1 - Révisions sur les polynômes

Programme de Colles

Rappels sur les polynômes :

1. Loi usuelles : $., +, \times, \circ$
2. Degré : définition, propriétés.
3. Multiples et diviseurs.
4. Dérivation, formule de Taylor.
5. Racines : définition, multiplicité, relations coefficients/racines (pas de formule générale au programme).
6. Décomposition en produits de facteurs irréductibles (dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$).

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de $P_n(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.

(E1) : On considère une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Déterminer le degré de T_n, son terme dominant et sa parité.

(E1) : Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $X^2 - 2X + 1$.

(E1) : Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - 1$.

(E1) : On considère le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-2)\dots(X-n)$.
Démontrer que $P'(X)$ possède une unique racine dans $]0,1[$.

Niveau 2 :

(E2) : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que : $\quad B = X^2 + X + 1$ divise $P \iff P(j) = 0$.

(E2) : Déterminer les racines de $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux d'entre elles vaut la troisième.

Niveau 3 :

2 - Révisions sur les complexes

Programme de Colles

Rappels sur les complexes :

1. Définitions (construction de $\mathbb{C}$ hors-programme), parties réelle et imaginaire, module, conjugué, propriétés.
2. Affixe d'un point, d'un vecteur, inégalité triangulaire, équation d'un cercle.
3. Nombres complexes de module 1 et trigonométrie, définition de $e^{i\theta}$, propriétés, formule de Moivre, formules d'Euler, méthode de l'arc moitié, application au calcul de sommes.
4. Forme trigonométrique, forme exponentielle d'un complexe non nul, argument, propriétés.
5. Racines n-ième de l'unité ou d'un complexe non nul, racines carrées (forme algébrique ou complexe), équations de degré 2.
6. Exponentielle complexe, définition, propriétés.
7. Nombres complexes et géométrie, condition portant sur les affixes pour que A, B, C soient alignés, ou pour que $(AB) \perp (AC)$. Translations, similitudes de centre 0 (le programme se limite là).
8. Applications aux autres chapitres : suites numériques complexes, fonctions complexes dérivables, équations différentielles, intégrales, primitives de fonctions complexes.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$ soit imaginaire pur.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

(E1) : Résolution de $(\mathcal{E})$: $2\cos(t) - 3\sin(t) = 0$.

(E1) : Calculer les racines carrées de $Z = -7-24i$. En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$: $(12-3i)z^2 - 8iz + 32i = 0$.

Niveau 2 :

(E2) : Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on se donne deux points A et B.
Montrer (avec les complexes) qu'un point M appartient au cercle de diamètre $[A, B]$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

Niveau 3 :

3 - Suites Numériques

Programme de Colles

Révisions Sup :

1. Rappels sur la borne supérieure (ou inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ (définition, condition existence, convention $\sup(A) = +\infty$ quand A n'est pas majorée)
2. Suites réelles ou complexes (limites, monotonies, th. d'existence de limite,...), suites adjacentes.
3. Toute suite convergente est bornée **(D1)**.
4. Le terme général d'une suite réelle qui converge vers $\ell > 0$ est strictement positif à partir d'un certain rang.
5. Limites, relations de comparaisons (être *dominé, équivalent, négligeable*).
6. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Suites arithmético-géométriques.
7. Suites définies par une relation $f(u_n) = u_{n+1}$: limites éventuelles quand f est continue **(D1)**, utilisation de l'inégalité des accroissements finis, monotonie :
   — étude du signe de $f(x) - x$,
   — si la fonction f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone **(D1 dans le cas $u_0 \leq u_1$)**.
8. Exemples de suites définies implicitement comme solution d'équation, ou comme intégrale, développements asymptotiques.

Remarque : les fonctions hyperboliques réciproques ne sont plus au programme.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit $L \in]0,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique vérifiant $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Niveau 2 :

Niveau 3 :

(E3) : Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer les équivalences suivantes :

$$(1) \quad \alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leq \alpha \\ \text{ et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A, \quad \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leq \alpha \\ \text{ et} \\ \text{ il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ d'éléments de } A, \text{ telle que } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha. \end{cases}$$

(E3) : Écrire avec les quantificateurs les définitions suivantes (a est un réel).

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$
3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
4. $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$
5. $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$
6. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

(E3) : Énoncer et démontrer le théorème de Cesàro.

4 - Séries Numériques

Programme de Colles

Séries numériques, généralités :

1. Définition, terme général, somme partielle d'ordre n.
2. Nature d'une série numérique, somme d'une série convergente.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique, on a : $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge $\iff$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge .
4. Structure de $\mathbb{K}-$espace vectoriel, sous-espace des séries convergentes.
5. Reste partiel d'ordre n d'une série convergente, il tend vers 0 quand $n \to +\infty$ **(D1)**.
6. Le terme général d'une série convergente tend vers 0 mais la reciproque est fausse **(D1)**.
7. Définition d'une série géométrique, expression de la somme partielle d'ordre n, nature et expressions, en cas de convergence, de la somme et du reste partiel d'ordre n.

Séries à termes positifs :

1. Définition, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante (deux cas se présentent : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée ou non).

   Convention : Si $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, on peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.
2. Théorèmes de comparaisons relatifs aux séries à termes positifs :
   (a) Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang (par exemple si $u_n = o(v_n)$)
   $$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge}$$
   $$\sum u_n \text{ diverge} \implies \sum v_n \text{ diverge}$$
   (b) Si $u_n = O(v_n)$: $\sum v_n$ converge $\implies$ $\sum u_n$ converge
   (c) Si $u_n \sim v_n$: $\sum v_n$ converge $\iff$ $\sum u_n$ converge
3. Application aux séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$.
4. Règle de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs.

Séries à termes quelconques :

1. Série à termes complexes.
2. Théorème des séries alternées, encadrement de la somme par les sommes partielles d'indices pairs et impairs (les suites sommes partielles d'indices pairs et d'indices impairs sont adjacentes), signe et majoration en valeur absolue du reste partiel.
   Exemples : séries de Riemann alternées, exemples d'utilisation de développements asymptotiques.
3. Une série absolument convergente est convergente. Suite sommable, notation $\sum |u_n| < +\infty$.

   Convergence absolue des séries géométrique et exponentielle.

   Théorème de comparaison : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique (réelle ou complexe) et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes **positifs**. Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
4. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
   Application : $\forall (z+z') \in \mathbb{C},\ e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ **(D1)**.

Calculs pratiques :

1. Séries de Bertrand : aucun résultat n'est au programme. Il faut savoir les étudier.
2. Encadrements à l'aide d'intégrales : « *Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone.* »

   Aucun théorème n'est au programme. Plusieurs exemples ont été rédigés en classe.

Remarque : La formule de Stirling a été donnée et peut-être demandée. Sa démonstration n'est pas au programme.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, puis montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.

(E1) : Nature de la série harmonique (par utilisation des théorèmes de comparaison).

(E1) : Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

(E1) : Nature de la série harmonique par utilisation des théorèmes de comparaison.

(E1) : Nature des séries $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ et/ou $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2(n)}$.

