PC/PSI
Lycée Châtelet

Vade Mecum 2024/2025

Nous présentons ici quelques points de cours et de savoir-faire qu'il nous semble essentiel de maîtriser tout au long de l'année, et qui pourront faire l'objet de thèmes de révision en colle.
Mais attention, ces rappels ne sauraient se substituer à une connaissance précise de l'**ensemble** du cours de première année.

Une connaissance précise du cours est essentielle à la fois pour aborder les exercices les plus simples, mais aussi pour rédiger avec rigueur des raisonnements plus abstraits. Chacun d'entre vous doit savoir énoncer **exactement** une définition, un théorème. . .

En témoignent ces quelques extraits de rapports de jury...

- **E3A 2021 PC et PSI :** « *Nous avons été déçus par le trop grand nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, d'analyse et qui espèrent venir à bout du sujet grâce à des recettes toutes faites.*

  Dans certaines copies on trouve beaucoup trop d'abréviations CVU, CVS, CSTP (comparaison de séries à termes positifs) voire des symboles mathématiques en guise d'abréviation... La rédaction est souvent inadmissible : les flèches (voir rien du tout) remplacent les phrases, les résultats ne sont pas encadrés, les théorèmes ont des noms aléatoires (lorsqu'ils en ont).
  Nous demandons, dans la rédaction des exercices constituant du sujet, rigueur et justification des résultats proposés en utilisant le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle. »

- **CCINP 2021 PSI :** « *Rappelons que le sujet de mathématiques est écrit pour évaluer les compétences des candidats sur une large partie du programme de PSI. Parmi ces compétences sont systématiquement évaluées :*
  - la connaissance précise des énoncés et démonstrations des résultats du cours et la capacité à les appliquer ;
  - la qualité d'exposition d'un argument, la rigueur ;
  - la présentation de la copie. »

- **CCINP 2023 PSI :** « *Il est conseillé d'utiliser systématiquement un brouillon avant de se lancer dans la rédaction. On rappelle que les abréviations n'ont pas leur place dans une copie de concours.* »

- **CCINP 2023 PC :** « *L'ensemble des correcteurs ont remarqué une amélioration par rapport à la session précédente dans la qualité de la présentation des copies, notamment lors de l'utilisation de théorèmes nécessitant la vérification de nombreuses hypothèses.*
  Rappelons néanmoins que l'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. »

- **Centrale 2021 PC :** « *La différence entre les copies se fait essentiellement sur les points suivants, indicatifs du niveau de soin et de discipline pratiqué par les candidats dans leurs raisonnements :*
  - la connaissance précise du cours ;
  - le niveau de rigueur dans la connaissance et le maniement des notions ;
  - l'efficacité la ténacité et la précision dans les calculs. »

- **Centrale 2023 PSI :** « *Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. Il faut privilégier la qualité sur la quantité, dans la présentation et surtout dans la précision de l'argumentation. Les candidats qui avancent dans un sujet de manière presque linéaire, en donnant tous les arguments importants, qui signale*
  Le jury ne peut qu'encourager les candidats à mettre l'accent sur le cours et les méthodes de résolutions ; ce n'est qu'en maitrisant ces points que l'on peut rechercher et proposer des solutions cohérentes à de nouveaux problèmes. »

- **Mines-Ponts 2023 PC :** « *Nous incitons les candidats à apprendre leur cours en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Les énoncés doivent être précisément connus, leur champ d'application cerné. Nous conseillons également un entraînement intense au calcul.*
  Nous suggérons aux candidats de prendre le temps de lire soigneusement l'énoncé, préambule compris. Une lecture rigoureuse du sujet guide la réflexion, permet d'éviter des erreurs et des omissions. Nous leur conseillons également de prendre le temps de relire leur copie, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, de erreurs de typage, comme les confusions entre vecteurs et scalaires).
  La qualité de la présentation est prise en compte dans l'évaluation. Les correcteurs déplorent un grand nombre de copies très négligées. »

Table des matières

Thème 1

Coefficients binomiaux

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On note $\binom{n}{p}$ (et on dit « p parmi n ») le nombre de façons de choisir p éléments parmi n donnés.

Il est souvent utile d'étendre cette définition et de poser $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p \notin [\![0, n]\!]$.
De cette définition, découlent les premières propriétés suivantes.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

• Puisqu'il revient au même de choisir un ensemble, ou de choisir son complémentaire, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

• On peut compter le nombre de parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$, en distinguant celles qui contiennent $n+1$ et les autres. On obtient la **formule de Pascal** :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

• Par récurrence, et en utilisant la formule de Pascal, on montrerait la **formule de Fermat** :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-p+1)}{p!}.$$

Grâce à la formule de Pascal, on peut construire le triangle de Pascal sous l'une ou l'autre forme :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\boxed{6}$	$\boxed{+\,4}$	1		
5	1	5	10	$\boxed{=10}$	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Par récurrence, et en utilisant la formule de Pascal, on montrerait les deux propositions suivantes.

Proposition (Formules du binôme de Newton)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\boxed{AB = BA}$, on a $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.

Par exemple, si A et B sont des matrices **commutantes**, alors

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3 \times B^0 + 3.A^2 \times B^1 + 3.A^1 \times B^2 + A^3 \times B^0 \\ &= A^3 + 3.A^2B + 3.AB^2 + B^3\end{aligned}$$

Proposition (Formule de Leibniz)

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors fg (produit) l'est aussi et l'on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)},$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de f avec $f^{(0)} = f$.

Par exemple, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^3$, alors

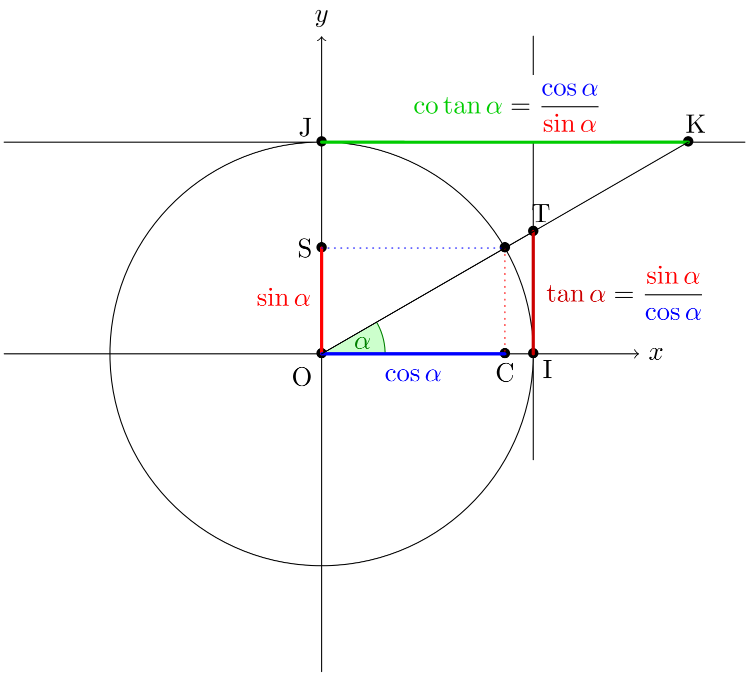
$$\begin{aligned}(f \times g)^{(3)} &= f^{(3)} \times g^{(0)} + 3f^{(2)} \times g^{(1)} + 3f^{(1)} \times g^{(2)} + f^{(0)} \times g^{(3)} \\ &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''\end{aligned}$$

Thème 2

Trigonométrie, nombres complexes et polynômes

2.1 Rappels

On oriente $\mathbb{R}^2$ par la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour le produit scalaire usuel, cette base est donc orthonormée directe.
Soit M un point du cercle de centre O et de rayon 1. On note x une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. On a :



$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormé direct du plan.

$\cos\alpha = \overline{OC}$ est l'abscisse de M.

$\sin\alpha = \overline{OS}$ est l'ordonnée de M.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{IT}}{1}$$

Valeurs remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

2.2 Le formulaire (à connaître)

Proposition (Formules de développement)

Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a \pm b, a, b \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

Dans le cas particulier où $a = b = x$, on obtient (à connaître absolument !) :

Proposition (Formules de duplication)

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
  $= 2\cos^2(x) - 1$
  $= 1 - 2\sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Et si $x, 2x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

Proposition

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

- $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x) + 1}{2}$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$
- $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$

Ou encore avec $\theta = 2x$:

- $2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 1 + \cos(\theta)$
- $2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos(\theta)$

Idée : Losque l'expression $\sqrt{1+x}$ ou $\sqrt{1-x}$ apparaît dans une intégrale, on pourra essayer d'effectuer le changement de variable $x = \cos(\theta)$ (un carré apparaît sous la racine).

2.3 Les relations à savoir retrouver rapidement

Il faut savoir rapidement, en ajoutant deux des formules d'addition, retrouver les relations suivantes.

Proposition (Formules de linéarisation)

Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a :

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$
- $\sin(a)\sin(b) = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

Dans ces relations, en posant $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$, on a $a+b = p$ et $a-b = q$ et la proposition suivante.

Proposition (Formules de factorisation)

Pour tous p et q dans $\mathbb{R}$, on a :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

Enfin, pour calculer des intégrales de fractions rationnelles en cos et sin, on pourra utiliser :

Proposition

Si $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Là où elles ont un sens, on a les égalités :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

2.4 Linéarisations

On rappelle les deux énoncés suivants.

Proposition (Formule de Moivre)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n \underset{\text{Déf.}}{=} \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Proposition (Formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

On a parfois besoin de linéariser des expressions du type $\cos^n(x)$, $\sin^p(x)$ ou encore $\cos^n(x)\sin^p(x)$, par exemple pour en chercher des primitives, ou encore des développements en série entière (PC/PSI).

On peut pour cela :

(1) utiliser le formulaire.

ou

(2) exprimer $\cos^n(x)$, $\sin^p(x)$ ou $\cos^n(x)\sin^p(x)$ en partant des formules d'Euler, développer complètement en utilisant la formule du binôme de Newton, et enfin regrouper les termes e^{ikx} et e^{-ikx} pour faire apparaître des termes $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$.

Exemple simple : Linéarisons $\cos^3(x)\sin(x)$ en utilisant les deux pistes évoquées ci-dessus.

$$\textbf{(1)} \quad \begin{aligned} \cos^3(x)\sin(x) &= \cos^2(x)\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{4}(1+\cos(2x))\sin(2x) \\ &= \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\sin(2x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\sin(4x) \end{aligned}$$

ou

$$\textbf{(2)} \quad \begin{aligned} \cos^3(x)\sin(x) &= \frac{1}{2^4 i}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)^3\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right) = \frac{1}{2^4 i}\left(\mathrm{e}^{i3x} + 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} + \mathrm{e}^{-i3x}\right)\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2^4 i}\left(\mathrm{e}^{i4x} + (3-1)\mathrm{e}^{i2x} + (1-3)\mathrm{e}^{-i2x} - \mathrm{e}^{-i4x} + (3-3)\mathrm{e}^{i0x}\right) \\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2i}\left((\mathrm{e}^{i4x} - \mathrm{e}^{i4x}) + 2(\mathrm{e}^{i4x} - \mathrm{e}^{i4x})\right) = \frac{1}{8}(\sin(4x) + 2\sin(2x)) \end{aligned}$$

2.5 Méthode de l'arc moitié

On est parfois amené à factoriser des expressions du type $\mathrm{e}^{ip} \pm \mathrm{e}^{iq}$ par exemple pour en déterminer le module et l'argument, ou pour en déterminer la partie réelle et la partie imaginaire. On retiendra la « méthode » plutôt que le résultat lui-même.
L'idée est de considérer l'angle *moitié* $\dfrac{p+q}{2}$ et de factoriser l'expression par $\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$.
On a donc $p = \dfrac{p+q}{2} + \dfrac{p-q}{2}$ et $q = \dfrac{p+q}{2} - \dfrac{p-q}{2}$, et les propriétés algébriques de la fonction exponentielle complexe, nous permettent de faire apparaître les formules d'Euler.

Proposition

Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$, on a :

- $\mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq} = \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$
- $\mathrm{e}^{ip} - \mathrm{e}^{iq} = \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2i\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

- $1 + \mathrm{e}^{it} = \mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}$
- $1 - \mathrm{e}^{it} = \mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}\right) = -2i\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}$

2.6 Racines n-ièmes de l'unité

On sait que tout nombre complexe z **non nul** s'écrit de manière unique sous la forme $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ est défini modulo 2π.
Soit n un entier naturel. Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation :

$$z^n = 1.$$

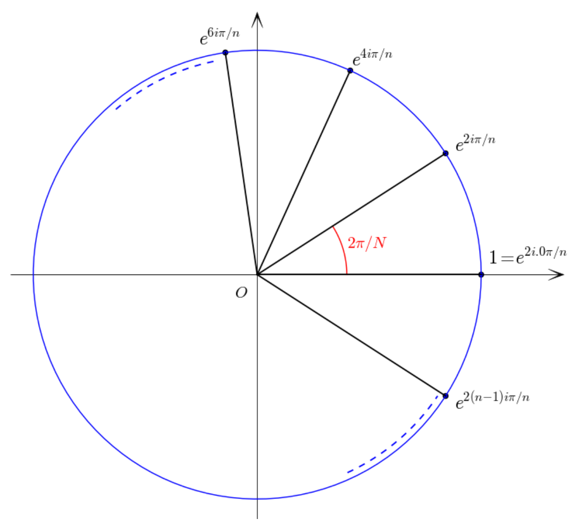
Il est évident 0 n'est pas solution. Soit z un nombre complexe non nul et $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$. On a les équivalences suivantes.

$$z^n = 1 \iff \rho^n \mathrm{e}^{in\theta} = 1 = 1\mathrm{e}^{i.0}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = 1(\text{ car } \rho^n > 0) \\ \text{et} \\ n\theta \equiv 0[2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \quad (\text{car } \rho > 0) \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$



Et comme l'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique, on peut démontrer que cette dernière condition équivaut à :

$$z^n = 1 \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \text{et} \\ \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Et finalement :

Proposition

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$z^n = 1 \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

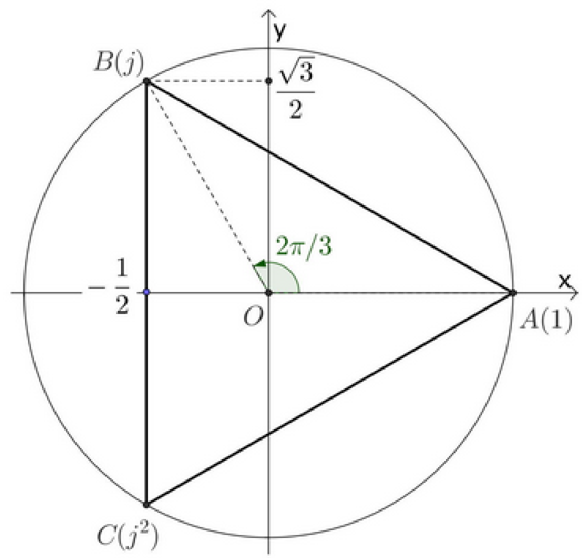
- On a aussi la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$: $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

Cas où $n = 3$:

En maths, on note j le complexe : $\exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

On a les propriétés suivantes (à retenir !).

