Chapitre 8

Calcul matriciel et déterminants

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

8.1 Opérations algébriques sur les matrices

8.1.1 Structure d'espace vectoriel

Si $A = [a_{i,j}], B = [b_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on définit

$$\alpha A + \beta B = [\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j}]$$

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, muni des lois $+$ et . ainsi définies, est un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** de dimension finie égale à $n \times p$.

Pour $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$ on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui vaut 1. Alors la famille $\Big(E_{i,j}\Big)_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,p\}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

8.1.2 Produit

En plus des lois liées à la structure d'espace vectoriel, on peut définir le produit AB de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Par exemple, calculer AB lorsque

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = AB.$$

D'une manière générale, si $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = [b_{i,j}] \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit le produit $C = AB = [c_{i,j}]$ par

$c_{i,j} =$

8.1.3 Inverse

Définition 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est inversible s'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$M \times N = N \times M = I_n.$$

Dans ce cas, la matrice N est appelée inverse de M et on la note $N = M^{-1}$.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe, appelé **groupe linéaire** et noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 8.1. *On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $M = J + I_n$.*
Exprimer M^2 à l'aide M et de I_n.

En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exemple 8.2. *Calculer l'inverse de la matrice* $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 1 (Caractérisation)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff \mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \mathrm{rg}(A) = n \\ &\iff \mathrm{Ker}(A) = \{0\} \\ &\iff \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Et par contraposée :

$$\begin{aligned} A \text{ n'est pas inversible} &\iff \mathrm{rg}(A) < n \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \text{tel que } X \neq 0 \text{ et } AX = 0 \\ &\iff \det(A) = 0 \end{aligned}$$

8.1.4 Calculs par blocs

En utilisant la définition de produit matriciel, on peut démontrer le résultat suivant.

Proposition 2

À condition que les tailles des matrices A, B, C, D, T, U, V, W soient cohérentes, peut directement effectuer les calculs suivants.

- **Linéarité :**

$$\lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A + \mu T & \lambda B + \mu U \\ \lambda C + \mu V & \lambda D + \mu W \end{pmatrix}.$$

- **Produit par blocs :**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T & U \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AT + BV & AU + BW \\ CT + DV & CU + DW \end{pmatrix}.$$

- **Transposition :**

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}.$$

Illustration : Attention à l'ordre des matrices dans le produit (non commutatif) !

Remarque : ces formules se généralisent facilement dans le cas où les blocs sont plus (ou moins) nombreux.

Exercice de colle (E2)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A n'est pas inversible, alors M ne l'est pas non plus.
2. Montrer que si A est inversible, alors M l'est aussi et dans ce cas, déterminer M^{-1}.

8.1.5 Polynômes de matrices

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On pose $M^0 = I_n$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k \text{ fois}}$.
- Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(M) = a_0 M^0 + a_1 M^1 + \cdots a_n M^n = a_0 I_n + a_1 M + \cdots a_n M^n$.

On remarque que M^k et $P(M)$ sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de M si $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ (matrice nulle).

On peut démontrer la proposition suivante.

Proposition 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- $(P \times Q)(M) = P(M) \times Q(M)$,
- Et comme $P \times Q = Q \times P$, $P(M) \times Q(M) = Q(M) \times P(M)$ (i.e. les matrice $P(M)$ et $Q(M)$ commutent).
- Si P est un polynôme annulateur de M, tous ses multiples le sont aussi.

Application au calcul d'inverses :

Exemple 8.3. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P(X) = X^3 + 3X^2 - X + 2$ est un polynôme annulateur de M. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.*

Exemple 8.4. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p. Montrer que $N = M - I_n$ est inversible et déterminer N^{-1} en fonction de M.*

8.1.6 Formule du binôme de Newton

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 4

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices. On suppose que A et B commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Exercice de colle (E1)

Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : Si A et B ne commutent pas, le résultat est faux. Par exemple, si $AB \neq BA$ alors

$$(A+B)^2 = (A+B).(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

8.2 Matrices de vecteurs, d'applications linéaires

8.2.1 Matrice d'un vecteur dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$ le vecteur colonne

$$X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

8.2.2 Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées de $e'_1, \ldots, e'_n$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Exemple 8.5. *Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, écrire $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique et*

$$\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3) = \Big(X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1)\Big).$$

On vérifiera au préalable, que $\mathcal{B}'$ est bien une base de E.

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et on a l'égalité

$$\Big(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\Big)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Formule de changement de base :
Avec les données précédentes, si $x \in E$, on pose $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$. En notant $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ on a :

$$\boxed{X \;=\; PX'}$$

8.2.3 Matrice d'une application linéaire

On définit également la notion de matrice d'application linéaire. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$ de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées des coordonnées de $u(e_1), \ldots, u(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$.

Exemple 8.6. *Ecrire la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ de l'application linéaire u définie par $u(x, y, z) = (2x + y - z, x - 3y + 2z)$.*

Intérêt de l'écriture matricielle : Avec les données précédentes, soient $x \in E$ et $y \in F$. On pose $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(y)$. On a alors

$$u(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(u)X = Y.$$

Ceci s'illustre ainsi sur l'exemple précédent.

Proposition 6

1. Soient E_1, E_2, E_3 des espaces vectoriels de dimensions finies dont on se donne respectivement des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$. Soient $u \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ et $v \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. On a l'égalité suivante.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3}(u \circ v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(u) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(v).$$

2. E_1, E_2 des espaces vectoriels de dimensions finies dont on se donne respectivement des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Si $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ est bijective alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(u^{-1}) = \Big(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(u)\Big)^{-1}.$$

Dans ce cas, on a nécessairement $\dim(E_1) = \dim(E_2)$.