(E1) : Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ par comparaison à une intégrale.

Niveau 2 :

(E2) : Démontrer que $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge. Quel est le signe de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$?

Etudier la nature de la série de terme général $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

(E2) : Nature des séries de Bertrand $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ dans les cas où $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$.

(E2) : Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ et un équivalent de $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(E2) : Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Niveau 3 :

(E3) : Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha}$.

(E3) : Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

(E3) : Au choix de l'étudiant, l'un des deux exercices suivants.

- Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ telles que $b_n \geq 0$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$.

  Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.

- Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ telles que $b_n \geq 0$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$.

  Montrer que si $\sum b_n$ diverge, alors on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$.

(E3) : Démontrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}\sin(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et en déduire la convergence $\displaystyle\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

5 - Rappels sur l'intégration

Programme de Colles

Rappels sur l'intégration :

1. Fonction continue par morceaux, intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés.
2. Primitive et intégration : théorème fondamental. Etude des fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.
3. Intégration par parties. Changement de variable.
4. Rappels sur les sommes de Riemann (pas constant).
5. Si f continue et positive sur $[a, b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $\forall t \in [a, b],\ f(t) = 0$ **(D1)**.
6. Formule de Taylor avec reste intégrale **(D1)**. Formule de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young.
7. Quelques techniques de calcul : intégrales de fractions rationnelles, de $x \longmapsto e^{\alpha x}P(x)$ et de $x \longmapsto e^{\alpha x}\sin(ax)$ ou $e^{\alpha x}\cos(ax)$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Calculs d'intégrales du type $\int P(x)e^{\alpha x}$ ($P(X)$ polynôme), $\int \cos(ax)e^{\alpha x}dx$, $\int \sin(ax)e^{\alpha x}dx$.
(E1) : Calculs d'intégrales de fractions rationnelles.
(E1) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue et T périodique.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)du = \int_0^T f(u)du$.

Niveau 2 :

Niveau 3 :

6 - Intégrales impropres

Programme de Colles

Convergence des intégrales impropres (ou généralisées) :

1. Intégrale impropre sur $]a,b]$ ou sur $[a,b[$. Convergence, divergence, exemples.
2. Intégrale faussement impropre (i.e cas où la fonction intégrée est prolongeable en une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$).
3. Intégrales de références :
$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \qquad \int_0^1 \ln(t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt.$$
4. Intégrale impropre sur $]a,b[$.
5. Propriétés : linéarité, relation de Chasles.
6. Précautions de calculs :
   - intégration par parties : on revient sur un segment ou on travaille directement avec l'intégrale impropre en précisant soigneusement l'existence des limites.
   - changement de variable : on se ramène sur un segment puis on passe à la limite ou on utilise le théorème de changement de variable pour une intégrale impropre (φ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone).
7. Intégrales à valeurs dans $\mathbb{C}$: $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt$ convergent.

Intégrales de fonctions positives :

1. Monotonie, si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et positive, alors $F : X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(t)dt$ est croissante.
   Deux cas possibles : F majorée ou $\displaystyle\lim_{X\to b} F(X) = +\infty$.
2. Théorèmes de comparaisons : Comparaison de la nature de $\displaystyle\int f$ et de $\displaystyle\int g$ dans les cas $f \leq g$ (et donc $f = o(g)$), $f = O(g)$ et $f \sim g$. Cas de convergence et de divergence.
3. Intégrale impropre absolument convergente. Absolument convergente $\Longrightarrow$ Convergente.
   Mais la réciproque est fausse. Intégrale semi-convergente.

Fonctions intégrables :

1. Fonctions intégrables (contient le caractère continu par morceaux), notation $\displaystyle\int_I f(t)dt$.
2. Adaptation des théorèmes de comparaisons.
3. Propriétés :
   - Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
   - Si f est intégrable sur I, alors elle l'est sur tout intervalle $J \subset I$.
   - Si f est **continue** et intégrable sur I on a $\displaystyle\int_I |f(t)|dt = 0 \implies \forall t \in I,\ f(t) = 0$.

Intégrales dépendant d'un paramètre :

1. Cas où le paramètre est dans les bornes (y compris pour des intégrales impropres).
2. Théorème de continuité sous le signe $\int$ **(Admis)**. Cas où l'on doit restreindre l'hypothèse de domination.

3. Théorème de convergence dominée à paramètre continu **(Admis)**.
4. Théorème de dérivabilité ($\mathcal{C}^1$) sous le signe $\int$ **(Admis)**. Formule de Leibniz. Cas où l'on doit restreindre l'hypothèse de domination.
5. Dérivées d'ordres supérieurs.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Nature et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

(E1) : Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge, puis la calculer.

(E1) : Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ est convergente, puis à l'aide d'un changement de variable, qu'elle vaut 0.

(E1) : Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

(E1) : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et démontrer que Γ est strictement positive.

(E1) : Soit $f : [0,+\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ lorsque (et/ou au choix de l'examinateur) :

1. f est bornée.
2. f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

On justifiera l'existence de l'intégrale.

Niveau 2 :

(E2) : Nature selon $x \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt$.

(E2) : Nature selon $\alpha \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha(t)dt$.

(E2) : Démontrer que la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0+\infty[$.

Niveau 3 :

(E3) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{1+t}dt$.

Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$? Déterminer de deux façons un équivalent u_n quand n tend vers $+\infty$.

(E3) : Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

7 - Révisions et compléments d'algèbre linéaire

Programme de Colles

Espaces vectoriels :

1. Définition, exemples, s.e.v.
2. Produit d'espaces vectoriels (en nombre fini).
3. Sommes de n s.e.v.
   - la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.
     (i) Pour toutes familles $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, on a :
     $$u_1 + \cdots + u_n = v_1 + \cdots + v_n \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_i = v_i.$$
     (ii) Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, on a :
     $$u_1 + \cdots + u_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad u_i = 0.$$
   - Cas de deux s.e.v : $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ **(D1)**.
   - Famille finie de sous-espaces supplémentaires.

Familles de vecteurs

1. Famille génératrice **finie**, famille libre **finie**, base (exemples). Unicité de la décomposition dans une base.
2. Espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice finie on peut extraire une base, théorème de la base incomplète, existence de base dans un espace vectoriel de dimension finie.
3. Dimension (cardinal d'une base), cardinal d'une famille libre, cardinal d'une famille génératrice, équivalence entre libre, génératrice et base quand la famille est de cardinal $\dim(E)$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel :

1. Si F sev de E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. Cas d'égalité.
2. Base adaptée à $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$, dimension de $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
3. Existence de supplémentaire d'un espace vectoriel de dimension finie (admis dans le cas où E n'est pas de dimension finie).
4. Dimension de $F + G$.
5. Si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, alors on a $E = F \oplus G \Longleftrightarrow F \cap G = \{0\} \Longleftrightarrow E = F + G$.
6. Dimension du produit d'espaces vectoriels de dimension finie.

