in \{0, \dots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $\mathbb{E}(N_n)$ de la variable aléatoire N_n.
La partie D est indépendante des parties précédentes.

A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans les parties C et E.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation
$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$$
montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
2. Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que
$$\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} c \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$
3. Si $\alpha \in]0,1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$
Si $\alpha > 1$, montrer de même que
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$
4. Pour $x \in [2, +\infty[$, on pose
$$I(x) = \int_2^x \frac{t}{\ln(t)}$$
Justifier, pour $x \in [2, +\infty[$, la relation
$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{t}{(\ln(t))^2}$$
Établir par ailleurs la relation
$$\int_2^x \frac{t}{(\ln(t))^2} \underset{x \to +\infty}{=} o(I(x))$$
En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$.
Justifier la formule :
$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules
$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0_d) x^n$$
$$\forall x \in]-1,1[,\ G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n) x^n$$

6. Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe ∞ sur $]-1,1[$.
Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que

$$G(1)=\mathbb{P}(R\neq+\infty)$$

7. Si k et n sont des entiers naturels tels que $k\leqslant n$, montrer que

$$\mathbb{P}((S_n=0_d)\cap(R=k))=\mathbb{P}(R=k)\mathbb{P}(S_{n-k}=0_d)$$

En déduire que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n=0_d)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(R=k)\mathbb{P}(S_{n-k}=0_d)$$

8. Montrer que

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\ F(x)=1+F(x)G(x)$$

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x\to 1^-$, en discutant selon la valeur de $\mathbb{P}(R\neq+\infty)$.

9. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_kx^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{k=0}^{+\infty}c_kx^k=+\infty$$

L'élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que

$$\forall x\in]1-\alpha,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty}c_kx^k>A$$

10. Montrer que la série $\sum\mathbb{P}(S_n=0_d)$ est divergente si et seulement si $\mathbb{P}(R\neq+\infty)=1$.

11. Pour $i\in\mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i\notin\{S_k,\ 0\leqslant k\leqslant i-1\})$$

Montrer que, pour $i\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y_i=1)=\mathbb{P}(R>i)$$

En déduire que, pour $n\in\ \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(N_n)=1+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R>i)$$

12. Conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(N_n)}{n}=\mathbb{P}(R=+\infty)$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergeant vers le nombre réel ℓ, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\ell$$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d = 0$.
Par ailleurs, $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -1) = q$$

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$ et justifier l'égalité

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n$$

14. Pour $x \in]-1, 1[$, donner une expression simple de $G(x)$.
    Exprimer $\mathbb{P}(R = +\infty)$ en fonction de $|p - q|$.
    Déterminer la loi de R.
15. On suppose que

$$p = q = \frac{1}{2}$$

    Donner un équivalent simple de $\mathbb{P}(R = 2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent simple de $\mathbb{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Un résultat asymptotique

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

16. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n$. Montrer que

$$a_n \leqslant \frac{1}{B_n} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n})$$

17. On suppose dans cette question qu'il existe $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $m_n > n$ pour n assez grand et

$$B_{m_n - n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n \quad \text{et} \quad B_{m_n} - B_{m_n - n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

    Montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}$$

18. On suppose dans cette question qu'il existe $C > 0$ tel que

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$$

    En utilisant la question 17 pour une suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien choisie, montrer que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)}$$

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvorestsky

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0_d)\mathbb{P}(R > n - k)$$

Dans les questions 20 et 21, on suppose que $d = 2$ et que la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = (0,1)) = \mathbb{P}(X = (0,-1)) = \mathbb{P}(X = (1,0)) = \mathbb{P}(X = (-1,0)) = \frac{1}{4}$$

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'égalité

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2$$

21. Donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.