- $j^3 = 1$
- $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$
- $1 + j + j^2 = 0$
- $z^3 = 1$ **ssi** $z = 1$ ou j ou j^2
- $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$
- $X^2 + X + 1 = (X-j)(X-j^2)$



Thème 3

Polynômes

3.1 Divisibilité

Définition

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que $Q \in \mathbb{K}[X]$ divise P (ou est un diviseur de P) si il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = U \times Q$.
  On note $Q|P$.
- On dit que Q est un multiple de P si P est un diviseur de Q.
  On note $P.\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des multiples de P.

Proposition (Division euclidienne)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est appelé le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

3.2 Racines

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(n)}(a) \neq 0.$

(2) $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X - a)^n Q(X) \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0.$

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que a est racine d'ordre n de P.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $a_1, \ldots, a_n$ des réels **distincts**.

- On a l'équivalence suivante.

$$a_1, \ldots, a_n \text{ racines de } P \quad \Longleftrightarrow \quad \prod_{k=1}^{n} (X - a_i) \text{ divise } P(X).$$

- Si $a_1, \ldots, a_n$ sont racines de P et si $\deg(P) = n$ alors $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i)$ où λ est le coefficient dominant de P.
- Un polynôme P **non nul** a au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est scindé dans $\mathbb{K}$, s'il peut s'écrire sous la forme :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) \qquad \text{avec } \lambda, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \text{ et } n = \deg(P).$$

On conviendra que les polynômes constants sont aussi scindés.

Cette définition dépend du corps sur lequel on se place. Ainsi par exemple $P(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, mais il l'est sur $\mathbb{C}$.

Dans cette définition, les racines $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas nécessairement distinctes. Si besoin, on peut écrire :

$$P(X) = \lambda \prod_{j=1}^{q} (X - b_j)^{m_{b_j}}$$

où $b_1, \dots, b_q$ sont les racines **distinctes** de P, et $m_{b_1} \dots, m_{b_q}$ sont leurs multiplicités respectives.

Proposition (Théorème de D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine, et par conséquent tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

3.3 Relations entre les coefficients et les racines

Pour trouver les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme $P(X)$, on écrit (c'est toujours possible dans $\mathbb{C}[X]$) :

$$P(X) = \alpha_n X^n + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i).$$

On développe le produit, puis on identifie les coefficients.
Il faut connaître les résultats suivants.

Proposition

- Si $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ avec $\alpha \neq 0$ et si a_1, a_2 sont ses racines, on a : $s = a_1 + a_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha}$ et $p = a_1 a_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.
  Avec ces notations on a donc :
  $$P(X) = \alpha(X - a_1)(X - a_2) = \alpha(X^2 - sX + p).$$
- Si $P(X) = \alpha_n X^n + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 = \alpha_n \prod_{k=1}^{n} (X - a_i)$ avec $a_1, \dots, a_n$ les racines de $P(X)$ répétées avec multiplicité et avec $\alpha_n \neq 0$, alors on a :
  $$s = a_1 + \cdots + a_n = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \qquad \text{et} \qquad p = a_1 \times \cdots \times a_n = (-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}.$$
  Et donc :
  $$\begin{aligned} P(X) &= \alpha_n \prod_{k=1}^{n} (X - a_i) = \alpha_n X^n + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \\ &= \alpha_n \Big(X^n - (a_1 + \cdots + a_n) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n (a_1 \times \cdots \times a_n) \Big) = \alpha_n \Big(X^n - sX^{n-1} + \cdots + (-1)^n p \Big) \end{aligned}.$$

3.4 Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale

3.4.1 Motivation

Posons $P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X^1 + a_0 X^0$. On évalue le polynôme en x_0 i.e. on calcule $P(x_0)$:

— **Coût pour le calcul très naïf** i.e. codé avec deux boucles imbriquées
une boucle for (externe) pour la somme
et
une boucle for (interne) pour le calcul de chaque puissance :

opération :	$+$	$\times$
coût :	$\sim p$	$\sim \frac{1}{2}p^2$

— **Coût pour le calcul naïf** i.e. codé avec une seule boucle for à la fois
pour la somme
et
pour les puissances grâce à une variable auxiliaire stockant la puissance précédente

opération :	$+$	$\times$
coût :	$\sim p$	$\sim 2p$

3.4.2 Principe de la méthode sur un exemple de degré ≤ 4

- Le polynôme $P(X) = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ soit encore $P(X) = X^4a_4 + X^3a_3 + X^2a_2 + Xa_1 + a_0$ peut s'écrire **successivement** :

  $P(X) = X\left\{X^3a_4 + X^2a_3 + X^1a_2 + a_1\right\} + a_0$
  $P(X) = X\left\{\, X\left[X^2a_4 + X^1a_3 + a_2\right] \,+ a_1\right\} + a_0$
  $P(X) = X\left\{\, X\left[\, X\left(X^1a_4 + a_3\right) \,+ a_2\right] \,+ a_1\right\} + a_0$
  $P(X) = X\,\{\, X\,[\, X\,(\, X\,\langle a_4\rangle \,+ a_3)\, + a_2]\, + a_1\} + a_0$

- Pour calculer, on empilera successivement les évaluations en x_0 de :
  0
  $X.0 + \langle a_4\rangle$
  $X\,\langle a_4\rangle \,+ a_3$
  $X\,(\,X\,\langle a_4\rangle \,+ a_3)\, + a_2$
  $X\,[\,X\,(\,X\,\langle a_4\rangle \,+ a_3)\, + a_2]\, + a_1$
  $X\,\{\,X\,[\,X\,(\,X\,\langle a_4\rangle \,+ a_3)\, + a_2]\, + a_1\} + a_0$

- Chaque ligne, sauf la première compte 1 multiplication et 1 addition
  soit en tout :
  5 multiplications et 5 additions
  contre resp.
  15 multiplications et 5 additions pour le calcul très naïf
  et
  9 multiplications et 5 additions pour le calcul naïf

3.4.3 Le théorème

Énoncé

Proposition

Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_kX^k$, on pose : $\begin{cases} q_p = a_p \\ \text{ et} \\ \text{pour } k \text{ allant de } p-1 \text{ à } 0,\ \ q_k = x_0 \times q_{k+1} + a_k \end{cases}$

On a alors : $\begin{cases} P(x_0) = q_0 \\ \text{ et} \\ Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} q_kX^k \ \ \text{est le quotient de la division euclidienne de } P \text{ par } X - x_0 \end{cases}$

En conséquence, lorsque le diviseur est scindé, on peut par applications successives de la méthode précédente trouver reste et quotient de la division euclidienne par ce diviseur.

Coût

Coût pour le calcul de $P(x_0)$ selon la méthode de Horner codé conformément au tableau précédent :

opération :	$+$	$\times$
coût :	$\sim p$	$\sim p$

Code pour la méthode de Horner :

Voici une implémentation récursive de la méthode de Horner. Un polynôme est codé par la liste de ces coefficients, du coefficient dominant à celui en X^0 en notant 0 pour un coefficient nul.
Voici une implémentation récursive de la méthode de Horner.

```python
def horner_rec_00(P, x0):
    """
    >>> horner_rec_00([1, 1, 3, 1], 5)
    166
    """
    if len(P) == 0:
        return 0
    else:
        return horner_rec_00(P[:-1], x0)*x0+P[-1]
```

Expliquer pourquoi ce code est maladroit en Python. (Ind : songer que l'instruction $L[start : stop]$ crée une nouvelle liste)

3.4.4 Disposition pratique de la méthode sous forme d'un tableau sur un exemple :

Par exemple avec $P = 3X^3 + 5X + 4$ et $x_0 = 2$, on cherche, conformément à l'énoncé, les scalaires q_3, q_2, q_1, q_0 dans cet ordre, mais par commodité d'exposition et d'initialisation on pose $q_4 = 0$
on met en place le tableau suivant :

+coeff :	3		0		5		4		
$2\times q_k = ...\uparrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	
$q_k \uparrow$	$q_4 = 0$		$q_3 =$		$q_2 =$		$q_1 =$		$q_0 =$

on calcule et on place en suivant les flêches : $2 \times q_4 = 0$ puis $q_3 = 2 \times q_4 + 3 = 3$

+coeff :	3		0		5		4		
$2\times q_k = ...\uparrow$	0	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	
$q_k \uparrow$	$q_4 = 0$		$q_3 = 3$		$q_2 =$		$q_1 =$		$q_0 =$

on calcule et on place en suivant les flêches : $2 \times q_3 = 6$ puis $q_2 = 2 \times q_3 + 0 = 6$

+coeff :	3		0		5		4		
$2\times q_k = ...\uparrow$	0	$\searrow$	6	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	
$q_k \uparrow$	$q_4 = 0$		$q_3 = 3$		$q_2 = 6$		$q_1 =$		$q_0 =$

on calcule et on place en suivant les flêches : $2 \times q_2 = 12$ puis $q_1 = 2 \times q_2 + 5 = 17$

+coeff :	3		0		5		4		
$2\times q_k = ...\uparrow$	0	$\searrow$	6	$\searrow$	12	$\searrow$		$\searrow$	
$q_k \uparrow$	$q_4 = 0$		$q_3 = 3$		$q_2 = 6$		$q_1 = 17$		$q_0 =$

on calcule et on place en suivant les flêches : $2 \times q_1 = 34$ puis $q_0 = 2 \times q_1 + 4 = 38$

+coeff :	3		0		5		4		
$2\times q_k = ...\uparrow$	0	$\searrow$	6	$\searrow$	12	$\searrow$	34	$\searrow$	
$q_k \uparrow$	$q_4 = 0$		$q_3 = 3$		$q_2 = 6$		$q_1 = 17$		$q_0 = 38$

AINSI on a $P(2) = 38$
MAIS AUSSI $P = (X - 2)(3X^2 + 6X + 17) + 38$

Thème 4

Généralités sur les fonctions numériques

4.1 Propriétés des fonctions numériques

Définition (Parité)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On dit que f est paire si pour tout x dans D, $-x$ est aussi un élément de D et : $f(-x) = f(x)$
  Dans ce cas, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- On dit que f est impaire si pour tout x dans D, $-x$ est aussi un élément de D et : $f(-x) = -f(x)$.
  Dans ce cas, le graphe de f est symétrique par rapport au point O.

Définition (Périodicité)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $T > 0$.

On dit que f est T-périodique si :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in D \Longleftrightarrow x + T \in D \\ \quad\quad \text{et} \\ \forall x \in D, \quad f(x) = f(x+T) \end{cases}$$

Dans ce cas, le graphe de f est invariant par la translation de vecteur $T.\vec{i}$

Définition (Monotonie)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(1.a) On dit que f est croissante si pour tout x, y dans I on a :

$$x \geq y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \geq f(y).$$

(1.b) On dit que f est strictement croissante si pour tout x, y dans I on a :

$$x > y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > f(y)$$

(2.a) On dit que f est décroissante si pour tout x, y dans I on a :

$$x \geq y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq f(y)$$

(2.b) On dit que f est strictement croissante si pour tout x, y dans I on a :

$$x > y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < f(y)$$

On peut aussi obtenir les variations d'une fonction f en étudiant le signe de sa dérivée... du moins quand elle existe.

Cette méthode est souvent privilégiée par les étudiants, et pourtant, un retour à la définition est parfois bien plus simple ! On s'en convaincra en étudiant les exemples suivants.

Exemple 1 : On détermine **l'ensemble de définition** de la fonction $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_\zeta &\iff \zeta(x) \text{ existe} \\ &\iff \text{la série } \sum \frac{1}{n^x} \text{ converge} \overset{\text{Riemann}}{\iff} x > 1 \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\mathcal{D}_\zeta =]1, +\infty[.}$

On étudie alors la **monotonie** de ζ sur $]1, +\infty[$.
Soient $x, y \in]1, +\infty[$ tels que $x < y$. Puisque $\frac{1}{n} \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{n^y}$.
Et donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \ \geq \ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^y}$.
Puisque $x, y \in]1, +\infty[$, les deux membres de l'inégalité admettent une limite finie quand N tend vers $+\infty$. On peut donc **passer** à la limite dans cette inégalité. On obtient :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \ \geq \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y} = \zeta(y)$$

Et donc $\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est décroissante sur }]1, +\infty[.}$

On pourrait de la même manière, étudier la monotonie d'une fonction définie par une intégrale sans passer par la dérivation.

Exemple 2 : Pour montrer qu'une fonction n'est pas croissante, il faut utiliser la négation de **(1.a)**.
Ainsi, avec les notations précédentes, f n'est pas croissante sur I si l'on trouve un contre-exemple à l'affirmation **(1.a)**, c'est-à-dire si l'on peut trouver x et y dans I tels que $x \leq y$ et $f(x) > f(y)$.