Applications linéaires :

1. Définition de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, endomorphisme, forme linéaire, isomorphisme, automorphisme, noyau (lien avec l'injectivité), image (lien avec la surjectivité)
2. Bases et applications linéaires : une application linéaire est complétement définie par l'image d'une base. Soient E un $\mathbb{K}-$e.v. de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, F un $\mathbb{K}-$e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
   (b) f est surjective $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F,
   (c) f est injective $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F,
   (d) f est un isomorphisme $\Longleftrightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

3. Rang d'une application linéaire :
   - Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ (quand elles ont un sens), cas d'égalité.
   - $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(f),\mathrm{rg}(g)\}$, conservation du rang par composition par un isomorphisme à gauche ou à droite **(D3)**.
   - Si $G \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$ alors la restriction de f à G définit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(f)$ et formule du rang **(D2)**.
4. Caractérisation des isomorphismes : si E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels même dimension $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a
$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est un isomorphisme } \iff \mathrm{rg}(f) = n.$$
5. Polynômes d'endomorphismes, relation $(PQ)(u) = P(u)Q(u)$, polynôme annulateur, deux polynômes d'un même endomorphisme u commutent, le noyau de $P(u)$ est stable par u.

Endomorphismes particuliers :

1. Projecteurs ou projection (définition géométrique), caractérisation par $p \circ p = p$.
   Égalité $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ (même quand E n'est pas de dimension finie).
   Matrice d'un projecteur dans une bonne base.
2. Symétries (définition géométrique), caractérisation par $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Égalité $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ (même quand E n'est pas de dimension finie).
   Matrice d'une symétrie dans une bonne base.

Hyperplans :

1. Définition : Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
2. F est un hyperplan si et seulement si il admet une droite vectorielle pour supplémentaire dans E.
3. En dimension finie : F est un hyperplan si et seulement si il est de dimension $n-1$.
   Équation cartésienne d'un hyperplan.

Polynômes de Lagrange :

1. Isomorphisme $\varphi :\ P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto \Big(P(a_0), \dots, P(a_n)\Big) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts **(D1)**.
2. Base de Lagrange $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ (expression, lien avec φ), expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base, expression de $L_0 + \cdots + L_n$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Montrer que le sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions paires et le sous-espace $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont supplémentaires dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(E1) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $f_i : x \longmapsto e^{\alpha_i x}$.
Montrer que $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ est une famille libre de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(E1) : Savoir trouver la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

(E1) : Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts et $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ la base de Lagrange associée à $a_0, \dots, a_n$.

1. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
2. Reconnaitre $L_0(X) + \cdots + L_n(X)$ et $a_0 L_0(X) + \cdots + a_n L_n(X)$

Niveau 2 :

(E2) : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$. Montrer que $P.\mathbb{K}[X]$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ puis que $P.\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

(E2) : Soit E un$\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u^n comme combinaison linéaire de u et de Id_E.

Niveau 3 :

(E3) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $E_1, \ldots, E_n$ des s.e.v. de E. On a l'équivalence suivante.

$$\text{La somme } E_1 + \cdots + E_n \text{ est directe} \quad \iff \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ E_i \cap \left(\sum_{j \neq i} E_j\right) = \{0\}.$$

(E3) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'implication suivante.

$$\Big(\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \underbrace{\forall x \in E, u(x) = \lambda x}_{\text{i.e } u = \lambda \mathrm{Id}_E}\Big)$$

8 - Calcul matriciel et déterminant

Programme de Colles

Calcul Matriciel (rappels et compléments) :

1. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, produit matriciel, inverse (définition et caractérisations), puissances de matrices (formule du binôme de Newton).
2. Polynômes de matrices, relation $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$, polynôme annulateur, deux polynômes d'un même endomorphisme A commutent.
3. Matrice de vecteurs, matrice de passage, matrice d'applications linéaires. Formules de changement de bases. Matrice de l'inverse, de la composée.
4. Recherche pratique de noyaux et d'images en petites dimensions.
5. Matrices semblables.
6. Application trace :
   (a) Définition de la trace d'une matrice, linéarité.
   (b) Propriété fondamentale : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ **(D1)**.
   (c) Trace d'un endomorphisme.

Déterminants :

1. Applications p-linéaires :
   (a) Définitions, formes p-linéaires alternées, antisymétriques. Equivalence entre alternée et antisymétrique.
   (b) Effet des opérations élémentaires, image d'une famille liée.
   (c) Si E est de dimension n, l'ensemble des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle (admis).
2. Déterminant de n vecteurs dans une base :
   (a) Définition : c'est l'unique forme n-linéaire, alternée qui vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. Notation.
   (b) Lien entre $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$.
   (c) Caractérisation des bases.
3. Déterminant d'une matrice carrée :
   (a) Définition, règle de Sarrus.
   (b) Critère d'inversibilité.
   (c) Propriétés algébriques.
   (d) Effet des transformations élémentaires.
   (e) Développement par rapport à une ligne ou une colonne (admis).
4. Déterminant d'un endomorphisme (définition, propriétés)
5. Déterminant de Vandermonde **(D2)**
6. Déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice triangulaire par blocs.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Savoir trouver une base du noyau, une base de l'image d'une matrice 3×3 sans hésitation.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^n.

(E1) : Calculer le déterminant d'ordre n suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

(E1) : Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad f(M) = 2M +^t M.$$

(E1) : Démontrer rapidement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(E1) : On note $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Démontrer les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!],\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad AU = U \\ &\Longleftrightarrow \quad U \in \operatorname{Ker}(A - I_n) \end{aligned}$$

2. En déduire que l'ensemble des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

Niveau 2 :

(E2) : (sans le déterminant) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A n'est pas inversible, alors M ne l'est pas non plus.
2. Montrer que si A est inversible, alors M l'est aussi et dans ce cas, déterminer M^{-1}.

(E2) : 1. Donner une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sans démonstration). En déduire leurs dimensions respectives.

2. Déterminer le déterminant et la trace de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = 2M + M^T$.

Niveau 3 :

(E3) : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

(E3) : Énoncer et démontrer les formules de Cramer.

(E3) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\operatorname{Com}(A)$ la matrice de ses cofacteurs, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Démontrer que $\operatorname{Com}(A)^T.A = A.\operatorname{Com}(A)^T = \det(A).I_n$.

9 - Réduction

Programme de Colles

Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice :

1. Sous espaces stables, endomorphismes induits, si $u \circ v = v \circ u$ alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v **(D1)**, droites stables (pour $x \neq 0$, on a $D = \text{vect}\{x\}$ est stable par u si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ **(D2)**).
2. Valeurs propres, spectre, sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $E_\lambda(A)$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent alors, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.
4. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres distinctes de u alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe **(D2)**.
5. Conséquence : Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
6. En dimension finie, lien entre les éléments propres de f et ceux de sa matrice dans une base.
7. Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres mais la réciproque est fausse.
8. Exemples : éléments propres d'un projecteur ou d'une symétrie.

Polynôme caractéristique :

1. Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme, d'une matrice : $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n)$. C'est un polynôme unitaire et de degré n (admis dans un premier temps).
2. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
3. Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) sont les racines de son polynôme caractéristique. Conséquences :
   - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres distinctes.
   - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.
4. Multiplicité : définition, propriété : $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$. **(D2)** dans le cas d'un endomorphisme.
   Le sous-espace propre asocié à une valeur propre simple est une droite vectorielle.

