Chapitre 9

Réduction

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

9.1 Sous-espaces stables

9.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et F un sous-espace vectoriel de E.
• On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$, autrement dit si

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

• Dans ce cas, on appelle endomorphisme induit par u sur F, l'endomorphisme suivant de F :

$$\tilde{u} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \tilde{u}(x) = u(x) \end{array} \right.$$

Attention : Ne pas confondre la notion d'**endomorphisme induit** $\tilde{u} : F \longrightarrow F$ (qui nécessite un sous-espace stable) et la notion de **restriction** $u_{|_F} : F \longrightarrow E$.

Exemple 9.1. *On note $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ l'endomorphisme qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe son polynôme dérivé $D(P) = P'$.*
La **restriction** *de D à $\mathbb{R}_n[X]$ est l'application*

$$D_{|_{\mathbb{R}_n[X]}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

*On remarque que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $D(P) = P' \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D. On peut donc définir l'***endomorphisme induit** *par D sur $\mathbb{R}_n[X]$:*

$$\tilde{D} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

Proposition 1

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.

Preuve.(D1)

□

Remarque : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
On suppose que $E = F \oplus G$ et on se donne une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$.

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{base\ de\ F}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{base\ de\ G})$$

Si F est stable par l'endomorphisme u, alors, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $u(e_i) \in F = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_p\}$ et donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme suivante :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) =$$

Par construction, la matrice A est aussi la matrice de l'endomorphisme induit $\tilde{u}$ par u sur F dans la base $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$.

9.1.2 Droites stables

Proposition 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ un vecteur **non nul.** On note $D = \mathrm{Vect}\{x\}$. On a alors l'équivalence suivante.

$$D \text{ est stable par } u \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x.$$

Preuve.(D2)

□

Corollaire 1

On suppose que E est de dimension finie et que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonale} \quad &\iff \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{K}, \quad u(e_i) = \lambda_i e_i \\ &\iff \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{Vect}\{e_i\} \text{ est stable par } u\end{aligned}$$

9.2 Éléments propres

9.2.1 Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
• Soit $x \in E$. On dit que x est vecteur propre de u si

$$x \neq 0 \ \text{ et } \ \exists \lambda \in \mathbb{K}, \ u(x) = \lambda x.$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u si

$$\exists x \in E, \ x \neq 0 \text{ et } u(x) = \lambda x.$$

• On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u :

$$\text{Sp}(u) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \ \exists x \in E \setminus \{0\}, \ u(x) = \lambda x\}.$$

Exercice de colle (E1)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que si f est de rang 1, alors il possède au moins une valeur propre.

Exercice de colle (E1)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que si $x \in E$ est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \text{Im}(f)$.

Exercice de colle (E2)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme D de E défini par : $\forall f \in E, \quad D(f) = f'$.

Définition 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On dit que X est vecteur propre de A si

$$X \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K},\ AX = \lambda X.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de A si

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X.$$

- On appelle spectre de A l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ AX = \lambda X\}.$$

Exemple 9.2. *Déterminer les éléments propres de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9.2.2 Sous-espaces propres

Proposition 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff u - \lambda Id_E \text{ n'est pas injectif} \\ &\iff \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E) \neq \{0\} \end{aligned}$$

Si de plus E est de dimension finie, on a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff u - \lambda Id_E \text{ n'est pas bijectif} \\ &\iff \det(u - \lambda Id_E) = 0 \end{aligned}$$

Preuve.

□

Définition 4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est valeur propre de u, on appelle sous-espace propre de u associé à λ, le sous-espace vectoriel suivant de E.

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E) = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}.$$

Proposition 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \end{aligned}$$

Définition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est valeur propre de A, on appelle sous-espace propre de A associé à λ, le sous-espace vectoriel suivant de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = \lambda X\}.$$

Proposition 5

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \circ v = v \circ u$ alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Preuve.

□

Proposition 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des valeurs propres distinctes de u alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe.

Preuve.(D2) On le montre par récurrence sur n.

□

Corollaire 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de u alors la famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est libre.
On dispose d'un résultat analogue pour les vecteurs propres de matrices.

Preuve.

□

Application : Toute sous-famille finie de $\{f_\lambda : x \longmapsto e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est libre.