Par exemple, $\frac{\pi}{2}$ et π sont deux éléments de $[0, \pi]$ qui vérifient $\frac{\pi}{2} \leq \pi$, et pourtant :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \ = \ 1 \ > \ 0 \ = \ \sin(\pi).$$

Et donc la fonction sin n'est pas croissante sur $[0, \pi]$,

Définition (Caractère borné)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que f est bornée sur I si :

$$\text{il existe } M \geq 0 \text{ tel que } \forall x \in D, \quad |\, f(x) \,| \leq M$$

Définition (Continuité)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.
On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall x \in I, \quad |\, x - x_0 \,| \leq \alpha \implies |\, f(x) - f(x_0) \,| \leq \varepsilon$$

Pour montrer la continuité, on essaie d'abord d'utiliser :
- les propriétés générales sur les **opérations** entre fonctions continues.

Et là où elles ne s'appliquent pas, on revient à la **définition**. Par exemple en x_0, on peut montrer que $f(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$:
- par des majorations de $|\, f(x) - f(x_0) \,|$,
- en utilisant des développements limités, des équivalents pour lever des indéterminations.

On rappelle plusieurs énoncés vérifiés par des fonctions continue (existence de solutions d'équations ou d'extremum).

Proposition (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si a et b sont deux points de I tels que $a \leq b$, alors on a l'implication

$$f(a)f(b) \leq 0 \implies \exists c \in [a, b], \ f(c) = 0.$$

Ce théorème s'énonce aussi de la façon suivante.

Proposition (Image continue d'un intervalle)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Si a et b sont deux points de I tels que $a \leq b$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur $[a, b]$.
On peut retenir cet énoncé sous la forme : *l'image continue d'un intervalle est un intervalle.*

Les énoncés précédents assurent l'existence de solutions d'équations $f(x) = \alpha$ lorsque f est continue. En ajoutant une hypothèse de stricte monotonie (et donc d'injectivité), on obtient en plus l'unicité de la solution.

Proposition (Théorème de la bijection)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeur dans $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur son image $J = f(I)$ et J est un intervalle.

Dans ce cas, la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et de même monotonie que f.

Le théorème suivant assure l'existence d'un maximum et d'un minimum pour une fonction à valeurs réelles continue sur un segment.

Proposition (Théorème des bornes atteintes ou Image continue d'un segment)

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On a :

- la fonction f possède un maximum M et un minimum m sur $[a, b]$,
- $f([a, b]) = [m, M]$.

On peut retenir cet énoncé sous la forme : *l'image continue d'un segment de $\mathbb{R}$ est un segment.*

Définition (Dérivabilité)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x_0 \in I$.

- On dit que f est dérivable en x_0 si :

$$\tau_{f_{x_0}} : \begin{cases} I \smallsetminus \{x_0\} & \longrightarrow \quad \mathbb{R}, \\ x & \longrightarrow \quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

  admet une limite finie en x_0. Le quotient $\tau_{f_{x_0}}(x)$ s'appelle taux d'accroissement de f entre x_0 et x.

- En cas d'existence, cette limite s'appelle nombre dérivé au point x_0 et on la note $f'(x_0)$ ou parfois $D(f)(x_0)$ ou $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Ainsi, en cas d'existence :

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)}$$

Pour montrer la dérivabilité, on essaie d'abord d'utiliser :

- les propriétés générales sur les **opérations** entre fonctions dérivables.

Et là où elles ne s'appliquent pas, par exemple en x_0, on peut :

- revenir à la **définition** et déterminer la limite du taux d'accroissement, en utilisant des développements limités, des équivalents pour lever des indéterminations.
- Utiliser le **théorème de la limite de la dérivée**, dont on n'oubliera pas de vérifier les hypothèses.

Proposition (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et a un élément de I. On suppose que l'on a :

- f est continue sur I,
- f est dérivable sur $I \smallsetminus \{a\}$,
- $f'_{|I \smallsetminus \{a\}}$ admet une limite finie ℓ en a,

alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Remarque : Si on remplace la troisième condition par $f'_{|I \setminus \{a\}}$ tend vers $\pm\infty$ en a, on peut dire que f n'est pas dérivable en a et que son graphe admet une (demi-)tangente verticale en le point d'abscisse a.

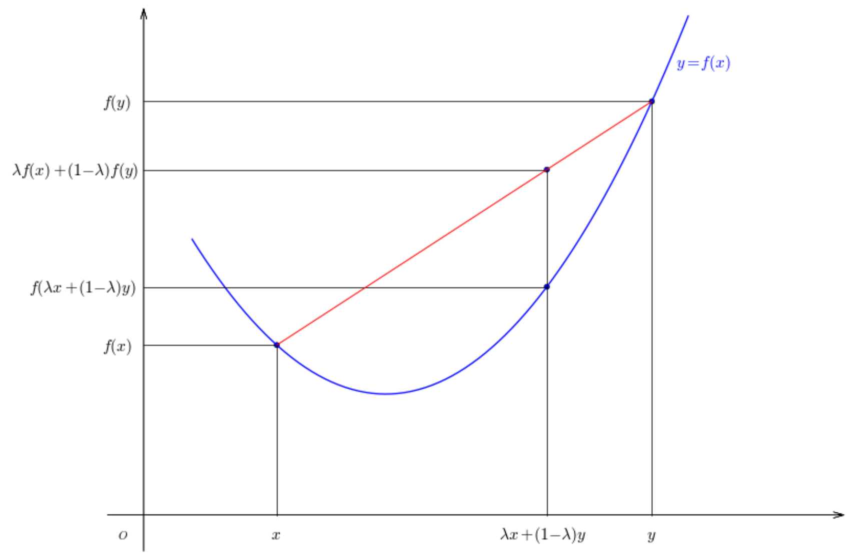
Définition (Convexité)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est convexe si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation graphique : On remarque que lorsque λ parcourt $[0, 1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y$ parcourt le segment $[x, y]$ (ou $[y, x]$ si $x > y$).

Ainsi, graphiquement, une fonction est convexe si son graphe est en dessous de ses sécantes (ou cordes).

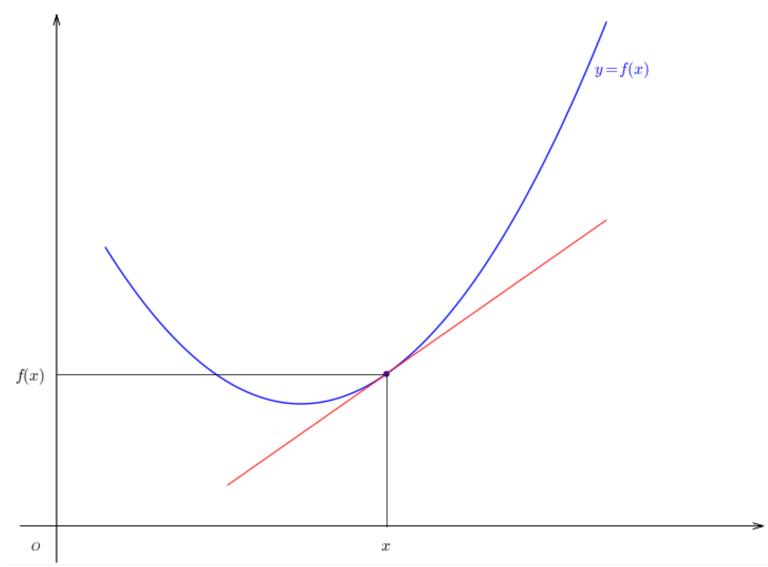


Proposition (Caractérisation des fonctions convexes)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On suppose que f est dérivable sur I. Alors :
$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante}$$
- On suppose que f est deux fois dérivable sur I. Alors :
$$f \text{ est convexe} \iff f'' \text{ est positive}$$

Conséquence graphique : Le graphe d'une fonction convexe et dérivable est au dessus de ses tangentes.



La convexité de certaines fonctions nous permet d'obtenir des inégalités utiles en analyse.

Application 1 : On a pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \dfrac{e^a + e^b}{2}$.
En effet, la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée seconde est positive, donc exp est convexe sur $\mathbb{R}$.
Ainsi : $\forall \lambda \in [0,1],\ \exp(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda \exp(a) + (1-\lambda)\exp(b)$.
Avec $\lambda = \dfrac{1}{2}$, on trouve le résultat attendu.

Application 2 : On a pour tout $a, b \in]1, +\infty[$, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.
En effet, on considère la fonction $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et : $\forall x > 1, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
Or $x \longmapsto x\ln(x)$ est croissante et strictement positive sur $]1, +\infty[$, donc f' est décroissante (inutile de calculer f'' !). Ainsi, $-f' = (-f)'$ est croissante, donc $-f$ est convexe. On dit dans ce cas que f est **concave**. On a alors (inégalité inversée) :

$$\forall (x,y) \in]1, +\infty[^2,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Avec $x = a, y = b$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$, on trouve :

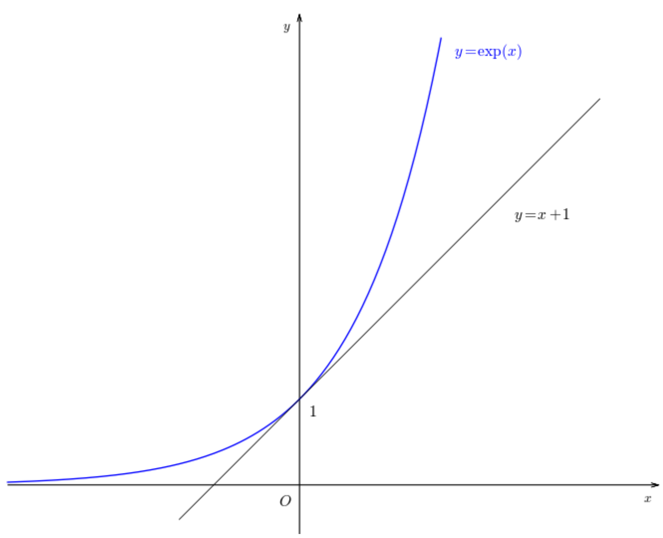
$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}\left(\ln(\ln(a)) + \ln(\ln(b)\right) = \ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right).$$

En composant par l'exponentielle qui est croissante : $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \exp\left(\ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right)\right) = \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Des inégalités à connaître :

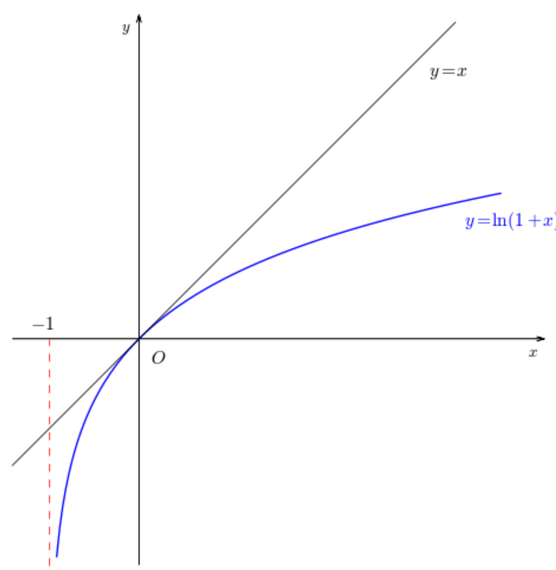
- la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.}$$



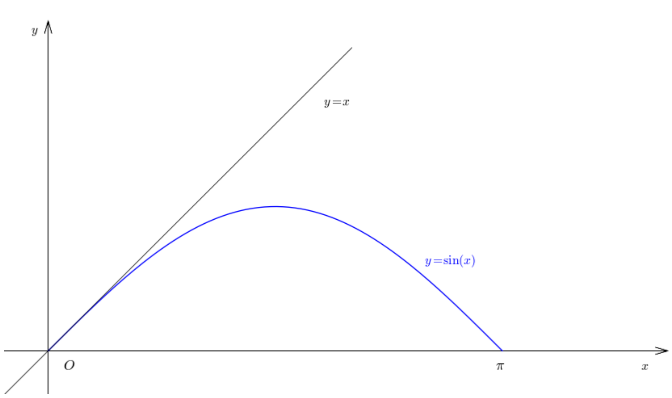
- la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x.}$$



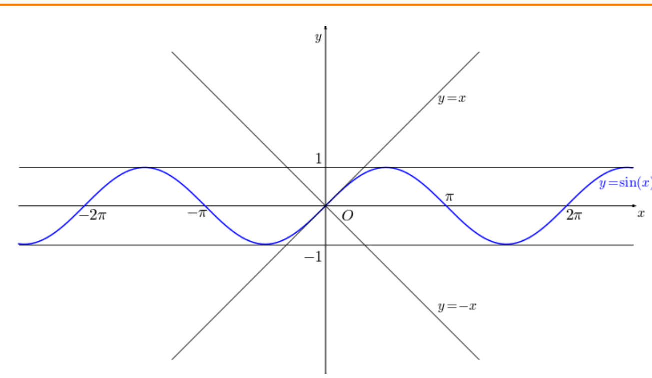
- la fonction sin est concave sur $[0, \pi]$ donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi], \quad \sin(x) \leq x.}$$



- On peut aussi montrer :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|.}$$



4.2 Plan général d'étude d'une fonction

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f
2. Réduire, si c'est possible, l'ensemble d'étude grâce à :
   (a) périodicité
   (b) parité ou imparité
3. Étudier la continuité de f :
   (a) par opérations sur les fonctions continues,
   ou
   (b) en revenant à la définition et en montrant que : $f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.
   Pour cela, on utilisera des majorations des développements limités ou des équivalents.
4. Déterminer les limites aux bords.
5. Dresser le tableau des variations de f grâce à :
   (a) monotonie immédiate (opérations sur les inégalités),
   ou
   (b) quand f est dérivable, par étude du signe de la dérivée.
6. Etudier éventuellement la convexité pour placer correctement les tangentes aux points remarquables
7. Tracer le graphe de f.