Diagonalisation :

1. Définition : $u \in \mathcal{L}(E)$ et diagonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ soit diagonale.
   $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
2. Premier exemple (CS de diagonalisabilité) : Si $\dim(E) = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ on a
$$\begin{array}{rcl} \chi_u \text{ est scindé à racines simples} & \Longrightarrow & u \text{ est diagonalisable.} \\ u \text{ possède } n \text{ valeurs propres distinctes} & \Longrightarrow & u \text{ est diagonalisable.} \end{array}$$
3. CNS de diagonalisabilité : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence entre :
   (1) u est diagonalisable (il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ est diagonale)
   (2) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u.
   (3) $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.
   (4) $\dim(E) = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u))$.
   (5) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$.
4. Résultats analogues pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Trigonalisation :

1. Définition : $u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ et trigonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire.
2. CNS de trigonalisabilité (admise) : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.
3. Conséquences :
   - Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
   - La trace de A est la somme de ses valeurs propres (répétées avec multiplicité) et le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (répétées avec multiplicité).
   - Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I_n) = \lambda^n - \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$

Diagonalisation et polynômes annulateurs :

1. Définition d'un polynôme annulateur et premiers exemples.
2. Lien avec les valeurs propres : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ alors
   - Si $P(A) = 0$ alors : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Longrightarrow P(\lambda) = 0$ **(D1)**
   - Plus généralement : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Longrightarrow P(\lambda) \in \operatorname{Sp}(P(A))$.
   Énoncé analogue pour les endomorphismes.
3. Théorème de Cayley-Hamilton.
4. Secondes CNS de diagonalisabilité : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence entre :
   (1) u est diagonalisable (il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale)
   (2) Le polynôme scindé à racines simples $P_0 = \displaystyle\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u.
   (3) Il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u.
5. Conséquence : si u est diagonalisable, ses endomorphismes induits le sont aussi **(D2)**.

Applications de la réduction :

1. Calcul des puissances de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: soit à partir de la réduction, soit à partir d'un polynôme annulateur.
2. Résolution de systèmes différentiels (seul le cas diagonalisable a été vu en cours).
3. Résolution d'équations matricielles (ex : recherche de commutants, recherche de racines de matrices)

Exercices à connaître :

$\boxed{\textbf{Niveau 1 :}}$

(E1) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrer que si f est de rang 1, alors il possède au moins une valeur propre.
- Montrer que si $x \in E$ est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \operatorname{Im}(f)$.

(E1) : Savoir diagonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 4A^2 + 3A = 0$ et $\operatorname{tr}(A) = 11$.
Calculer le polynôme caractéristique de A.

(E1) : Diagonaliser la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

(E1) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux-à-deux équivalentes.

1. A est nilpotente
2. $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$
3. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$
4. $A^n = 0$

(E1) : Application : calcul de puissances de matrices (en utilisant la réduction ou à l'aide d'un polynôme annulateur)

Niveau 2 :

(E2) : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme D de E défini par : $\forall f \in E, \quad D(f) = f'$.

(E2) : Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de $u \circ v$ alors elle est aussi valeur propre de $v \circ u$.
Montrer que cette propriété persiste pour $\lambda = 0$ quand E est de dimension finie.

(E2) : Savoir trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qui a deux valeurs propres).

(E2) : Application : recherche de commutants.

Niveau 3 :

(E3) : Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors u et v diagonalisent dans une même base.

Remarques : « les endomorphismes induits d'un endomorphisme diagonalisable sont diagonalisables » est un résultat de cours.

(E3) : Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des scalaires distincts et $n_1, \ldots, n_q$ des entiers naturels non nul.

On note $n = n_1 + \cdots + n_q$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_q I_{n_q} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer $\mathrm{Com}(A)$.

10 - Suites et séries de fonctions

Programme de Colles

Suites et séries de Fonctions :

1. Différents types de convergence :
   (a) Convergence simple (conservation de la monotonie, de la convexité par limite simple)
   (b) Norme infinie d'une fonction bornée sur un intervalle I (définition, démonstration **(D2)**).
   Le nouveau programme permet d'écrire directement $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$ *pour* $A \subset \mathbb{R}$ *et* $\lambda \geq 0$.
   (c) Convergence uniforme, et convergence normale pour les séries de fonctions.
   (d) Procédés d'étude. Liens entre ces différentes notions. La convergence normale entraîne la convergence absolue en tout x.
2. Continuité (pour les suites et séries de fonctions).
3. Théorème de double limite (a priori seulement pour les séries de fonctions).
4. Dérivation (pour les suites et séries de fonctions)
5. Intégration sur un segment en cas de convergence uniforme (pour les suites et séries de fonctions).
6. Intégration sur un intervalle quelconque :
   (a) Théorème de convergence dominée pour les suites et pour les séries de fonctions
   (b) Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : On pose $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(E1) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergence uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On pourra utiliser la formule de Stirling.

(E1) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$.
Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, A]$ puis sur $\mathbb{R}^+$.

(E1) : On considère la fonction zeta de Riemann définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
Déterminer l'ensemble de définition D de ζ, montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et exprimer $\zeta'(x)$ à l'aide d'une série.

(E1) très court : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$.

(E1) : Un des deux **(E2*)** au choix

Niveau 2 :

(E2) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$ et $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k}$.

- Etudier la convergence simple de $\sum f_n$.
- Démontrer que pour tout $a \in]0,1[$, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.
- Démontrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

(E2) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{n^2 + x^2}$.
Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur un segment $[0, A] \subset \mathbb{R}^+$.
Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

(E2) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et on considère $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.
Déterminer l'ensemble de définion D de f. Montrer que f est continue sur D et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(E2) : Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

(E2*) : Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n(\pi + t)dt$.

(E2*) : Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt$.

Niveau 3 :

(E3) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et on considère $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.
En encadrant $f(x)$ par des intégrales, démontrer que $f(x) \underset{x\to 0+}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

(E3) : Enoncer le théorème de dérivation pour la limite f d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Démontrer que lorsque les hypothèses sont vérifiées, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment.

(E3) : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^n f(t)dt = 0.$$

En admettant le théorème de Weierstrass, démontrer que f est la fonction nulle sur $[0, 1]$.