9.2.3 Éléments propres de $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** dont on se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On a alors les correspondances suivantes.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad ------> \qquad X = \mathcal{M}_\mathcal{B}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$u \in \mathcal{L}(E) \qquad ------> \qquad A = \mathcal{M}_\mathcal{B}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$y = u(x) \qquad ------> \qquad Y = \mathcal{M}_\mathcal{B}(y) = AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Et donc, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \exists x \in E \setminus \{0\},\ u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ AX = \lambda X \\ &\iff \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)).}$

De plus, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$, alors on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff AX = \lambda X \ \text{ avec } X = \mathcal{M}_\mathcal{B}(x) \\ &\iff X \in E_\lambda(A) \end{aligned}$$

Et donc on a la correspondance suivante.

$$E_\lambda(u) \qquad ------> \qquad E_\lambda(A)$$

Proposition 7

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables alors, elles ont mêmes valeurs propres : $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

Preuve.

□

9.2.4 Exemples importants : éléments propres d'un projecteur, d'une symétrie

Exemple 9.3. *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On sait alors que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et que p est la projection sur $F = \mathrm{Im}(p)$ dans la direction de $G = \mathrm{Ker}(p)$. On suppose ici que p n'est pas l'endomorphisme nul, ni l'identité.*
On cherche $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ non nul tel que $p(x) = \lambda x$.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ non nul. On écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F = \mathrm{Im}(p)$ et $x_G \in G = \mathrm{Ker}(p)$. On a les équivalences suivantes.

Exemple 9.4. *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. On sait alors que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ et que s est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ dans la direction de $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$. On suppose ici que $s \neq \pm\mathrm{Id}$.*
On cherche $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ non nul tel que $s(x) = \lambda x$.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ non nul. On écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $x_G \in G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$. On a les équivalences suivantes.

9.3 Polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe, l'espace vectoriel E est de **dimension finie**. Il est donc équivalent de donner les énoncés sur les matrices et sur les endomorphismes de E.

9.3.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(K),\ X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(K),\ X \neq 0 \text{ et } (A - \lambda I_n)X = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\
& \Longleftrightarrow \quad A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\
& \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n \\
& \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) = 0
\end{aligned}$$

Remarque importante : On retiendra cette équivalence souvent utile dans les exercices.

$$0 \in \operatorname{Sp}(A) \Longleftrightarrow \det(A) = 0 \Longleftrightarrow A \text{ non inversible.}$$

Exercice de colle (E2)

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de $u \circ v$ alors elle est aussi valeur propre de $v \circ u$.
Montrer que cette propriété persiste pour $\lambda = 0$ quand E est de dimension finie.

Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ecrivons $\det(A - \lambda I_n)$:

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}.$$

En développant successivement par rapport à la première ligne, on pourrait démontrer (on le verra dans le paragraphe *Trigonalisation*) que $\det(A - \lambda I_n)$ est un polynôme en λ de degré n et de terme dominant $(-1)^n$:

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \Big(\lambda^n + \text{ termes de degrés } \leqslant n - 1\Big).$$

Définition 6

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme

$$\chi_A(X) = (-1)^n \det(A - XI_n) = \det(XI_n - A).$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme

$$\chi_u(X) = (-1)^n \det(u - XId_E) = \det(XId_E - u).$$

Exemple 9.5. *Polynôme caractéristique d'une projection, d'une symétrie.*

Remarque : Si $E = F \oplus G$ et si F est stable par un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on se donne une base adaptée à la somme directe : Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$:

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\text{base de } F}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\text{base de } G})$$

Alors, si $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$, et si $\tilde{u}$ est l'endomorphisme induit par u sur F, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(\tilde{u}) & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \chi_u(X) = (-1)^n \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) - XI_n) &= (-1)^n \begin{vmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(\tilde{u}) - XI_p & C \\ 0 & D - XI_{n-p} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^p(-1)^{n-p} \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(\tilde{u}) - XI_p) \det(D - XI_{n-p}) \\ &= \chi_{\tilde{u}}(X)\chi_D(X) \end{aligned}.$$

Ainsi, le polynôme caractéristique de $\tilde{u}$ divise celui de u.

Proposition 8

- Si $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie n, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\chi_u = \chi_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)}$.
- Si deux matrices sont semblables alors elles ont même polynôme caractéristique.