Thème 5

Fonctions usuelles

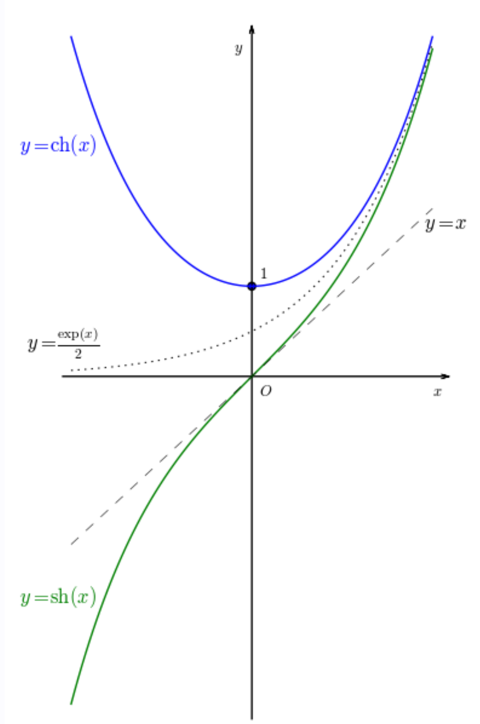
5.1 Fonctions ch et sh

Définition

Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique notées respectivement ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

La fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.



Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les relations suivantes.

$$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Les fonctions ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \quad$ et $\quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

Il existe aussi un formulaire de trigonométrie hyperbolique, très similaire à celui de trigonométrie circulaire. Toutes ces formules peuvent se retrouver en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Par exemple, on a :

- $\mathrm{sh}(2x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \dfrac{1}{2}\Big((\mathrm{e}^x)^2 - (\mathrm{e}^{-x})^2\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\Big)\Big(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\Big) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$.
- En développant $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$, les doubles-produits s'éliminent et il reste :

$$\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \mathrm{ch}(2x).$$

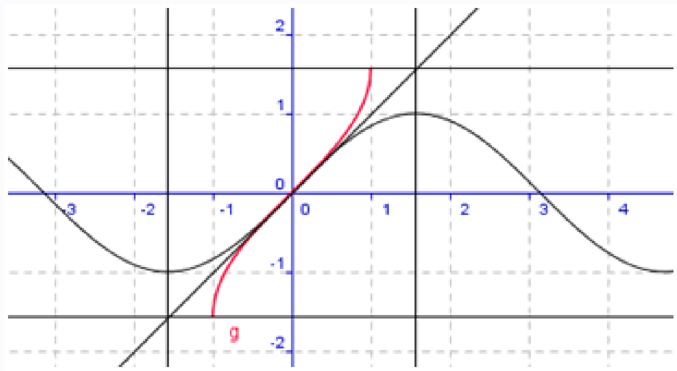
  Et avec les relations précédentes : $\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2(x)$.

5.2 Fonction Arcsin

Définition

La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, par le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur son image à savoir $[-1, 1]$.

La fonction Arcsin est la bijection réciproque de la restriction de la fonction sin à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est donc **définie sur** $[-1, 1]$, et elle **prend ses valeurs dans** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Ainsi, par définition, si $x = [-1, 1]$, on a :

$$\mathrm{Arcsin}(x) = \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{et} \\ x = \sin(\theta) \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad \sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x \iff x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

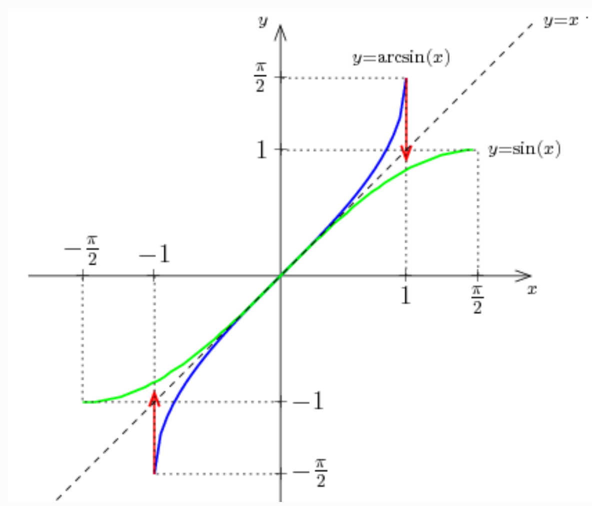
Proposition

En appliquant le théorème de dérivation pour les fonctions réciproques, on montrerait que la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Et en appliquant le théorème de la limite de la dérivée étendu, on montrerait que la fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1 et -1, et que son graphe admet en ces points des demi-tangentes verticales.

On remarque aussi que la pente de la tangente à la courbe en $x = 0$ est $\mathrm{Arcsin}'(0) = 1$.



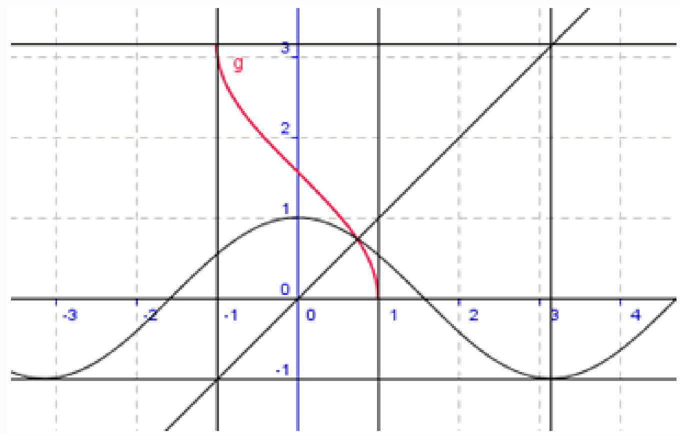
Valeurs remarquables :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{Arcsin}(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

5.3 Fonction Arccos

Définition

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, par le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur son image à savoir $[-1, 1]$.
La fonction Arccos est la bijection réciproque de la restriction de la fonction cos à l'intervalle $[0, \pi]$. Elle est donc **définie sur** $[-1, 1]$, et elle **prend ses valeurs dans** $[0, \pi]$.



Ainsi, par définition, si $x = [-1, 1]$, on a :

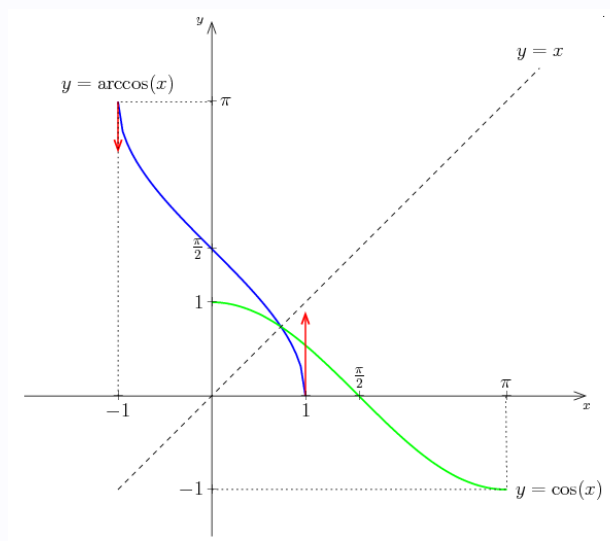
$$\operatorname{Arccos}(x) = \theta \iff \begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \text{et} \\ x = \cos(\theta) \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad \cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Big(\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x \iff x \in [0, \pi]\Big)$$

Proposition



En appliquant le théorème de dérivation pour les fonctions réciproques, on montrerait que la fonction Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Et en appliquant le théorème de la limite de la dérivée étendu, on montrerait que la fonction Arccos n'est pas dérivable en 1 et -1, et que son graphe admet en ces points des demi-tangentes verticales.

On remarque aussi que la pente de la tangente à la courbe en $x = 0$ est $\operatorname{Arccos}'(0) = -1$.

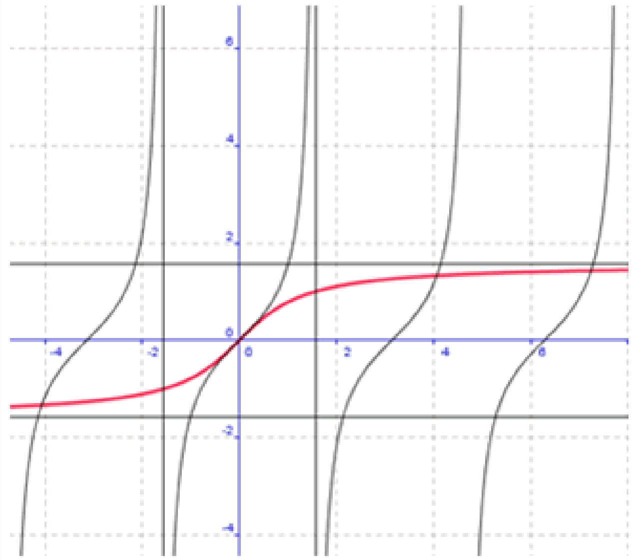
Valeurs remarquables :

x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{Arccos}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

5.4 Fonction Arctan

Définition

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, par le théorème de la bijection monotone, elle réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur son image à savoir $\mathbb{R}$.
La fonction Arctan est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est donc **définie sur** $\mathbb{R}$, et elle **prend ses valeurs dans** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



Ainsi, par définition, si $x = \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{Arctan}(x) = \theta \quad \iff \quad \begin{cases} \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \text{et} \\ x = \tan(\theta) \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ avec } x \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi], \qquad \left(\operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

Proposition

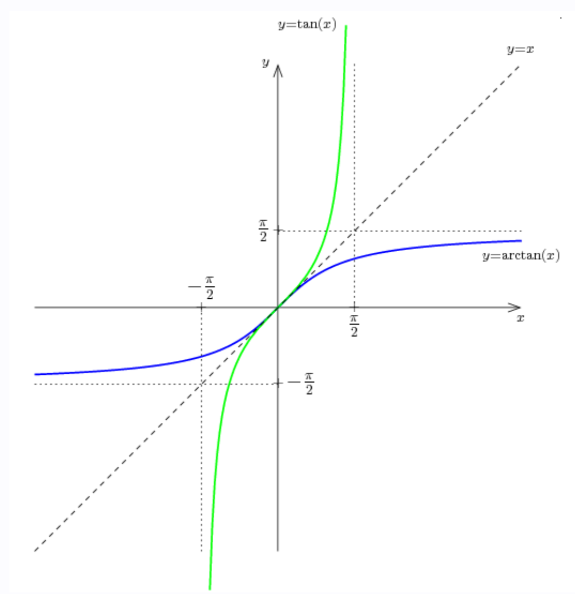
En appliquant le théorème de dérivation pour les fonctions réciproques, on montrerait que la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

On remarque aussi que la pente de la tangente à la courbe en $x = 0$ est $\operatorname{Arctan}'(0) = 1$.

Valeurs remarquables :

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{Arctan}(x)$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$



On retiendra également les relations suivantes, très utiles dans les exercices.

$$\forall x > 0, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x < 0, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Thème 6

Développements limités et applications

Définition (En 0)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que 0 appartient à I. On dit que f admet un développement limité à l'ordre p en 0 s'il existe des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ de $\mathbb{K}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_p x^p + x^p \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Définition (Cas général)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction, a un point de I et $p \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre p en a s'il existe des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ de $\mathbb{K}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \alpha_0 + (x-a)\alpha_1 + \cdots + (x-a)^p \alpha_p + (x-a)^p \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et a un point de I. On a les équivalences suivantes.

- f admet un DL à l'ordre 0 en $a \iff f$ est continue en a,
  et dans ce cas $f(x) = f(a) + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.
- f admet un DL à l'ordre 1 en $a \iff f$ est dérivable en a,
  et dans ce cas $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On peut démontrer, en utilisant la notion de limite, que si f admet un développement limité à un ordre p en un point a, alors il est unique. Les premiers développement limités sont obtenus grâce à la formule de Taylor-Young.

Proposition (Formule de Taylor-Young)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ et $a \in I$. Alors, il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ telle que

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \cdots + (x-a)^p \frac{f^{(p)}(a)}{p!} + (x-a)^p \varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Et donc, f admet un développement limité à l'ordre p en a.

On obtient alors d'autres développements limités par opérations : intégration, combinaison linéaire, produit, composition.

Les développements limités suivants sont à connaître sans aucune hésitation ! Ils sont donnés au point 0, si ce n'est pas le cas, on pourra s'y ramener en posant $u = x - a$ et en utilisant les propriétés algébriques des fonctions usuelles.

La notation $\underset{x \to 0}{o}(x^n)$ désigne toute expression qui peut s'écrire sous la forme $x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Développement limités provenant de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$:

Proposition

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n) &&= \sum_{k=0}^{n} x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n) &&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}(x^n) &&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}+\underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}(x^n) &&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
\mathrm{Arctan}(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) &&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

Développements limités provenant de la fonction exponentielle :

Proposition

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{o}(x^n) &&= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) &&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) &&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})\\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2}) &&= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})\\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) &&= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

Autres :

Proposition

$$\tan(x) = x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

Proposition

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^n)
\end{aligned}$$

On rappelle aussi les équivalents de référence, obtenus par un développement limité à l'ordre 1 (c'est-à-dire un taux d'accroissement) ou à l'ordre 2.

Proposition

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{ch}(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

Rappels sur les comparaisons

Pour les suites numériques

Proposition

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne s'annule pas** (à partir d'un certain rang). On a les équivalences suivantes.

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n) \iff \text{la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1$$

• La relation $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• La relation $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$ signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée**.