11 - Séries entières

Programme de Colles

Séries entières, généralités :

1. Définition, ensemble de définition, séries géométriques.
2. Rayon de convergence : lemme d'Abel **(D2)**, définition (théorème) du rayon. Disque (ouvert) de convergence, cercle d'incertitude.
3. Règles pour déterminer le rayon de convergence.
   - utilisation du lemme d'Abel et de la définition de R.
   - règle de d'Alembert pour les séries entières ou pour les séries numériques.
   - théorèmes de comparaisons pour les séries entières.
4. Opérations sur les séries entières.
   (a) Somme ($R \geq \inf(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$).
   (b) Produit de Cauchy ($R \geq \inf(R_a, R_b)$). Application : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

Somme d'une série entière de la variable réelle :

1. Convergence normale sur tout $[-r, r] \subset]-R, R[$, sur tout segment.
2. Continuité sur $]-R, R[$.
3. Etude de la continuité en R (raisonnements à rédiger) :
   (a) Cas où la série converge absolument en R : convergence normale et donc continuité sur $[-R, R]$.
   (b) Cas où la série est alternée en R : convergence uniforme et donc continuité sur $[0, R]$.
4. Dérivation et « primitivation » terme à terme :
   (a) Les séries dérivée et intégrée ont même rayon de convergence.
   (b) Dérivation terme à terme sur $]-R, R[$.
   (c) Intégration terme à terme (ou plutôt primitives) sur $]-R, R[$. Application aux séries géométriques.
   (d) Caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Dérivées successives, expression (et donc unicité) des coefficients en fonctions des dérivées successives.
5. Fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ (ou « au voisinage de 0 »).
6. Série de Taylor associée à f qui est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. Rappels : formules de Taylor.
   Application : développement en SE de $\exp$.
7. Autres développements : $\mathrm{ch}(x), \mathrm{sh}(x), \cos(x), \sin(x), \dfrac{1}{1+x}, \dfrac{1}{1-x}, \ln(1+x), \ln(1-x)$, $\mathrm{Arctan}(x)$ et $(1+x)^\alpha$
8. Cohérence entre les deux définitions de $\exp(z) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Calculer de plusieurs méthodes (au moins 3) le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n}$.

(E1) : Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n} z^{2n}$.

(E1) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum n^\alpha z^{2n}$.

(E1) : Déterminer le rayon de convergence et la somme de $f = \sum n^2 t^n$.

(E1) : Prolonger par continuité en 0 la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ et montrer que la fonction f obtenue est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

Niveau 2 :

(E2) : Démontrer que $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

(E2) : Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

(E2) : Soit $r \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Niveau 3 :

(E3) : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et montrer que $\displaystyle S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{a}{1-x}$.

12 - Probabilités

Programme de Colles

Préambule :

1. Ensembles finis, propriétés sur les cardinaux.
2. Ensembles dénombrables : définitions, exemples. Un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable. Produit d'ensembles dénombrables.
3. Somme d'une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0, +\infty]$:
   (a) Définition (borne supérieure des sommes de sous-familles finies), propriétés, sommation par paquet.
   (b) Sommabilité : en pratique, lorsque les termes sont positifs, tous les calculs (sommation par paquets, linéarité, majoration...) sont autorisés, la sommabilité étant garantie par la seule condition que les sommes soient finies.
4. Sommabilité d'une famille au plus dénombrable de réels ou complexes : définition, propriétés, invariance de la somme par permutation, sommation par paquets, théorème de Fubini, sommation triangulaire (par diagonale).
5. Rappels sur les dénombrements (listes avec ou sans répétitions, combinaisons avec ou sans répétition).
6. Rappels sur les coefficients binomiaux.

Probabilités :

1. Vocabulaire probabiliste : univers, résultat, événement, événement élémentaire, événement incompatibles.
2. Tribu sur un univers Ω : définition, stabilité par unions finies, par intersections finies ou dénombrables, lois de Morgan.
3. Probabilité sur un univers fini : définition, propriétés, événements équiprobable, probabilité uniforme, distribution de probabilité.
4. Cas général : espace probabilisé, distribution de probabilité, théorème de continuité croissante **(D3)**, de continuité décroissante, sous-additivité finie, sous-additivité, événement négligeable, événement presque sûr.
5. Système complet d'événements, système quasi-complet d'événements.
6. Probabilité conditionnelle : définition, formule des probabilités composées (avec 2 événements, et avec n événements), formule des probabilités totales (cas fini et cas dénombrable), formule de Bayes.
7. Evénements indépendants : définitions, (indépendants $\Longrightarrow$ deux-à-deux indépendants). Si A et B sont des événement indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi **(D1)**, généralisation à n événements.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : On convient que, si $p \notin [\![0, n]\!]$, alors $\binom{n}{p} = 0$.

Montrer alors que pour tous entiers naturels p, n, m, on a : $\boxed{\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}.}$

Niveau 2 :

(E2) : Calculer le nombre de combinaisons avec répétitions de p éléments parmi $[\![1, n]\!]$.

(E2) : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

(E2) : Démontrer que la réunion dénombrable d'événements presque incertains (i.e. de probabilité nulle) est un événement presque incertain, puis que l'intersection dénombrable d'événements presque certains (i.e. de probabilité égale à 1) est un événement presque certain.

(E2) : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements (mutuellement) indépendants.

Démontrer que $P\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \prod\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ avec, par définition, $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} P(A_k)$.

Niveau 3 :

(E3) : On admet l'unicité de l'écriture décimale propre. Démontrer que $]0, 1]$ n'est pas dénombrable.

(E3) : Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On pose

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m\right) \qquad \text{et} \qquad C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m\right)$$

Justifier que B et C sont des événements et les interpréter en terme de probabilité.

13 - Variables aléatoires

Programme de Colles

Variables aléatoires :

1. Définition, événements associés $(X \in F)$, propriétés, système complet d'événements associé à X.
2. Loi d'une variable aléatoire $\mathbb{P}_X$, caractérisation, notation $X \sim Y$ lorsque $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, fonction de variable aléatoire, $X \sim Y \Longrightarrow f(X) \sim f(Y)$, loi conditionnelle de X sachant un événement A.
3. Exemples à connaître :
   (a) loi uniforme (notation $X \sim \mathcal{U}(E)$).
   (b) loi de Bernoulli (notation $X \sim \mathcal{B}(p)$).
   (c) loi binomiale (notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$).
   (d) loi géométrique (notation $X \sim \mathcal{G}(p)$).
   (e) loi de Poisson (notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$).
4. Couples, vecteurs de variables aléatoires :
   (a) Définition, loi conjointe, lois marginales, généralisation à n variables aléatoires.
   (b) Lois conditionnelles de X sachant $(Y = y)$ et de Y sachant $(X = x)$.
   (c) Indépendance de 2 variables aléatoires (définition et caractérisation), notation $X \perp\!\!\!\perp Y$, indépendance de n variables aléatoires (ou d'une suite de variables aléatoires), suite indépendante et identiquement distribuée (i.d.d.) de variables aléatoires.
   (d) Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ le sont aussi, lemme des coalitions.
   (e) Somme de deux variables aléatoires indépendantes (sur des exemples), somme de lois binomiales, somme de lois de Poisson.
5. Espérance :
   (a) Espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs positives : les calculs sont autorisés dans $[0, +\infty]$ et dans ce cas, on dit que X est d'espérance finie si $\mathbb{E}(X) < +\infty$, ou encore si $\{x\mathbb{P}(X = x),\ x \in X(\Omega)\}$ est sommable.
   (b) Espérance des lois usuelles (toutes en **(D1)**) : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   (c) Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \in [0, +\infty]$
   (d) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe, variable aléatoire centrée.
   (e) Théorème du transfert.
   (f) Propriétés : linéarité, positivité, croissance, espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes.
   (g) Définie positivité :
   $$\Big(X \geq 0 \text{ et } \mathbb{E}(X) = 0\Big) \implies \mathbb{P}(X = 0) = 1 \quad \text{(l'événement } (X = 0) \text{ est presque sûr).}$$

6. Variance :

   (a) Variable admettant un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi.
   (b) Inégalité de Cauchy-Schwarz **(D3)** : X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY aussi et
   $$\mathbb{E}^2(XY) \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$
   Cas d'égalité.
   (c) Variance, formule d'Huyghens-König, interprétation, loi réduite, propriétés.
   (d) Variance des lois usuelles (toutes en **(D1)**) : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   (e) Covariance (définition, propriétés).
   (f) Variance d'une somme finie de variables aléatoires discrètes.