Mais la réciproque est fausse.

Preuve.

□

9.3.2 Lien avec les valeurs propres

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 9

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0.$$
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On a
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0.$$

Exemple 9.6. *Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ *une matrice triangulaire. On a* $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1-\lambda & \star & \dots & \star \\ 0 & a_2-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & a_n-\lambda \end{vmatrix}$.

Et donc $\chi_A(\lambda) = (-1)^n(a_1-\lambda)(a_2-\lambda)\cdots(a_n-\lambda) = (\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\cdots(\lambda-a_n)$. *Ainsi :*

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

Corollaire 3

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres distinctes.
- Si $\dim(E) = n$, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au plus n valeurs propres distinctes.

Preuve.

□

Corollaire 4

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.
- Si E est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension finie, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au moins une valeur propre.

Preuve.

□

9.3.3 Multiplicité

Définition 7

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
On appelle multiplicité de la valeur propre λ, sa multiplicité en tant que racine du polynôme χ_A. On la note le plus souvent m_λ ou $m_\lambda(A)$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec E de dimension finie) et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.
On appelle multiplicité de la valeur propre λ, sa multiplicité en tant que racine du polynôme χ_u. On la note le plus souvent m_λ ou $m_\lambda(u)$.

Exemple 9.7. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

La matrice est triangulaire donc son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = (-1)^3 \det(A - XI_3) = (X-7)(X-3)^2.$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{7, 3\}$ *et* $m_7(A) = 1, m_3(A) = 2$.

Proposition 10

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Pour tout $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(u)$, on a
$$1 \leqslant \dim(E_{\lambda_0}(u)) \leqslant m_{\lambda_0}(u).$$
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(A)$, on a
$$1 \leqslant \dim(E_{\lambda_0}(A)) \leqslant m_{\lambda_0}(A).$$

Preuve.(D2) On montre la proposition pour un endomorphisme u.

□

Corollaire 5

Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple (i.e. de multiplicité 1) est une droite vectorielle.

Preuve.

□

Remarque importante :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients réels. On peut l'étudier en tant qu'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\chi_A(X) = \underbrace{\prod_{i=1}^{p}(X-\mu_i)^{n_i}}_{\text{racines réelles}} \times \underbrace{\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{m_i}(X-\bar{z}_i)^{m_i}}_{\text{racines complexes}} \qquad \text{(à coefficients réels)}.$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\mu_1, \dots, \mu_p, z_1, \bar{z}_1, \dots, z_q, \bar{z}_q\}$.
On remarque également que si A est à coefficients réels, z_i est valeur propre de A si et seulement si $\bar{z}_i$ l'est, et que dans ce cas, elles ont même multiplicité.

9.4 Diagonalisation

A nouveau, dans ce paragraphe, l'espace vectoriel E est de **dimension finie**.

9.4.1 Définition

Définition 8

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D semblable à A.
• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que u est diagonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

Remarque : Une conséquence directe de cette définition est l'équivalence suivante.

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonalisable.}$$

Exemple 9.8. *Diagonaliser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
On rangera les valeur propres par ordre croissant.

On peut généraliser cette situation à une dimension quelconque. On obtient une condition **suffisante** de diagonalisabilité.

Proposition 11

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{array}{ccc} A \text{ possède } n \text{ valeurs propres } \textbf{distinctes} & \Longrightarrow & A \text{ est diagonalisable} \\ \Updownarrow & & \\ \chi_A \text{ est scindé } \textbf{à racines simples} & \Longrightarrow & A \text{ est diagonalisable} \end{array}$$

et dans ce cas, $\boxed{\text{les } n \text{ sous-espaces propres de } A \text{ sont tous de dimension } 1.}$

• Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{array}{ccc} u \text{ possède } n \text{ valeurs propres } \textbf{distinctes} & \Longrightarrow & u \text{ est diagonalisable} \\ \Updownarrow & & \\ \chi_u \text{ est scindé } \textbf{à racines simples} & \Longrightarrow & u \text{ est diagonalisable} \end{array}$$

et dans ce cas, $\boxed{\text{les } n \text{ sous-espaces propres de } u \text{ sont tous de dimension } 1.}$

• **Attention, la réciproque est fausse !**
C'est une condition suffisante pour être diagonalisable mais elle n'est pas nécessaire.