• À retenir :

$$\begin{aligned} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n &\iff u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ &\iff u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \end{aligned}$$

Ainsi par exemple, puisque $\ln^2(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ on a :

$$n + \ln^2(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Dans la somme $n + \ln^2(n)$, on peut donc négliger le terme $\ln^2(n)$. Dans un produit, ce n'est pas possible (faire le quotient et se convaincre qu'il ne tend pas vers 1).

$$\cancel{n\ln^2(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$$

Une remarque analogue vaut pour les fonctions numériques.

Pour les fonctions numériques

Proposition

Soient deux fonctions numériques f et g définies sur un intervalle I et $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ un point ou un extrémité de I. On suppose que g **ne s'annule pas** (au voisinage de a). On a les équivalences suivantes.

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 1$$

• La relation $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$ signifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

• La relation $f(x) = \underset{x\to a}{O}(1)$ signifie que f est **bornée** au voisinage de a.

• À retenir :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) &\iff f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \\ &\iff f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x)) \end{aligned}$$

• On a aussi :

Si $\boxed{\ell \neq 0}$ alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$$

On a une propriété analogue pour les suites numériques.

Attention, ce résultat est faux lorsque $\ell = 0$.

$$\cancel{\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 0}$$

Thème 7

Primitives et intégration

7.1 Primitives usuelles

Fonctions	Primitives (à cst près)	Domaines de validité
$(x-a)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$]0,+\infty[$
$e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$\spadesuit\ \dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$\spadesuit\ \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2(1-x)} + \dfrac{1}{2(1+x)}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1,1[$

7.2 Rappels généraux

La notation $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ désigne l'intégrale sur le segment $[a,b]$ de la f fonction **continue** sur $[a,b]$.
On appelle primitive de f sur l'intervalle I toute application F dérivable sur I avec $F' = f$.
Les primitives de f (s'il en existe) sur un **intervalle** donné diffèrent d'une constante.
Le théorème fondamental de l'Analyse donne l'existence de primitives pour des fonctions continues sur un intervalle.

Proposition (Théorème fondamental de l'Analyse ou Théorème fondamental de l'Intégration)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** et a un point de I. Alors la fonction F_a définie sur I par

$$\forall x \in I,\ F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est **la** primitive de f qui s'annule en a. En particulier, pour tout $x \in I$ on a $F_a'(x) = f(x)$ et $F_a(a) = 0$.

Ce théorème donne le mécanisme de calcul suivant :
Pour calculer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, on calcule la différence $F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f. Les constantes disparaissent naturellement ce qui s'écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ avec } F(b) - F(a) \text{ que l'on note souvent } \Big[F(t)\Big]_a^b \text{ ou } F]_a^b.$$

On notera $\displaystyle\int f(x)dx$ ou $\displaystyle\int^x f(t)dt$ une primitive générique de f sur un intervalle donné.
Par exemple, sur $\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + Cte$ ou encore $\displaystyle\int^x tdt = \frac{1}{2}x^2 + Cte$.

7.3 Primitivations « à vue »

On rappelle que si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions vérifiant :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J,
- $\forall x \in J,\ u(x) \in I$,

alors la fonction $f \circ u : x \longmapsto f(u(x))$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et de dérivée $(f \circ u)' : x \longmapsto u'(x).f'(u(x))$.

Certaines intégrales peuvent donc se calculer « à vue ». On vérifiera le domaine de validité de la dérivée composée.

- $\displaystyle\int u'(x)u^\alpha(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) + C$ avec $\alpha \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C$
- $\displaystyle\int u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)} + C$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{Arctan}(u(x)) + C$
- $\displaystyle\int u'(x)\cos(u(x))\mathrm{d}x = \sin(u(x)) + C$
- $\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))\mathrm{d}x = -\cos(u(x)) + C$ etc...

Exemples : $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C$ ou encore $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)} = \ln|\ln(x)| + C$.

7.4 Calcul de primitives du type $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{at^2+bt+c}$ avec $a \neq 0$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$

7.4.1 Rappel : mise sous forme canonique d'un trinôme

On rappelle ici comment écrire sous forme canonique une fonction polynomiale de degré 2. Mieux vaut retenir la démarche que le résultat !
On considère $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a non nul. L'idée est de faire apparaître le début d'un carré :

- $\displaystyle\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \boxed{x^2 + \frac{b}{a}x} + \frac{b^2}{4a^2}.$
- $\displaystyle P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(\boxed{x^2 + \frac{b}{a}x} + \frac{c}{a}\right).$

On a donc, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$, l'égalité :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

On pourra ensuite discuter selon le corps dans lequel sont menés les calculs ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), mais aussi selon la nullité de Δ ou encore le signe de Δ si l'on travaille sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Lorsqu'un trinôme est déjà écrit sous forme canonique, il est bien maladroit d'en chercher les racines en le développant et en calculant ensuite son discrimant Δ ...

Par exemple : $(X-3)^2 - 16 = \Big((X-3)-4\Big)\Big((X-3)+4\Big) = (X-7)(X+1)$. C'est très rapide !

7.4.2 Cas où le dénominateur se factorise sur $\mathbb{R}$

Dans ce qui suit, on note $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ le discriminant du dénominateur.
Rappel : On connaît déjà pour $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$:

$$\int \frac{1}{u-\alpha}\mathrm{d}u = \ln(\mid u - \alpha \mid) + C \qquad \int \frac{1}{(u-\alpha)^2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{u-\alpha} + C$$

Attention, ces égalités n'ont pas de sens si $\alpha \in \mathbb{C}$.

- si $\Delta = 0$, le dénominateur a une racine double notée r, ce qui s'écrit $ax^2 + bx + c = a(x-r)^2$ et alors :

$$\boxed{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-r)^2}\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{a(x-r)} \;+\; C}$$

- si $\Delta > 0$, le dénominateur a deux racines distinctes que l'on note r_1 et r_2, ce qui s'écrit $ax^2 + bx + c = a(x-r_1)(x-r_2)$. On effectue alors une décomposition en éléments simples. Il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}, \qquad \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{\alpha_1}{x-r_1} + \frac{\alpha_2}{x-r_2}.$$

On peut déterminer r_i en multipliant l'égalité précédente par $x - r_i$, en simplifiant les fractions, et en faisant tendre x vers r_i dans l'égalité. Le calcul donne :

$$\alpha_1 = \frac{1}{a(r_1-r_2)} \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{a(r_2-r_1)}.$$

On a donc finalement :

$$\boxed{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x \;=\; \alpha_1\int \frac{1}{x-r_1}\mathrm{d}x \;+\; \alpha_2\int \frac{1}{x-r_2}\mathrm{d}x \;=\; \alpha_1 \ln|x-r_1| \;+\; \alpha_2 \ln|x-r_2| \;+\; C.}$$

7.4.3 Cas où le dénominateur n'a pas de racine réelle

Idée : mise sous forme canonique du trinôme au dénominateur :

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4}\right)$$

avec $\Delta = b^2-4ac<0$ par hypothèse.

- **Rédaction 1 :** On connaît déjà $\displaystyle\int \frac{1}{u^2+A^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{A}\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{A}\right)+C$.

  On choisit A réel tel que $A^2 = -\dfrac{\Delta}{4}>0$ et on pose $\alpha = \dfrac{b}{2a}$. On obtient :

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x+\alpha)^2+A^2}\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{a}\frac{1}{A}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+\alpha}{A}\right) \;+\; C.$$

- **Rédaction 2 :** On connaît déjà $\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \mathrm{Arctan}(u)+C$.

  On choisit A réel tel que $A^2 = -\dfrac{\Delta}{4}>0$ et on pose $\alpha = \dfrac{b}{2a}$.

$$(x+\alpha)^2+A^2 = A^2\left(\left(\frac{x+\alpha}{A}\right)^2+1\right)$$

  On effectue alors le changement de variable $u = \dfrac{x+\alpha}{A}$ (changement de variable affine) dans $\displaystyle\int \frac{1}{A^2(\,(\frac{x+\alpha}{A})^2+1\,)}\mathrm{d}x$.

  On est ainsi ramené à l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$ que l'on sait calculer.

7.5 Calcul de primitives du type $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{at}\sin(bt)\mathrm{d}t$ avec $a,b\in\mathbb{R}$

7.5.1 Par une double intégration par parties

On rappelle la proposition suivante.

Proposition (Intégration par parties (IPP))

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors on a

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

On peut calculer les intégrales de fonctions du type $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ en effectuant deux intégrations par parties successives. Il faut pour cela prendre deux fois une primitive de la fonction exponentielle, ou bien prendre deux fois une primitive des fonctions trigonométriques.
L'intégrale que l'on cherche à calculer apparaît alors de nouveau, et en l'isolant avec la première on peut calculer sa valeur. Attention lorsqu'on doit diviser par un paramètre qui pourrait s'annuler : il faut alors distinguer plusieurs cas !

Exemple : Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, calculons $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(x)\mathrm{d}x$.

On précise tout d'abord que la fonction $x\longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(x)$ est continue sur le segment $[0,2\pi]$, et donc l'intégrale $I(\alpha)$ est bien définie.

Pour calculer les primitives de $x\longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$, on doit distinguer les cas $\alpha=0$ et $\alpha\neq 0$.

$\boxed{\text{Si } \alpha=0,}$ alors $I(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(x)\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_0^{2\pi} = 0$.

On suppose désormais que $\boxed{\alpha\neq 0.}$

• **Première intégration par parties :** On pose $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ et on a :

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad u'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

On obtient : $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(x)\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(x)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(x)\mathrm{d}x$

• **Seconde intégration par parties :** On pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$.
Un calcul similaire au précédent conduit à :

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(x)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}I(\alpha).$$

En reportant dans la première égalité, on obtient :

$$\boxed{I(\alpha)} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha 2\pi} - 1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\boxed{I(\alpha)}$$

Et donc $\dfrac{1+\alpha^2}{\alpha^2}I(\alpha) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha 2\pi} - 1}{\alpha}$, ce qui donne, puisque $1 + \alpha^2 \neq 0$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad I(\alpha) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}(\mathrm{e}^{\alpha 2\pi} - 1).$$

Remarque 1 : Cette égalité est encore valable si $\alpha = 0$ puisque $I(0) = 0$.

Remarque 2 : En intégrant successivement la fonction cos, puis la fonction sin, et en dérivant la fonction exponentielle, il n'y aurait pas eu de distinction de cas puisque la dérivé de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est toujours $x \longmapsto \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}$.

7.5.2 En passant par l'exponentielle complexe

On rappelle la proposition suivante.

Proposition

Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable alors l'application $F : x \longmapsto \mathrm{e}^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}.$$

En particulier, si $\varphi(x) = (a + ib)x$ avec $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, alors avec les notations précédentes, $F'(x) = (a+ib)\mathrm{e}^{(a+ib)x}$.
On en déduit donc des primitives pour des fonctions exponentielles à valeurs **complexes**.

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est non nul, alors : $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{d}t \; = \; \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x} \; + \; C.$

On utilise ces primitives pour calculer (on suppose ici $(a, b) \neq (0, 0)$) :

$$\int^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\mathrm{d}t \; = \; \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\int^x \mathrm{e}^{(a+ib)t}\mathrm{d}t\right) \qquad \text{et} \qquad \int^x \mathrm{e}^{at}\sin(bt)\mathrm{d}t \; = \; \mathcal{I}\mathrm{m}\left(\int^x \mathrm{e}^{(a+ib)t}\mathrm{d}t\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{avec} \quad \int^x \mathrm{e}^{(a+ib)t}\mathrm{d}t \quad &= \quad \frac{1}{a+ib}\mathrm{e}^{(a+ib)x} + C \; = \; \frac{a-ib}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) + C \\
&= \quad \underbrace{\left(\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx))\right)}_{\in\mathbb{R} \text{ car } a,b\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\left(\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos(bx) + a\sin(bx))\right)}_{\in\mathbb{R} \text{ car } a,b\in\mathbb{R}} + C
\end{aligned}$$

avec $C = A + iB \in \mathbb{C}$. Et donc :

$$\int^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + A \quad \text{et} \quad \int^x \mathrm{e}^{at}\sin(bt)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos(bx) + a\sin(bx)) + B$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Thème 8

Suites numériques remarquables

8.1 Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite **arithmético-géométrique** est une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe $a, b \in \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b.$$

Dans le cas où, $a = 1$, on retrouve les suites **arithmétiques**.
Et dans le cas où $b = 0$, on retrouve les suites **géométriques**.

On peut expliciter (c'est-à-dire trouver une expression) le terme u_n en fonction de u_0 et de n.

• Si $a = 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nb$.

• Si $b = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 a^n$.

• Sinon (et surtout si $a \neq 1$), on trouve rapidement l'expression de u_n en suivant la démarche suivante (ne pas apprendre la formule par coeur, mais bien connaître la démarche !).

- Dans un premier temps, on détermine les suites **constantes** solutions. Cela revient à déterminer $\ell \in \mathbb{K}$ tel que :

$$a\ell + b = \ell \tag{$\star$}$$

- On pose alors $v_n = u_n - \ell$ et on vérifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.
- On en déduit enfin l'expression de v_n, puis celle de $u_n = v_n + \ell$.

Il faut savoir déterminer ces suites sans aucune hésitation.

8.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ pour laquelle il existe des scalaires $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$(\mathcal{E}_{\mathbb{K}}) \ : \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

Si l'on connait u_0 et u_1, on peut trouver u_2, et de proche en proche, on peut trouver tous les termes généraux de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
À l'image des suites géométriques, on peut déterminer l'expression du terme général u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
Dans la suite, on appelle **équation caractéristique** associée à la relation $(\mathcal{E}_{\mathbb{K}})$, l'équation de degré 2 suivante :

$$(EC) : \quad r^2 + ar + b = 0,$$

et on note $\Delta = a^2 - 4b$ son discrimant.

Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$:

- $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ alors $(EC) : r^2+ar+b=(r-r_0)^2=0$ possède une solution double $r_0 \in \mathbb{C}$, et on peut trouver $A, B \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (An+B)r_0^n.$$

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) = \left\{ \left(Anr_0^n + Br_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{ \left(nr_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \left(r_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$ alors l'équation $\delta^2=\Delta$ possède deux solutions distinctes $+\delta$ et $-\delta$ dans $\mathbb{C}$ (ce sont les *racines carrées* de Δ, mais attention la notation $\sqrt{\ }$ est exclusivement réservée aux réels positifs). L'équation caractéristique possède alors deux solutions distinctes. On a $(EC) : r^2+ar+b=(r-r_1)(r-r_2)=0$ avec :

$$r_1 = \frac{-a+\delta}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-a-\delta}{2}.$$

On peut alors trouver $A, B \in \mathbb{C}$ tels que que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) = \left\{ \left(Ar_1^n + Br_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{ \left(r_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \left(r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\}.$$

Cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:

On peut toujours étudier les suites **complexes** solutions et utiliser le premier cas. Mais si l'on cherche les suites **réelles** solutions, trois cas seront à distinguer.

- $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ alors $(EC) : r^2+ar+b=(r-r_0)^2=0$ possède une solution double $r_0 \in \mathbb{R}$, et on peut trouver $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (An+B)r_0^n.$$

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) = \left\{ \left(Anr_0^n + Br_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{ \left(nr_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \left(r_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ alors $(EC) : r^2+ar+b=(r-r_1)(r-r_2)=0$ possède alors deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et on peut trouver $A, B \in \mathbb{R}$ tels que que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) = \left\{ \left(Ar_1^n + Br_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{ \left(r_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \left(r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ alors $(EC) : r^2+ar+b=(r-r_1)(r-r_2)=0$ possède alors deux solutions complexes conjuguées que l'on peut écrire sous forme exponentielle : $r_1=\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ et $r_2=\rho\mathrm{e}^{-i\theta}$. D'après le cas complexe, on sait déjà qu'il existe $A_0, B_0 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = A_0r_1^n + B_0r_2^n = \rho^n\left(A_0\mathrm{e}^{in\theta} + B_0\mathrm{e}^{-in\theta}\right).$$

En utilisant les formules d'Euler et la formule de Moivre, on peut démontrer que les suites réelles solutions sont celles pour lesquelles il existe $A, B \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right).$$

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) = \left\{ \left(A\rho^n\cos(n\theta) + B\rho^n\sin(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{ \left(\rho^n\cos(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \left(\rho^n\sin(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\}.$$

Dans tous les cas, on a la proposition suivante.

Proposition

Pour tous $a, b \in \mathbb{K}$, l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2.

8.3 Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On veut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

On ne peut pas toujours le faire ! Cela dépend de la fonction f et du premier terme u_0.
Néanmoins, si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou si l'intervalle I est stable par f (c'est-à-dire $f(I) \subset I$) alors on pourra toujours calculer u_n.

8.3.1 Limites éventuelles

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est **continue** sur I alors on a l'implication :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \quad \Longrightarrow \quad f(\ell) = \ell.$$

Ainsi, si f est continue sur I, les seules limites possibles pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont **contenues dans** I sont des points fixes de f.

8.3.2 Monotonie

Les énoncés qui suivent ne sont pas explicitement au programme. Il faudra si besoin, les démontrer.

Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on s'intéresse au signe de

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Avec les notations précédentes, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on a l'implication suivante.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose $f(I) \subset I$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et on a :

- si pour tout $x \in I,\ f(x) \geq x$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- si pour tout $x \in I,\ f(x) \leq x$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On peut aussi utiliser la monotonie de f (à ne pas confondre avec celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Plus précisément, on a :

- si $u_1 > u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- si $u_1 < u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

La preuve de ce résultat se fait en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$ par récurrence sur n.

8.3.3 Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

Proposition (Inégalité des Accroissements Finis)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $|f'(x)| \leq M$ alors on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Application : si l'on sait que f est M-lipschitzienne sur I avec $M \in]0, 1[$, c'est-à-dire que $\forall a, b \in I,\ |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ en l'appliquant avec $a = u_n \in I$ et $b = \ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$ (s'il existe), on obtient :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M|u_n - \ell|.$$

Et par récurrence :

$$|u_n - \ell| \leq M^n|u_n - \ell|.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = 0$ (car $M \in]0, 1[$), le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Thème 9

Séries numériques

9.1 Séries géométriques

Les séries géométriques interviennent dans de très nombreux domaines des mathématiques. Il est absolument nécessaire de connaître **tout** ce paragraphe **sans aucune hésitation**.

Définition

On appelle suite géométrique de raison $a \in \mathbb{K}$, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n.$$

On peut alors montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n = \lambda a^n$.

Définition

On appelle série géométrique de raison $a \in \mathbb{K}$, toute série dont le terme général est une suite géométrique de raison a.

Avec les notations précédentes, quitte à factoriser λ (s'il est non nul), l'étude des séries géométrique se ramène à celle des séries $\sum a^n$ avec $a \in \mathbb{K}$.

Expression des sommes partielles :
(somme des premiers termes d'une suite géométrique)

Proposition

Si $a \neq 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Si $a = 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = n+1$

Proposition

Soit $a \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence suivante.

$$\sum a^n \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |a| < 1.$$

Et dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Expression des restes partiels : Si $|a| < 1$ alors $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k = \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

Remarque : pour expliciter rapidement (et sans se tromper !) un reste partiel de série géométrique convergente, on peut factoriser par le premier terme. Par exemple, pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $|p| < 1$:

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} p^{j-1} \quad = \quad \underbrace{p^n + p^{n+1} + p^{n+2} + \cdots \quad = \quad p^n \Big(\overbrace{1 + p + p^2 + \cdots}^{\text{çà, on connaît !}} \Big)}_{\text{au brouillon ou de tête}} \quad = \quad p^n . \frac{1}{1-p}.$$

9.2 Théorèmes de comparaison

Proposition (Théorème de comparaison des séries de terme général positif 1)

Soit $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ des séries de terme général réel **positif**.

Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \le u_k \le v_k$, alors :

$\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ converge	$\Longrightarrow$	$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge
$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ diverge	$\Longrightarrow$	$\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ diverge

;

En cas de convergence de $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ on a bien sûr l'inégalité $0 \le \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \le \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

Proposition (Théorème de comparaison des séries de terme général positif 2)

Soit $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ des séries de terme général **positif**.

Si, $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$, alors :

$\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ converge	$\Longleftrightarrow$	$\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge

;

autrement dit :

Si, $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$, alors les séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ sont de même nature.

Proposition

Soit $\sum u_k$ série de terme général réel ou complexe.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k| \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \text{ converge}$$

Et dans ce cas, on a : $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$

Cela motive la définition suivante :

Définition

Soit $\sum u_k$ série de terme général réel ou complexe.

On dit que $\sum u_k$ est une série absolument convergente si $\sum |u_k|$ converge.

Proposition (Théorème de comparaison pour les séries numériques 3)

Soit $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ série à terme général réel ou complexe et $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ de terme général réel **positif**.

$\boxed{\text{Si}}$ l'**une** des quatre comparaisons suivantes est vérifiée :

(1) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \le |u_k| \le v_k$ (3) $|u_k| \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$

(2) $u_k = \underset{k\to+\infty}{O}(v_k)$ (4) $u_k = \underset{k\to+\infty}{o}(v_k)$

et $\boxed{\text{si}}$ $\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k$ **converge**, $\boxed{\text{alors}}$ $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ est absolument convergente et donc convergente.

9.3 Encadrement à l'aide d'intégrales (mise en oeuvre)

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux séries numériques du type $\sum_{n \geq n_0} u_n$ où u_n est donné explicitement par une relation $u_n = f(n)$.

Sous certaines hypothèses, on encadre le terme général $f(n)$ à l'aide d'intégrales. Cela permet ensuite d'obtenir des informations sur les sommes partielles (et en particulier sur la nature de la série), mais aussi sur les restes partiels quand la série converge.

Dans ce qui suit, on se donne une fonction $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

Étape 1 : Soit $k \geq n_0$ un entier. On considère l'intégrale de f sur $[k, k+1]$. La fonction f est décroissante sur $[k, k+1]$ donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

Et par positivité de l'intégrale, on a :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t.$$

Les intégrales $\int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}t$ et $\int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t$ sont des intégrales de fonctions constantes, le calcul donne aisément :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}t = f(k+1) \qquad \text{et} \qquad \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t = f(k).$$

On a donc démontré :

$$\forall k \geq n_0 \ \text{ entier}, \qquad f(k+1) \underset{(1)}{\leq} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \underset{(2)}{\leq} f(k). \qquad (\star)$$

Illustration graphique :

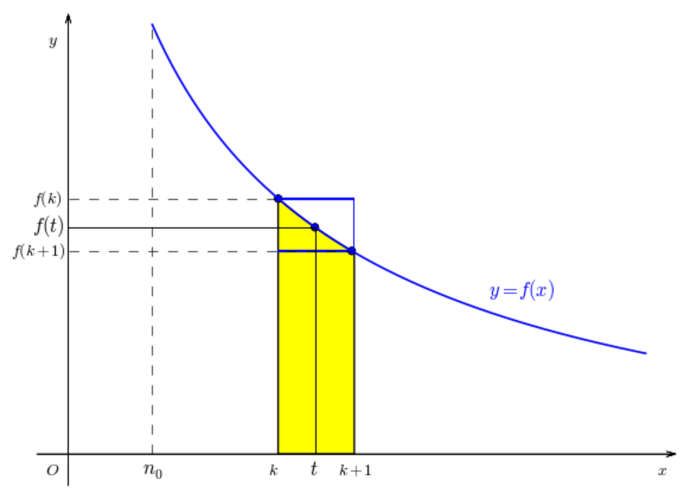
On remarque bien que pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

L'aire du petit rectangle est égale à $f(k+1)$.

Elle est plus petite que l'aire sous la courbe qui vaut $\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$, elle même plus petite que l'aire du grand rectangle égale à $f(k)$.

On retrouve bien graphiquement l'encadrement $(\star)$.



L'encadrement $(\star)$ s'écrit aussi sous forme de deux inégalités.

$$\forall k \geq n_0 \ \text{ entier}, \qquad f(k+1) \underset{(1)}{\leq} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \underset{(2)}{\leq} f(k)$$

L'inégalité (2) nous permet de minorer $f(j)$ en posant $j = k \geq n_0$. L'inégalité (1) nous permet de majorer $f(j)$ en posant $j = k+1 \geq n_0 + 1$.

On obtient donc : $\forall j \geq n_0 + 1$ entier, $\quad f(j) \underset{(1)}{\leq} \int_{j-1}^{j} f(t)\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \int_j^{j+1} f(t)\mathrm{d}t \underset{(2)}{\leq} f(j)$

et aussi l'encadrement suivant.

$$\forall j \geq n_0 + 1 \ \text{ entier}, \qquad \int_j^{j+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(j) \leq \int_{j-1}^{j} f(t)\mathrm{d}t. \qquad (\star\star)$$

Dans la seconde étape, on pourra ajouter des encadrements ($\star$) ou des encadrements ($\star\star$). Il faudra néanmoins être vigilant au domaine de validité : la majoration de ($\star\star$) n'est valable que pour $j \geq n_0 + 1$.

Étape 2 : On ajoute un nombre fini d'encadrements ($\star$) (ou d'encadrements ($\star\star$)).
On obtient par la relation de Chasles, l'encadrement d'une intégrale par des sommes (ou l'encadrement d'une somme par des intégrales).
Quand c'est possible, on calcule ces intégrales et on fait le lien avec le résultat attendu.

Un exemple simple à connaître : Divergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Et par positivité de l'intégrale :

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

• Pour montrer que la série diverge, on minore ses sommes partielles. On ajoute pour $k = 1, \ldots, n$ les inégalités $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.
On obtient, par la relation de Chasles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n$$

• Or, $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\Big]_1^{n+1} = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc par minoration, on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et par conséquent : $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$

9.4 Séries télescopiques

Proposition

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. On a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{q-1} (x_{k+1} - x_k) = x_q - x_p$

Résultat que l'on explique ainsi (simplifications en diagonale) :

$$\left.\begin{array}{cccc} & x_q & - & \cancel{x_{q-1}} \\ + & \cancel{x_{q-1}} & - & \cancel{x_{q-2}} \\ & \vdots & & \vdots \\ + & \cancel{x_{p+2}} & - & \cancel{x_{p+1}} \\ + & \cancel{x_{p+1}} & - & x_p \end{array}\right\} \quad = \quad x_q - x_p$$

En conséquence, puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0$, on a la proposition suivante, que l'on reverra dans l'année.

Proposition

Soit $\sum x_n$ une série numérique. On a l'équivalence suivante.

$$\text{La série } \sum (x_{n+1} - x_n) \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Thème 10

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle suivante.

$$(\mathcal{E}_{\mathbb{K}}) \quad : \quad y'' + ay' + by = 0$$

Dans la suite, on appelle **équation caractéristique** associée à $(\mathcal{E}_{\mathbb{K}})$, l'équation de degré 2 suivante :

$$(EC) : \quad r^2 + ar + b = 0,$$

et on note $\Delta = a^2 - 4b$ son discrimant.

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

- $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = 0$ possède une solution double $r_0 \in \mathbb{C}$, et les solutions (complexes) de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto (At + B)e^{r_0 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) = \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ate^{r_0 t} + Be^{r_0 t} \;\text{ avec }\; A, B \in \mathbb{C} \Big\} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto te^{r_0 t},\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_0 t} \Big\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$ alors l'équation $z^2 = \Delta$ possède deux solutions distinctes $+\delta$ et $-\delta$ dans $\mathbb{C}$ (ce sont les *racines carrées* de Δ, mais attention la notation $\sqrt{\ }$ est exclusivement réservée aux réels positifs). L'équation $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = 0$ possède alors deux solutions (complexes) distinctes :

$$r_1 = \frac{-a + \delta}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a - \delta}{2}.$$

Les solutions (complexes) de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) = \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \;\text{ avec }\; A, B \in \mathbb{C} \Big\} = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_1 t},\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_2 t} \Big\}.$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

On peut toujours étudier les fonctions **complexes** solutions et utiliser le premier cas. Mais si l'on cherche les fonctions **réelles** solutions, trois cas seront à distinguer.