7. Convergence et approximations :

   (a) Inégalités de Markov.
   (b) Inégalité de Bienaymé-Tchébichev.
   (c) Loi faible des grands nombres.

8. Fonction génératrice d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$:

   (a) Définition, propriétés : $R \geq 1$, valeur en 1, continuité (au moins) sur $[-1,1]$, classe $\mathcal{C}^\infty$ (au moins) sur $]-1,1[$, expression de $\mathbb{P}(X=x)$ à l'aide des dérivées successives.
   (b) Fonction génératrice des lois usuelles (à savoir retrouver rapidement).
   (c) Lien avec l'espérance : X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 **(D3)**.
   (d) Lien avec la variance : seulement en exercice (pas d'énoncé au programme).
   (e) Fonction génératrice de la somme de variables aléatoires indépendantes. On retrouve la loi de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2,p)$, ou $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n.$$
(E1) : Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
(E1) : Déterminer l'espérance de $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.
(E1) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov.

Niveau 2 :

(E2) : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et telle que :
$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}_{(X>k)}(X > k+n) = \mathbb{P}(X > n)$$
Montrer que X suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
(E2) : Pour $n \in \mathbb{N}$, on se donne $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda > 0$. Démontrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$
(E2) : Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X,Y) = (p,q)) = \mathbb{P}(X = p, Y = q) = \lambda \frac{p+q}{p!q!2^{p+q}}.$$

Déterminer λ, calculer les lois marginales. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(E2) : Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ deux variables indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. On pourra admettre la formule de Van der Monde.

(E2) : Soit X une variable aléatoire discrète réelle (ou complexe) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si X admet un moment d'ordre $r \geq 2$, alors elle admet un moment d'ordre s pour tout $s \in \{1, \dots, r\}$.

(E2) : Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ deux-à-deux indépendantes et suivant une même loi. On suppose que les X_i^2 sont d'espérance finie et on note

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad m = \mathbb{E}(X_1) \text{ et } \sigma = \sigma(X_1)$$

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Niveau 3 :

(E3) : Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X est d'espérance finie.

Démontrer que $\lim\limits_{N \to +\infty} (N+1)\mathbb{P}(X \geq N+1) = 0$, et retrouver la deuxième expression de l'espérance de X.

(E3) : Énoncer et démontrer la première inégalité de Markov en utilisant une fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$.

14 - Espaces préhilbertiens réels

Programme de Colles

Espaces préhilbertiens réels :

1. Produit scalaire, espace préhilbertien réel, espace euclidien. Exemples à connaître : produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz **(D1)**.
3. Inégalité de Minkowski, norme associée à un produit scalaire.
4. Identités de polarisation.
5. Orthogonalité :
   (a) Vecteurs unitaires, familles orthogonales, orthonormales, une famille orthogonale dont les vecteurs sont tous non nuls est libre **(D2)**.
   (b) Théorème de Pythagore pour la somme de 2 vecteurs (réciproque).
   (c) Sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'une partie A (noté $A^\perp$), c'est un s.e.v. de E, propriétés :

$$i.\quad E^\perp=\{0\},\{0\}^\perp=E \qquad\qquad iii.\quad F\cap F^\perp=\{0\}$$
$$ii.\quad F\subset G \implies G^\perp\subset F^\perp \qquad\qquad iv.\quad F\subset \left(F^\perp\right)^\perp$$

6. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
7. Espaces euclidiens :
   (a) Définition, bases orthonormales, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, Théorème de la base orthonormée incomplète.
   (b) Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une b.o.n. de E.
   Pour $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$ on pose $X=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$. On a alors :

$$x_i=(e_i|x)\quad\text{ et donc }\quad x=\sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i.$$
$$(x|y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i={}^tX.Y\quad\text{ et donc }\quad ||x||^2=\sum_{i=1}^n x_i^2={}^tX.X$$

   (c) Formes linéaires en dimension finie : $\forall f\in\mathcal{L}(E,\mathbb{R}),\ \exists! a\in E,\ \forall y\in E,\quad f(y)=(a|y)$.
   Expression en base orthonormée.

Distance à un s.e.v. de dimension finie :

1. Pour qu'un vecteur de E soit un élément de $F^\perp$ il faut et il suffit qu'il soit orthogonal aux vecteurs d'une famille génératrice de F.
2. Soit F un s.e.v. de E, si F est de dimension finie alors $E=F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$ **(D2)**.
   Conséquence : si E est de dimension finie, alors pour tout s.e.v. F de E,
   on a $\dim(F)+\dim(F^\perp)=\dim(E)$ et $F=\left(F^\perp\right)^\perp$.

3. Projection orthogonale : définition. Si p est la projection orthogonale sur F on a
$$y = p(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in F \\ \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$$
Expression de $p(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i$ si l'on dispose d'une b.o.n. $(e_1, \ldots, e_p)$ de F. Symétrie orthogonale.
4. Distance à un s.e.v. de dimension finie. Définition.
Si p est la projection orthogonale sur F alors pour tout $u \in E$ on a :
   (a) $d(u, F) = ||u - p(u)||$,
   (b) $p(u)$ est le seul vecteur v de F tel que $||u - v||$ réalise la distance de u à F,
   (c) $||u||^2 = ||p(u)||^2 + d(u, F)^2$.
5. Inégalité de Bessel.
6. Interprétation de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à l'aide de projetés orthogonaux.
7. Vecteur normal à un hyperplan. Distance à un hyperplan dans un espace euclidien.
Les étudiant doivent savoir **sans hésiter** déterminer la distance d'un vecteur à un plan dans $\mathbb{R}^3$. Plusieurs méthodes ont été proposées.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (définition et démonstration).
(E1) : Produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (définition et démonstration).
(E1) : Dans l'espace affine $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer l'équation du plan passant par $A(1, 2, 0)$ et orthogonal à $\vec{n} = (1, -1, 2)$.
(E1) : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'égalité $\operatorname{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i \rangle$.

(E1) : Savoir orthonormaliser une base de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire usuel.
(E1) : Savoir trouver rapidement une distance d'un vecteur à un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
(E1) : Savoir trouver rapidement un projeté orthogonal sur un plan de $\mathbb{R}^3$, ou encore la matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Niveau 2 :

(E2) : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que si pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$ alors $A = B$.
(E2) : Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts deux-à-deux.

Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrer que la base de Lagrange associée à $a_0, a_1, \ldots, a_n$ est une base orthonormée de $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle \ , \ \rangle$.
3. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Niveau 3 :

(E3) : Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts deux-à-deux. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire et déterminer une base orthonormée de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P(\alpha)$.

   Justifier qu'il s'agit d'une forme linéaire et déterminer l'unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ pour lequel on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = \langle Q, P\rangle.$$

15 - Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Programme de Colles

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien :

1. Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition (endomorphisme qui conserve la norme), caractérisations, groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$. Si F est stable par $f \in \mathcal{O}(E)$ alors $F^\perp$ l'est aussi.
2. Matrice orthogonale : définition ($M^T M = I_n$), caractérisations.
   Interprétations : Soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E. On a les propositions suivantes.
   - Pour toute base $\mathcal{B}'$ de E : $\mathcal{B}'$ base orthonormée de $E \iff P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   - Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$: $u \in \mathcal{O}(E) \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminant d'un automorphisme (d'une matrice) orthogonal(e), isométries vectorielles directes.
4. Endomorphismes autoadjoint : définition, exemples, matrice dans une base orthonormée.
   Les valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint (resp. d'une matrice symétrique réelle) sont réelles.
   Théorèmes spectral : les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont supplémentaires orthogonaux, diagonalisation en b.o.n., version matricielle.
5. Endomorphismes autoadjoint positifs (resp définis positifs) : définition par le produit scalaire.
6. Orientation d'un espace euclidien. Dans un espace euclidien orienté de dimension 2, orientation d'une droite vectorielle par un vecteur normal. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, orientation d'un plan vectoriel par un vecteur normal. Déterminant en base orthonormée directe (interprétation en terme de surface ou de volume en dimension 2 et 3 respectivement).
7. Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3. Définition à l'aide d'une forme linéaire. Propriétés (la plupart ont été admises). Expression en base orthonormée directe. Application à la recherche des sous-espaces propres d'une matrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
8. Isométries vectorielles d'un plan euclidien. Description complète de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ **(D1)** et de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
9. Isométries vectorielles **directes** d'un espace euclidien de dimension 3. Recherche de l'axe (orienté) et de l'angle de la rotation quand E est orienté. Deux méthodes sont données.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.
(E1) : Les symétries orthogonales sont des endomorphismes autoadjoint.
(E1) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.
On peut aussi demander la version matricielle.
(E1) : Savoir diagonaliser une matrice symétrique réelle 3×3 en base orthonormée.
(E1) : Savoir donner les éléments caractéristiques (axe orienté, angle) d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ donnée par sa matrice dans la base canonique (b.o.n.d).

Niveau 2 :

(E2) : Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On oriente E par la base $\mathcal{B}$.
Montrer que pour toute autre base orthonormée **directe** $\mathcal{B}'$, on a $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

(E2) : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante.

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} p \circ p = p \\ \text{ et} \\ p \text{ est un endomorphisme autoadjoint} \end{cases}$$

(E2) : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par u alors $F^\perp$ l'est aussi.

(E2) : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u répétées avec multiplicités et rangées dans l'ordre croissant. Démontrer que :

$$\forall x \in E, \quad \lambda_1 \|x\| \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n \|x\|.$$

(E2) : Si u est un endomorphisme autoadjoint. Montrer que u est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

On peut aussi demander la version matricielle.

Niveau 3 :

(E3) : Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de P alors $|\lambda| = 1$.

16 - Espaces vectoriels normés

Programme de Colles

Normes sur un espace vectoriel :

1. Norme, distance, norme associée à un produit scalaire (on donne celles issues des produits scalaires usuels).
2. Normes N_1 **(D1)**, N_2 et N_∞ **(D1)** sur $\mathbb{K}^p$.
3. Normes $\mathcal{N}_1$ **(D1)**, $\mathcal{N}_\infty$ **(D2)** sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
4. Normes équivalentes. Exemple en dimension infinie. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (admis).
5. Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Représentation des boules unités dans $\mathbb{R}^2$ avec les trois normes précédentes.
6. Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.
   Ces notions dépendent du choix de la norme, sauf en cas d'équivalence de normes.
7. Parties convexes.

Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie :

1. Définition, convergence.
2. Unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, limite des suites extraites, s.e.v. des suites convergentes.
   Ces notions dépendent du choix de la norme, sauf dans le cas où elles sont équivalentes.
3. En dimension finie, caractérisation à l'aide des suites coordonnées.

Éléments de topologie :

1. Parties ouvertes : point intérieur, intérieur, partie ouverte.
2. Propriétés : l'intersection finie de parties ouvertes est ouverte, la réunion quelconque de parties ouvertes est ouverte.
3. Parties fermées :
   (a) point adhérent, caractérisation séquentielle.
   (b) adhérence, partie fermée, caractérisation séquentielle.
   (c) propriétés : l'intersection quelconque de parties fermées est fermée, la réunion finie de parties fermées est fermée.
   (d) une partie est fermée si et seulement si son complémentaire est ouvert.
4. Frontière d'une partie.
5. Parties denses (définition et caractérisations).
6. Invariance de ces différentes notions par normes équivalentes.

Etude locale d'une application :

On se limite toujours au cas de la dimension finie.

1. Limites, propriétés, indépendance du choix de la norme, caractérisation de la convergence à l'aide des fonctions coordonnées.
2. Continuité, opérations, caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées. Caractérisation séquentielle.

3. Si $f : E \longrightarrow F$ est continue, alors l'image réciproque d'un intervalle ouvert (resp. fermé) par f est un ouvert (resp. fermé).
4. Théorème des bornes atteints c'est-à-dire image continue d'une partie fermée bornée (toujours en dimension finie)
5. Applications lipschitziennes (définition, composition), lipschitzienne $\Longrightarrow$ continue.
6. Continuité des fonctions polynômiales, des applications linéaires (elles sont lipschitziennes en dimension finie), des applications multi-linéaires.

   Attention : la norme subordonnée n'est pas au programme, mais on peut l'aborder en exercices.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : La boule $B(a,r)$ est une partie bornée.

Niveau 2 :

(E2) : Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x) \leq nN_\infty(x)$.
(E2) : La boule $\bar{B}(a,r)$ est une partie convexe.
(E2) : La boule $B(a,r)$ est une partie ouverte.
(E2) : On munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle (la valeur absolue). Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(E2) : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$ (3 méthodes proposées).

Niveau 3 :

(E3) : On note $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ les normes usuelles sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{N}_2$ domine $\mathcal{N}_1$, que $\mathcal{N}_\infty$ domine $\mathcal{N}_2$ mais que $\mathcal{N}_1$ ne domine pas $\mathcal{N}_\infty$.
(E3) : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme usuelle. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
(E3) : (long) On se donne une norme $X \longmapsto \|X\|$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on définit la fonction N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad N(A) = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|.$$

Justifier l'existence de $N(A)$ et montrer que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(E3) : Avec les notations précédentes, montrer aussi que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

17 - Équations Différentielles

Programme de Colles

Équations différentielles :

1. Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 : $ay' + by = c$: définition, théorème de Cauchy-Lipschitz, interprétation graphique, structure des solutions, variation de la constante, raccordements des solutions.
2. Équations d'ordre 2 à coefficients constants (cf Vade Mécum). Recherche de solutions particulières quand les second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$, $\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$.
3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 : définition théorème de Cauchy-Lipschitz, structure des solutions (équation homogène ou pas). Exemple de recherche de solutions développable en série entière.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : Résolution d'une équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\alpha x}$ (a, b, c constants).