Preuve.

□

Un exemple simple où la réciproque est fausse : Une matrice peut avoir des valeurs propres multiples et être diagonalisable.

Par exemple, étudions la matrice $2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Elle est diagonalisable, puisqu'elle est déjà diagonale. Et pourtant $\chi_{2I_2}(\lambda) = (\lambda - 2)^3$ et donc 2 est valeur propre de multiplicité 3 de $2I_2$. Ainsi, χ_{2I_2} est scindé mais **pas à racines simples.**

9.4.2 Premières conditions nécessaires et suffisantes

Proposition 12

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On a les équivalences suivantes.

$$u \text{ est diagonalisable} \overset{\text{déf.}}{\iff} \text{il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ telle que } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \text{ soit diagonale} \quad (1)$$

$$\iff \text{il existe une base } \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } \forall i \in \{1, \dots, n\},\ \exists \lambda_i \in \mathbb{K},\ u(e_i) = \lambda_i e_i \quad (2)$$

$$\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \quad (3)$$

$$\iff \dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \quad (4)$$

$$\iff \chi_u \text{ est scindé et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u) \quad (5)$$

Preuve.

□

On donne l'énoncé correspondant pour les matrices.

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\overset{\text{déf.}}{\iff} \text{il existe une matrice } P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } P^{-1}AP \text{ soit diagonale} \\ &\iff \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) \\ &\iff n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) \\ &\iff \chi_A \text{ est scindé et } \ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A) \end{aligned}$$

9.5 Trigonalisation

9.5.1 Définition

Définition 9

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable s'il existe une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) T semblable à A.
• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que u est trigonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire (supérieure ou inférieure).

Remarque 1 : Une conséquence directe de cette définition est l'équivalence suivante.

$$u \text{ est trigonalisable} \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est trigonalisable.}$$

Remarque 2 : Si A est trigonalisable, alors A est semblable à une matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors $\chi_A(X) = \chi_T(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_n)$. Et par conséquent, on a la proposition suivante.

Proposition 14

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, alors elle est semblable à une matrice triangulaire T dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A répétées avec multiplicité.

9.5.2 Condition nécessaire et suffisante

On vient de voir que si A est trigonalisable alors $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_n)$ est donc χ_A est scindé. On admet que la réciproque est vraie.

Proposition 15

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \iff A \text{ est trigonalisable.}$$

• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors :

$$\chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \iff u \text{ est trigonalisable.}$$

Puisque sur $\mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés ($\mathbb{C}$ est algébriquement clos), on a le corollaire suivant.

Corollaire 6

Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Conséquence : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut la considérer comme un élement de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la trigonaliser :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = T$$

En particulier, $\det(A) = \det(T) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$. On a donc la proposition suivante.

Proposition 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres $\boxed{\text{dans } \mathbb{C}}$, répétées avec multiplicité. On a

$$\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$$

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda(A).\lambda$$

On a également

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \chi_T(X) &= (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(\lambda - X_n) \\ &= X^n - \underbrace{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)}_{=\mathrm{tr}(A)} X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \underbrace{\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n}_{=\det(A)} \end{aligned}$$

Proposition 17

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.. On a
$$\chi_u(X) = X^n - \mathrm{tr}(u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

9.5.3 Un exemple numérique

La méthode générale de trigonalisation n'est pas au programme. Néanmoins, dans des cas simples (les multiplicités des valeurs propres ne dépassent pas 2), il faut savoir mener les calculs de manière autonôme.

On donne également une forme possible pour la matrice triangulaire T.

Si A est trigonalisable, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont ses valeurs propres distinctes avec multiplicités $m_1, \dots, m_p$, alors on admet que A est semblable à une matrice T de la forme suivante.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est-elle diagonalisable ?

La matrice A est-elle trigonalisable ?

Méthode 1 : On complète la famille de vecteurs propres en base, puis on cherche la forme de T.

Méthode 2 : On choisit la forme de T, puis on cherche les vecteurs de la nouvelle base.

9.6 Diagonalisation et polynômes annulateurs

9.6.1 Lien avec les valeurs propres

Proposition 18

• Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P(X) = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme annulateur de A. On a l'implication suivante.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Longrightarrow \quad P(\lambda) = 0.$$

• Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie), $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P(X) = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme annulateur de u. On a l'implication suivante.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad \Longrightarrow \quad P(\lambda) = 0.$$

Preuve. (E1) On montre le premier point.