- $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = 0$ possède une solution double $r_0 \in \mathbb{R}$, et les solutions réelles de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto (At + B)e^{r_0 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) = \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ate^{r_0 t} + Be^{r_0 t} \;\text{ avec }\; A, B \in \mathbb{R} \Big\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto te^{r_0 t},\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_0 t} \Big\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = 0$ possède alors deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) = \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \;\text{ avec }\; A, B \in \mathbb{R} \Big\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_1 t},\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_2 t} \Big\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ alors $(EC) : r^2+ar+b=(r-r_1)(r-r_2)=0$ possède deux racines complexes distinctes et conjuguées $z=\alpha \pm i\theta$.
  Les solutions complexes de $(\mathcal{E}_{\mathbb{C}})$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{(\alpha+i\theta)t}+Be^{(\alpha-i\theta)t}=e^{\alpha t}(Ae^{i\theta t}+Be^{-i\theta t})$ avec $(A,B)\in\mathbb{C}^2$.
  Les solutions réelles de $(\mathcal{E}_{\mathbb{R}})$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha t}(C\cos(\theta t)+D\sin(\theta t)$ avec $(C,D)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}) &= \Big\{t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{\alpha t}\cos(\theta t)+Be^{\alpha t}\sin(\theta t) \text{ avec } A,B\in\mathbb{R}\Big\}\\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}\Big\{t\in\mathbb{R}\longmapsto e^{\alpha t}\cos(\theta t),\ t\in\mathbb{R}\longmapsto e^{\alpha t}\sin(\theta t)\Big\}\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a la proposition suivante.

Proposition

Pour tous $a,b\in\mathbb{K}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_{\mathbb{K}}) : \quad y''+ay'+by=0$$

est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2.

On retiendra enfin le résultat particulier suivant, utile dans d'autres disciplines scientifiques.

Proposition

Soit ω un réel **non nul**. Les solutions de $(\mathcal{E})$: $y''+\omega^2 y=0$ sont les (trois façons différentes de les décrire) :

- $y : t\in\mathbb{R}\longmapsto A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$
- $y : t\in\mathbb{R}\longmapsto C\cos(\omega t+\varphi)$ avec $(C,\varphi)\in\mathbb{R}^2$
- $y : t\in\mathbb{R}\longmapsto D\sin(\omega t+\psi)$ avec $(D,\psi)\in\mathbb{R}^2$

Proposition

Soit ω un réel **non nul**. Les solutions de $(\mathcal{E})$: $y''-\omega^2 y=0$ sont les (deux façons différentes de les décrire) :

- $y : t\in\mathbb{R}\longmapsto A\text{ch}(\omega t)+B\text{sh}(\omega t)$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$
- $y : t\in\mathbb{R}\longmapsto Ce^{\omega t}+De^{-\omega t}$ avec $(C,D)\in\mathbb{R}^2$

Thème 11

Sous-espaces vectoriels et applications linéaires

11.1 Sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont on note $+$ et $.$ les lois interne et externe.

Définition

Un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E est un sous ensemble $F \subset E$ non vide qui, muni des lois $+$ et $.$, est un espace vectoriel.

Il est fastidieux d'utiliser cette définition pour montrer qu'un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E.
On utilise quasiment toujours l'une des deux caractérisations suivantes.

Proposition

On a les équivalences suivantes.

$$F \text{ s.e.v. de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ \forall (u,v) \in F^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda.u + \mu.v \in F. \end{cases}$$

$$F \text{ s.e.v. de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F, \\ \forall (u,v) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.u + v \in F. \end{cases}$$

Remarque 1 : Ainsi, un sous-espace vectoriel de E contient toujours 0_E. Et donc un sous-ensemble de E qui ne contient pas 0_E ne peut pas être un s.e.v. de E.

Remarque 2 : En algèbre linéaire, la nature des objets manipulés doit être bien comprise.
Un espace vectoriel F est avant tout un $\boxed{\text{ensemble}}$ (de vecteurs). Il est donc, dans ce cas, complètement insensé d'écrire :

$$\xcancel{F(0) = 0} \qquad\qquad F \text{ n'est pas une fonction!!!}$$

11.2 Applications linéaires

Dans ce paragraphe, E et F sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont on note $+$ et $.$ les lois interne et externe.

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est linéaire elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes.

- $\forall (u,v) \in E^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda.u) = \lambda.f(u).$

ou

- $\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.f(u) + \mu.f(v).$

ou

- $\forall (u,v) \in E^2,\ \forall \lambda, \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda.u + v) = \lambda.f(u) + f(v).$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires, c'est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

On appelle **forme linéaire** une application linéaire de E dans $\mathbb{K} = F$, et **endomorphisme** une application linéaire de E dans $E = F$.

On notera $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, on dira que f est un **isomorphisme** de E sur F. On appelle **automorphisme** de E, un endomorphisme de E qui est bijectif. On notera $\mathcal{GL}(E)$ l'espace vectoriel des automorphismes de E.

Remarque 1 : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors on a $f(0_E) = 0_F$.
En effet, $0_E = 0_{\mathbb{K}}.0_E$ et par linéarité de f, on a $f(0_E) = f(0_{\mathbb{K}}.0_E) = 0_{\mathbb{K}}.f(0_E) = 0_F$.
Il n'y a donc aucun intérêt à vérifier que $f(0_E) = 0_F$ pour montrer que f est linéaire, c'est une conséquence directe de la définition.

Remarque 2 : Là encore, la nature des objets manipulés doit être bien comprise.
Une application linéaire f est avant tout une $\boxed{\text{application}}$. Il est donc, dans ce cas, complètement insensé d'écrire :

$$\xcancel{0 \in f} \qquad\qquad f \text{ n'est pas un ensemble !!!}$$

Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
On appelle **noyau** de f l'ensemble suivant.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0\}.$$

On appelle **image** de f l'ensemble suivant.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \text{ avec } x \in E\} = \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in E \;\; y = f(x)\}.$$

Cette définition s'écrit aussi :

- Pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0.$$

- Pour tout $y \in F$, on a :

$$y \in \mathrm{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x).$$

On peut alors démontrer que :

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E,
- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

On a en outre la proposition suivante.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} \quad & \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}, \\ & \Longleftrightarrow \quad \Big(\forall u \in E, \quad f(u) = 0_F \implies u = 0_E\Big). \end{aligned}$$

Thème 12

Familles libres, liées, génératrices

Dans ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12.1 Cas particulier : famille de 1 vecteur

Définition

Soit $x \in E$. On dit $y \in E$ est combinaison linéaire de x si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad y = \lambda . x$$

Proposition

Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes (la seconde est la contraposée de la première) :

$$(x) \text{ est libre} \iff x \neq 0_E$$

$$\begin{aligned} (x) \text{ est liée} &\iff (x) \text{ n'est pas libre} \\ &\iff x = 0_E. \end{aligned}$$

12.2 Cas particulier : famille de 2 vecteurs

Définition

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. On dit que $y \in E$ est combinaison linéaire de (x_1, x_2) si :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \qquad y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

Définition

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. On dit que (x_1, x_2) est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \qquad \Big(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{K}} \Big).$$

Définition

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. On dit que (x_1, x_2) est liée si (x_1, x_2) n'est pas libre i.e. si :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \qquad \Big((\lambda_1, \lambda_2) \neq (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}) \quad \text{et} \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E \Big).$$

Proposition

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. (x_1, x_2) est liée.
2. $x_1 = 0_E \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad x_2 = \lambda . x_1$.
3. $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad (x_2 = \lambda . x_1 \quad \text{ou} \quad x_1 = \lambda . x_2)$ (i.e. x_1 et x_2 sont colinéaires).

Par conséquent on a l'équivalence suivante.

Proposition

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Si $\boxed{x_1 \neq 0_E}$, alors on a :

$$(x_1, x_2) \text{ est liée} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad x_2 = \lambda . x_1.$$

12.3 Cas général : famille de n vecteurs $(n \geq 2)$

Définition

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On dit que $y \in E$ est combinaison linéaire de $(x_1, \ldots, x_n)$ si :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Définition

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lambda_i = 0_{\mathbb{K}} \right).$$

Définition

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas libre i.e. si :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \left((\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0_{\mathbb{K}}, \ldots, 0_{\mathbb{K}}) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \right).$$

En utilisant cette définition, on peut démontrer les caractérisations suivantes.

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée
2. $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est liée $\quad$ ou $\quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}, \quad x_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$
3. $\exists j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \exists \Big(\lambda_i\Big)_{\substack{i \in \{1, \ldots, n\} \\ i \neq j}} \in \mathbb{K}, \qquad x_j = \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i x_i.$

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Si $\boxed{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \text{ est libre}}$, alors :

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ est liée} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}, \quad x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i.$$

12.4 Famille génératrice d'un espace vectoriel

Définition

Soit $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces n vecteurs est noté $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

$$\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)=\{\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n,\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\}.$$

Pour tout $y\in E$, on a donc :

$$y\in\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)\quad\Longleftrightarrow\quad\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad y=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$$

Proposition

Soit $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$. Alors $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ est un **sous-espace vectoriel** de E . C'est même le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant les $x_1,\dots,x_n$.

Idée : Pour montrer qu'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E, il est parfois bien plus rapide de montrer qu'il s'écrit sous la forme $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$!

Définition

Pour F sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, et $\mathcal{F}=(a_1,...,a_p)\in E^p$ où $p\in\mathbb{N}$.
On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F si $F=\mathrm{Vect}(a_1,...,a_p)$ autrement dit si :

$$\forall y\in F,\quad\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad y=\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n$$

12.5 Base d'un espace vectoriel

Définition

On dira que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice finie, autrement dit, si l'on peut trouver des vecteurs $u_1,\dots,u_p\in E$ tels que

$$E=\mathrm{vect}\{u_1,\dots,u_p\}.$$

Définition

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)\in E^n$. On dira que $\mathcal{B}$ est une **base** de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Proposition

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E **si et seulement si** :

$$\forall x\in E,\quad\exists\,!\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad x=\lambda_1e_1+\dots\lambda_ne_n$$

On retiendra que l'existence du $n-$uplet provient du caractère générateur de $\mathcal{B}$, et que l'unicité provient de son caractère libre.

Proposition

Si E de dimension finie, alors il possède au moins une base et toutes les bases de E ont alors même cardinal, on appelle ce cardinal **dimension** de E et on le note $\dim(E)$.

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$:

libre	**génératrice**
toute famille libre peut se compléter en une base	de toute famille génératrice on peut extraire une base
toute famille libre a au plus n éléments	toute famille génératrice a au moins n éléments
une famille libre ayant n éléments est une base	une famille génératrice ayant n éléments est une base

Thème 13

Formules de changement de base

13.1 Matrice d'un vecteur dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, ce qui signifie que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (écriture unique). On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ le vecteur colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Notations usuelles : on écrit $\boxed{X = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x)}$ ou $\boxed{X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)}$ ou $\boxed{x : X_{\mathcal{B}}}$.

13.2 Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées de $e'_1, \ldots, e'_n$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Notations usuelles : on écrit $\boxed{P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$ ou $\boxed{P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}$.

On rappelle la proposition suivante.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et on a l'égalité (deux notations) :

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \quad \text{ou} \quad \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Proposition (Formule de changement de base (1))

Avec les données précédentes, si $x \in E$, on pose $X = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$.
En notant $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ on a :

$$\boxed{X \ = \ PX'}$$

Au lieu de la démontrer, on illustre cette proposition par un exemple.
Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique, et $e'_1 = 2e_1 + e_2$, $e'_2 = 3e_1 + 2e_2$.
On remarque $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi (x_1, x_2) sont, par définition, ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$. On note (x'_1, x'_2) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. Avec les notations de la proposition, précédente, l'égalité $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2$ s'écrit matriciellement dans la base $\mathcal{B}$:

$$X \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x'_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e'_1} + x'_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{e'_2} = \begin{pmatrix} 2x'_1 + 3x'_2 \\ x'_1 + 2x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \ = \ PX'.$$

13.3 Matrice d'une application linéaire

On définit également la notion de matrice d'application linéaire. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$ de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées des coordonnées de $u(e_1), \ldots, u(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$.

Notations usuelles : $\boxed{M = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)}$ ou $\boxed{M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)}$ ou $\boxed{M = \mathcal{M}at(u, (\mathcal{B}, \mathcal{B}'))}$.

Et quand $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on notera simplement $\boxed{M = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u)}$ ou $\boxed{M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)}$ ou $\boxed{M = \mathcal{M}at(u, \mathcal{B})}$.

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, -x_1 + x_2).$$

On note encore $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc $f(e_1) = (1, -1) = e_1 - e_2$ et $f(e_2) = (3, 1) = 3e_1 + e_2$. Et donc par définition :

$$f(e_1) : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ et } f(e_2) : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{donc} \quad M = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

Intérêt de l'écriture matricielle : Avec les notations précédentes, soient $x \in E$ et $y \in F$. On pose $X = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(y) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(y)$. On a alors

$$\boxed{u(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad MX = Y}$$

Là encore, on illustre cette assertion par un exemple. On considère l'endomorphisme f défini précédemment et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On a effectivement : si $x = (x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$, alors $y = f(x) = (x_1 + 3x_2, -x_1 + x_2) = (x_1 + 3x_2)e_1 + (-x_1 + x_2)e_2$ ce qui s'écrit matriciellement :

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = MX.$$

On reverra dans l'année, d'autres propriétés rendant ce formalisme utile, comme par exemple : « *la matrice de la composée est le produit des matrices* », ou encore « *la matrice de la bijection réciproque est l'inverse de la matrice* ».