(E1) : Trouver les fonctions puissances solutions de $(\mathcal{E}_0) : x^2y'' + xy' - y = 0$.
En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : x^2y'' + xy' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Niveau 2 :

(E2) : Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $xy'' + 2y' - xy = 0$.
Trouver les solutions f de $(\mathcal{E})$ développables en série entière au voisinage de 0 et telles que $f(0) = 1$, puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Niveau 3 :

18 - Fonctions numériques et vectorielles

Programme de Colles

Rappels sur les fonctions numériques :

1. Limite, continuité : définition, caractérisation séquentielle.
2. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une application continue. Théorème de la bijection monotone. Image d'un segment par une application continue.
3. Dérivabilité. Dérivée de la bijection réciproque. Dérivée et extremum. Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Théorème de la limite de la dérivée.
4. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Formule de Leibniz.
5. Formule de Taylor avec reste intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.
6. Convexité : définition, conséquences graphiques. Parmi les fonctions dérivables (resp. 2 fois dérivables) caractérisation des fonctions convexes. Inégalités à connaître.

   Remarque : L'inégalité de Jensen n'est pas au programme.

Fonctions vectorielles :

On s'intéresse ici aux fonctions $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On pourra éventuellement adapter les énoncés aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Limite, continuité, caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées.
2. Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^n$. Caractérisations à l'aide des fonctions coordonnées. Dérivable en $a \implies$ continue en a.
3. Opérations sur les dérivées : linéarité, dérivée de $L\circ f$ avec $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, dérivée de $f\circ\varphi$ avec φ fonction à valeurs réelles, dérivée de $B(f, g)$ avec B bilinéaire (application au produit scalaire, au déterminant, au produit d'une fonction scalaire et d'une fonction vectorielle)
4. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Lien avec les fonctions coordonnées. Formule(s) de Leibniz.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : On note E la fonction *partie entière* et on considère $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) + E(-x)$.
Démontrer que la fonction f n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.

(E1) : Soit $f : [0, 1] \longmapsto [0, 1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

(E1) : Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $] - 1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

(E1) : Calculer de deux façons la dérivée $n-$ième de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

(E1) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(E1) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$.

Niveau 2 :

(E2) : Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0,1],\ f(x) = x\}$ admet un minimum.

(E2) : Montrer qu'une fonction $f :]0,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en 0 et en $+\infty$ est bornée.

(E2) : On considère le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$ et on pose $P_n = U_n^{(n)}$.
Démontrer que P_n possède n racines distinctes et qu'elles appartiennent à $]-1,1[$.

(E2) : Démontrer que pour tous $a, b \in]1,+\infty[$, on a $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Niveau 3 :

(E3) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(E3 - Inégalité de Jensen) : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Démontrer que :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \ \leq\ \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

19 - Fonctions de plusieurs variables

Programme de Colles

Fonctions de plusieurs variables :

1. Ensemble de définition, applications partielles, continuité.
2. Dérivée selon la direction d'un vecteur non nul, dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, opérations.
3. Développement limité à l'ordre 1, application différentielle en un point, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.
4. Règle de la chaîne pour dériver $t \longmapsto f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$ (**(D3)**.
   Application au calcul des dérivées partielles de $(u, v) \longmapsto f(x(u, v), y(u, v))$. Application au changement de variable affine et au passage en coordonnées polaires. Exemple d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1.
5. Les fonctions de différentielle nulle sur un ouvert convexe sont les fonctions constantes.
6. Gradient : définition, écriture à l'aide des dérivées partielles.
7. Applications géométriques (tout est admis) :
   - Courbe du plan défini par une équation $F(x, y) = 0$ (F est $\mathcal{C}^1$), point régulier, tangente en un point régulier (lien avec le gradient).
   - Surface de l'espace défini par une équation $F(x, y, z) = 0$ (F est $\mathcal{C}^1$), point régulier, plan tangent en un point régulier (lien avec le gradient). Courbes tracées sur une surface, lignes de niveau, courbes coordonées.
8. Dérivées d'ordre supérieurs, fonction de classe $\mathcal{C}^k$, théorème de Schwarz, matrice Hessienne, formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
9. Extrema : condition suffisante (théorème des bornes atteintes), condition nécessaire (point critique). Étude du signe de $f(a + h) - f(a)$ soit explicitement, soit au voisinage de a avec la matrice hessienne et le développement limité à l'ordre 2. Recherche d'extrema sur des parties fermées et bornées.

Exercices à connaître :

Niveau 1 :

(E1) : On considère la fonction $g : \begin{cases} (x, y) & \longmapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \longmapsto 0 \end{cases}$

Montrer que de g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(E1) : On considère la fonction $h : \begin{cases} (x, y) & \longmapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \longmapsto 0 \end{cases}$

Montrer que les applications partielles de h en $(0, 0)$ sont continues en 0 mais que h n'est pas continue en $(0, 0)$.

(E1) : Etudier l'existence de dérivées partielles en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de la fonction

$$g : \begin{cases} (x, y) & \longmapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \longmapsto 0 \end{cases}$$

(E1) : On considère l'application $f : x \in \mathbb{R}^p \longmapsto \|x\|_2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.

2. Pour tout $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$, déterminer $df(a)$ et écrire en justifiant le développement limité à l'ordre 1 de f en a.

(E1) : Soit $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Déterminer un ouvert U_1 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_1 définie par :

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & V_1 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est bijective. Exprimer φ_1^{-1}.

(E1) : On considère la courbe $\mathcal{C} : 2x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 1$. Démontrer que cette courbe est régulière et déterminer l'équation de sa tangente en un point $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$.

(E1) : Montrer que la surface $\mathcal{S} : x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 9$ est régulière et déterminer l'équation de son plan tangent en $M_0(1, 1, 1)$.

(E1) : Déterminer les extrema locaux et globaux sur $[0, \pi] \times [0, \pi]$ de la fonction f définie par $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$

Niveau 2 :

(E2) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Exprimer les dérivées partielles de F en fonctions de celles de f.

En déduire la résolution sur $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$: $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

(E2) : On munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel et on considère l'application $f : x \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto \|x\|_2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
2. Pour tout $a \in U$, déterminer $H_f(a)$.

(E2) : Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

f admet-elle des extrema globaux ?

Niveau 3 :

(E3) : Soit $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0),\ x \leq 0\}$. Déterminer un ouvert U_2 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_2 définie par :

$$\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} U_2 & \longrightarrow & V_2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est bijective et exprimer φ_2^{-1}.

(E3) : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$ une direction non nulle. Montrer que la fonction $\varphi_v :\ t \longmapsto f(a + tv)$ est deux fois dérivable en 0 et que :

$$\varphi_v'(0) = df(a).v \text{ et } \varphi_v''(0) = v^T H_f(a) v.$$