□

Plus généralement, on montre le résultat suivant (il suffit d'ôter l'hypothèse $P(A) = 0$ dans l'exercice précédent.

• Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P(X) = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme. On a l'implication suivante.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Longrightarrow \quad P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(A)).$$

• Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (avec E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie), $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P(X) = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme. On a l'implication suivante.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad \Longrightarrow \quad P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u)).$$

On montre le second point (pour changer un peu !).

Exercice de colle (E1)

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 - 4A^2 + 3A = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A) = 11.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A.

On vient de voir que si on dispose d'un polynôme annulateur de A alors les seules valeurs propres de A sont parmi les racines de ce polynôme. Réciproquement, si on dispose des valeurs propres et de leurs multiplicités respectives, on peut trouver un polynôme annulateur de A.

Proposition 19 (Théorème de Cayley-Hamilton)

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.
• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.
Le polynôme caractéritique de u est un polynôme annulateur de u.

En guise d'exercice, montrons le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice A diagonalisable.

9.6.2 Nouvelles conditions nécessaires et suffisantes

On admet la proposition suivante qui donne de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité. On l'énonce pour une matrice, une proposition analogue existe pour les endomorphismes en dimension finie.

Proposition 20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes.

A est diagonalisable $\iff$ il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(A) = 0$,

$\iff$ le polynôme scindé à racines simples suivant annule A

$$P_0(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_p) \text{ avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \text{ distincts.}$$

Remarque : Le polynôme P_0 peut s'obtenir à partir du polynôme caractéristique, en « enlevant les multiplicités ». À une constante multiplicative près, on peut montrer que c'est le polynôme non nul de plus petit degré qui annule A.

Exemple 9.9.

- *Si p est un projecteur, alors $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme scindé à racines simples qui annule p. On retrouve donc que p est diagonalisable.*
- *Si s est une symétrie, alors $P(X) = X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est un polynôme scindé à racines simples qui annule s. On retrouve donc que s est diagonalisable.*

Exercice de colle (E1)

Diagonaliser la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice de colle (E1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux-à-deux équivalentes.

1. A est nilpotente
2. $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$
3. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$
4. $A^n = 0$

Proposition 21

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.
Si u est diagonalisable, ses endomorphismes induits le sont également.

Preuve. (D2)

□

Exercice de colle (E3)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On suppose que u et v sont diagonalisables.
Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors u et v diagonalisent dans une même base.

Remarque : Ce résultat s'énonce ainsi dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.
Si A et B sont diagonalisables alors elles diagonalisent dans une même base, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

9.7 Applications de la réduction

9.7.1 Calculs de puissances

Méthode 1 : à l'aide de la matrice réduite (E1)

Exemple 9.10. *On reprend la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *du paragraphe 9.4.1. Calculer* A^n*.*

On rappelle que $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : à l'aide d'un polynôme annulateur (E1)

Exemple 9.11. *Soit* $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculer* B^n.

9.7.2 Résolution de systèmes différenciels

Exemple 9.12. *On reprend la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *du paragraphe 9.4.1.*

On rappelle que $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système différentiel $\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x + 2y - z \\ y' & = & 2x + y - z \\ z' & = & 4x - 2y \end{array} \right.$

Plus généralement, on pourrait démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonalisable, et si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors, pour toute application $X : t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable, on a :

$$\Big(\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\exists (C_1, \ldots, C_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_1 t} X_n\Big)$$

9.7.3 Commutants (E2)

Exemple 9.13. *On reprend la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *du paragraphe 9.4.1.*
Déterminer le commutant de A *:* $\mathrm{Com}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.
Puis démontrer que $\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Vect}\{I_3, A, A^2\}$.

Exercice de colle (E3)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ des scalaires distincts et $n_1, \dots, n_q$ des entiers naturels non nul.

On note $n = n_1 + \cdots + n_q$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_q I_{n_q} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer $\mathrm{Com}(A)$.

9.7.4 Équations matricielles

Exemple 9.14. *Diagonaliser* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

En déduire les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $M^2 = C$.