Mais on s'intéresse plus particulièrement ici à l'effet d'un changement de base sur une matrice d'application linéaire. Le cas général sera à nouveau détaillé en cours. On présente ici le cas où $F = E$ et donc où u est un **endomorphisme** de E.

Proposition (Formule de changement de base (2))

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ on note :

- $M = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}at(u, \mathcal{B})$,
- $M' = \mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathcal{M}at(u, \mathcal{B}')$,
- $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

On a alors : $\boxed{M' = P^{-1}MP.}$

Remarque : on utilise assez rarement cette relation pour trouver M'. Très souvent, notamment dans le chapitre *Réduction*, on construit M' en revenant à la définition. Il faut pour cela, connaître l'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}'$ et surtout savoir l'exprimer dans cette même base.

Connaissant, M, P et M', la relation $M' = P^{-1}MP$ est alors bien utile pour calculer les puissances de M, ou encore pour déterminer les matrices qui commutent avec M.

Thème 14

Calculs pratiques de déterminants

À retenir :
- Le déterminant d'une matrice possédant une colonne nulle est nul.
- Le déterminant d'une matrice possédant deux colonnes égales est nul.

Il y a des propriétés analogues pour les lignes, grâce au dernier point de la proposition suivante.

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

1. $\det(\lambda.A) = \lambda^n \det(A)$
2. $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$
3. Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
4. $\det(A^T) = \det(A)$

Transformations élémentaires : On décrit l'effet des transformations élémentaires sur le déterminant.

Opérations	Effet
$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j \ (i \neq j)$	déterminant inchangé
$C_i \longleftarrow C_i + \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j C_j$	déterminant inchangé
$C_i \longleftarrow \lambda C_i$	déterminant multiplié par λ
$C_i \longleftrightarrow C_j \ (i \neq j)$	déterminant multiplié par (-1)
$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j \ (i \neq j)$	déterminant inchangé
$L_i \longleftarrow L_i + \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j L_j$	déterminant inchangé
$L_i \longleftarrow \lambda L_i$	déterminant multiplié par λ
$L_i \longleftrightarrow L_j \ (i \neq j)$	déterminant multiplié par (-1)

Développement par rapport à une colonne ou une ligne :

Deux cas simples :

Proposition ($n-1$ **coefficients nuls sur une colonne)**

$$\begin{vmatrix} & & & 0 & & & \\ & A_1 & & \vdots & & A_2 & \\ & & & 0 & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & 0 & & & \\ & A_3 & & \vdots & & A_4 & \\ & & & 0 & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} \text{ où le } a_{i,j} \text{ est en position } (i,j)$$

Proposition ($n-1$ **coefficients nuls sur une ligne)**

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1,j} & & & \\ & A_1 & & \vdots & & A_2 & \\ & & & a_{i-1,j} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & a_{i+1,j} & & & \\ & A_3 & & \vdots & & A_4 & \\ & & & a_{n,j} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} \text{ où le } a_{i,j} \text{ est en position } (i,j)$$

où en fait $\varepsilon = (-1)^{i+j}$ s'obtient aussi grâce au damier de signes :

$$\begin{array}{cccccccccc}
+ & - & + & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \leftarrow 1 \\
- & + & - & & & & & & & \\
+ & - & + & & & & & & & \\
\vdots & & & \ddots & & & & & & \\
\vdots & & & & \varepsilon & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \leftarrow i \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \ddots & + & - & \\
\vdots & & & & \vdots & & & - & + & \leftarrow n \\
\underset{1}{\uparrow} & & & & \underset{j}{\uparrow} & & & & \underset{n}{\uparrow} &
\end{array}$$

Cas général :

Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$, on note $\tilde{\Delta}_{i,j}$ le déterminant obtenu à partir de A en supprimant sa $i$ème ligne et sa $j$ème colonne et aussi

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j}\tilde{\Delta}_{i,j}.$$

À partir des deux cas simples précédents, on peut démontrer le résultat plus général suivant.

Proposition (Cas général)

Soit $A[a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$.

1. Le développement par rapport à la j-ème colonne de A donne

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Delta_{i,j}\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\tilde{\Delta}_{i,j}\end{aligned}$$

2. Le développement par rapport à la i-ème ligne de A donne :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\Delta_{i,j}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\tilde{\Delta}_{i,j}\end{aligned}$$

Très souvent, à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes (ou sur les lignes), on fait apparaître un maximum de 0 sur une même colonne (ou sur une même ligne). On effectue ensuite un développement selon cette colonne (ou cette ligne).

Thème 15

Probabilités et variables aléatoires

15.1 Probabilités (MPSI/PCSI)

Définition (Probabilité)

Soit Ω un ensemble fini. Une probabilité sur Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) \in [0,1]$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad \Big(A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)\Big)$

Les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont appelés **événements** et (Ω, P) est appelé **espace probabilisé (fini)**.

Définition (Probabilité conditionnelle)

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $P(B) > 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On note aussi $P(A \mid B)$.

Proposition

Avec les notations précédentes, P_B est une **probabilité** sur Ω.

Proposition (Formule de Bayes (1))

Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. On a : $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$.

Proposition (Formule des probabilités composées)

Soient $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements.

1. Si $P(A_1) > 0$ alors $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$
2. Si $P\Big(\bigcap_{i=1}^{p-1} A_i\Big) > 0$ alors $P\Big(\bigcap_{i=1}^{p} A_i\Big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1}}(A_p)$

Définition (Système complet d'événements)

Soient $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{P}$ des événements.
On dit que $(A_i)_{i \in \{1,\dots,p\}}$ est un **système complet d'événements**, si c'est une partition de Ω, c'est-à-dire si :

- pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ distincts, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$,
- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$.

Proposition (Formule des probabilités totales)

Soit $(A_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ un **système complet d'évènements** de Ω. On a :

$$P(B)=\sum_{i=1}^{p}P(B\cap A_i).$$

Et si de plus, $A_1,\dots,A_p$ sont de **probabilités non nulles** :

$$P(B)=\sum_{i=1}^{p}P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Proposition (Formule de Bayes (2))

Soit $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ un **système complet d'évènements** de Ω supposés de **probabilités non nulles**.
Pour tout B un événement de **probabilité non nulle**, on a :

$$\forall j\in[\![1,p]\!],\quad P_B(A_j)=\frac{P_{A_j}(B)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{p}P_{A_i}(B)P(A_i)}$$

15.2 Variables aléatoires (MPSI/PCSI)

Dans tout ce qui suit l'univers Ω est un ensemble fini.

Définition (Indépendance)

Soient $X:\Omega\to\mathbb{R}$ et $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. On note $X(\Omega)=\{x_1,...,x_p\}$ avec $x_1,...,x_p$ distincts et $Y(\Omega)=\{y_1,...,y_q\}$ avec $y_1,...,y_q$ distincts.
On dit que X et Y sont (stochastiquement) indépendantes (et on note $X\perp\!\!\!\perp Y$) si :

$$\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!],\qquad P(X=x_i,Y=y_j)=P\Big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\Big)=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$$

Définition (Espérance)

Soit $X:\Omega\to\mathbb{K}$, une variable aléatoire réelle ou complexe. On note $X(\Omega)=\{x_1,...,x_p\}$ avec $x_1,...,x_p$ distincts.
On appelle **espérance de** X le réel ou complexe :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)\qquad\text{soit aussi :}\qquad E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}xP(X=x).$$

Proposition (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω et $f:\ X(\Omega)\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K}$ une fonction. On note $X(\Omega)=\{x_1,...,x_p\}$ avec $x_1,...,x_p$ distincts. Alors $f\circ X$ est une variable aléatoire réelle sur Ω et on a :

$$E(foX)=\sum_{x\in X(\Omega)}f(x)P(X=x)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)P(X=x_i).$$

Proposition (Propriétés de l'espérance)

Soient X,Y deux variables aléatoires réelles ou complexes sur Ω.

1. **Linéarité :** pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$ on a :
$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)\qquad\text{et}\qquad E(\lambda.X)=\lambda.E(X)$$
En particulier pour tous $a,b\in\mathbb{K}$, on a : $E(aX+b)=aE(X)+b$.
2. Si X et Y **indépendantes** alors $E(X.Y)=E(X).E(Y)$

Définition (Variance)

Soit X une variable aléatoire **réelle** sur Ω.

1. On appelle variance de X le réel **positif** $V(X) = E\Big((X-E(X))^2\Big) \overset{\text{Form. du Transfert}}{=} \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)(x-E(X))^2$.
2. On appelle écart type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires **réelles** sur Ω. On a :

1. $\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$ et donc, comme $V(X) \geq 0$, on a toujours $(E(X))^2 \leq E(X^2)$.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $V(aX+b) = a^2V(X)$
   où dans le premier membre b est la variable aléatoire constante égale au réel b.
3. Si X et Y sont **indépendantes** alors $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

Définition (Covariance)

Soient X et Y deux variables aléatoires **réelles** sur Ω. On appelle covariance de X et Y :

$$\text{Cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))).$$

On dit que X et Y sont **décorrelées si** $\text{Cov}(X,Y) = 0$.

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires **réelles** sur Ω. On a :

1. $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
2. Si X et Y sont indépendantes alors elles sont décorrélées i.e. $\text{Cov}(X,Y) = 0$ (réciproque fausse).
3. Dans le cas général : $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\text{Cov}(X,Y)$.

Proposition (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. Si X est à valeurs **positives**, alors on a :

$$\forall a > 0, \quad P\Big(X \geq a\Big) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire **réelle** sur Ω. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\Big(|X-E(X)| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

15.3 Lois au programme

nom	**notation**	$X(\Omega)$	**loi de probabilité**	$E(X)$	$V(X)$
loi uniforme	$X \sim \mathcal{U}[\![1,n]\!]$	$[\![1,n]\!]$	$P(X=k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
loi de Bernoulli	$X \sim \mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p = q$	p	$pq = p(1-p)$
loi binomiale	$X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$	np	$npq = np(1-p)$

Thème 16

Calcul différentiel

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme et de sa distance euclidiennes usuelles :

$$\forall \overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \overrightarrow{v} = (x',y') \in \mathbb{R}^2, \qquad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad d(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

16.1 Continuité

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est continue en $\overrightarrow{u_0} = (x_0,y_0)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \quad \forall \overrightarrow{u} = (x,y) \in U, \qquad \Big(\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \leq \eta \implies |f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon\Big)$$

On dit que f est continue sur U si elle l'est en tout point de U.

On peut montrer que les fonctions coordonnées $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et que les fonctions polynomiales en les coordonnées le sont aussi.

16.2 Dérivées partielles

On donne ici une approche très pratique.

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application et $\overrightarrow{u_0} = (x_0,y_0) \in U$.

• On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (x_0,y_0) si l'application partielle $x \longmapsto f(x,y_0)$ est dérivable en x_0.
Dans ce cas, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$.

• On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en (x_0,y_0) si l'application partielle $y \longmapsto f(x_0,y)$ est dérivable en y_0.
Dans ce cas, on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$.

Dans les exercices, on cherchera d'abord à utiliser les opérations sur les fonctions dérivables. Dans le cas où elles ne s'appliquent pas, on reviendra à la définition en étudiant les limites correspondantes.

Lorsque f admet des dérivées partielles en tout point de U, on peut définir les fonctions **dérivées partielles** :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \in U \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \in U \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

16.3 Développement limité à l'ordre 1

Définition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f admet des dérivées partielles en tout point de U, et si les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.

Proposition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors elle admet le développement limité suivant à l'ordre 1 en tout point (x_0, y_0) de U :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) \ + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}_{=df_{(x_0,y_0)}(h,k)} + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k) \qquad \text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

Définition (Différentielle, Gradient)

Soit U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

• On définit la différentielle de f en $(x_0, y_0) \in U$ par :

$$df_{(x_0,y_0)} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (h,k) & \longmapsto \quad df_{(x_0,y_0)}(h,k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \end{cases}$$

C'est une **forme linéaire** sur $\mathbb{R}^2$.

• On définit le vecteur gradient de f en $(x_0, y_0) \in U$ par :

$$\nabla f(x_0,y_0) = \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

• Avec ces définitions, on a $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$, $df_{(x_0,y_0)}(h,k) = \left\langle \nabla f(x_0,y_0) \middle| (h,k) \right\rangle$, où $\langle \ | \ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

16.4 Règle de la chaîne

On rappelle que si $f : x \in J \subset \mathbb{R} \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$ et si $\varphi : t \in I \subset \mathbb{R} \longmapsto \varphi(t) \in J$ sont dérivables, alors $F = f \circ \varphi : t \longmapsto f(\varphi(t))$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad F'(t) = (f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$$

ce que l'on écrit encore $\dfrac{d(f\circ\varphi)}{dt} = \left(\left(\dfrac{df}{dx}\right) \circ \varphi\right) \times \dfrac{dx}{dt}$ où l'on a posé $x = \varphi(t)$, voire $\dfrac{dF}{dt} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dt}$.

La règle de la chaîne est la généralisation de cet énoncé, pour les fonctions de deux variables :

Proposition

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\varphi : t \in I \longrightarrow \varphi(t) = (x(t), y(t)) \in U$ où $x, y : I \to \mathbb{R}$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors, $F = f \circ \varphi : t \longmapsto f(\varphi(t)) = f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{dF}{dt}(t) \ = \ \frac{d}{dt}\Big(f(x(t),y(t))\Big) \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) \ = \ \Big\langle \nabla f(x(t),y(t)) \ \Big| \ (x'(t),y'(t)) \Big\rangle$$

Ainsi on a : $\dfrac{d(f o \varphi)}{dt} = \left(\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \varphi\right) . \dfrac{dx}{dt} + \left(\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \circ \varphi\right) . \dfrac{dy}{dt}$ soit en abrégeant, pour mémoriser :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left\langle \nabla f(x,y) \middle| (x',y') \right\rangle.$$