Exercice de colle (E1 - Question de Cours Centrale 2023 PSI maths 1)

On suppose que $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que

$$\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(g)\mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(f).$$

On note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n), \mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ et :

$$A = [a_{i,j}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} = \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{G}}(g \circ f),\ B = [b_{i,j}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} = \mathrm{M}_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(g) \text{ et } C = [c_{i,j}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} = \mathrm{M}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(f).$$

On revient à la définition de matrice d'endomorphisme, et de produit matriciel.

On rappelle la proposition suivante, appelée aussi formule de changement de base.

Proposition 7

1. Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies. On se donne respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E et des bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a la relation suivante.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

2. En particulier, si $E = F$ et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ on a :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

En notant, $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u), M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, cette égalité pourra être retenue sous la forme $\boxed{M' = P^{-1}MP.}$

Interprétation : On reprend les notations précédentes. Si x est un vecteur de E, on note X et X' les matrices de x dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, Y et Y' les matrices de $y = u(x)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et enfin M et M' les matrices de l'endomorphisme u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On a donc d'une part : $Y = MX$ et $Y' = M'X'$.

Mais aussi : $X = PX'$ et $Y = PY'$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Et donc :

$$\begin{array}{lllll} M'X' & = & Y' & = & P^{-1}Y & = & P^{-1}MX \\ M'X' & = & P^{-1}MPX' \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "u"] & u(x) = y \\
X \arrow[r, "M\times"] & MX = Y \arrow[d, "P^{-1}\times"] \\
X' \arrow[u, "P\times"] \arrow[r, "M'\times"] & M'X' = Y'
\end{tikzcd}$$

8.3 Calcul pratique du noyau et de l'image

8.3.1 Premiers calculs

Dans le paragraphe précédent, on a vu que, quitte à se donner des bases, pour calculer l'image d'un vecteur, il suffira d'effectuer un produit matriciel. Et de même, chercher l'image ou le noyau d'une application linéaire (en dimension finie) revient à déterminer l'image ou le noyau d'une matrice.

A retenir :

- Les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$.
- Les lignes de A représentent les équations définissant $\mathrm{Ker}(A)$.
- Si $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes d'une matrice M alors :

pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $MX =$ $= x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$

Ainsi, il est équivalent de chercher un vecteur du noyau et de chercher une relation linéaire entre les colonnes.

Exemple 8.7. *Déterminer une base l'image de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant la résolution d'un système linéaire, déterminer une base du noyau de A.

Par des opérations sur les colonnes, déterminer une base du noyau de A.

Remarque : Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, les éléments de $\mathrm{Ker}(A)$ sont des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et ceux de $\mathrm{Im}(A)$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On les identifie parfois à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ ou $\mathbb{K}^p$, mais sur ces espaces, on perd la notion de produit matriciel.

8.3.2 Cas d'une matrice 3×3 (E1)

• **cas 1 :** $\mathrm{rg}(A) = 3$ ou encore $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 3$.
Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

• **cas 2 :** $\mathrm{rg}(A) = 2$ ou encore $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$.
Pour avoir une base de l'image, il suffit de choisir deux vecteurs colonnes de A linéairement indépendants.
Un base du noyau est donnée par un vecteur non nul du noyau. On peut par exemple essayer de trouver une relation linéaire entre les colonnes de A. Si on n'y parvient pas, on revient à la résolution d'un système, ou à des opérations sur les colonnes de A.

Exemple 8.8. *Noyau et image de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

• **cas 3 :** $\mathrm{rg}(A) = 1$ ou encore $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$ et $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 1$.
Chaque colonne non nulle de A donne une base de $\mathrm{Im}(A)$, et chaque ligne non nulle donne une équation de $\mathrm{Ker}(A)$.

Exemple 8.9. *Noyau et image de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

• **cas 4 :** $\mathrm{rg}(A) = 0$ ou encore $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3$ et $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 0$.
Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Im}(A) = \{0\}$, et donc $A = 0$.

8.4 Matrices semblables

Proposition 8

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
2. Il existe des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \qquad \text{et} \qquad B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u).$$

On dira dans ce cas que A et B sont des matrices **semblables**.

Preuve.

$\square$

Exemple 8.10. Un premier pas vers la diagonalisation.
Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. *Démontrer que* A *est semblable à* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8.5 Trace

Définition 4

Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ une matrice carré d'ordre n, on appelle **trace** de A la somme de ses coefficients diagonaux.

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Cette application vérifie les proprétés suivantes.

Proposition 9

1. L'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Propriété fondamentale : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Deux matrices semblables ont même trace.

Preuve.

1 :

2 : (D1)

3 :

□

Proposition 10 (Trace d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, la trace de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est indépendante de $\mathcal{B}$. On l'appelle trace de u.

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\right).$$

Preuve.

□

Exemple 8.11. *On a vu que si p est un projecteur d'un espace vectoriel de dimenion finie E, alors rg(p) =tr(p).*

Exemple 8.12. *Déterminer la trace de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par*

$$\varphi(P) = XP' + 2P.$$

8.6 Déterminant

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle les propriétés du (ou plutôt des) déterminant(s) vues en première année.
On donne au préalable, quelques définitions.

8.6.1 Forme p-linéaire alternée

Définition 5

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E^p dans F.
1. On dit que f est **p-linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ on a :

$$\forall (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p) \in E^{p-1}, \qquad f_i : x \in E \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \text{ est linéaire.}$$

2. On dit que f est **alternée** si pour tout $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$ et pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ distincts on a :

$$a_i = a_j \qquad \Longrightarrow \qquad f(a_1, \dots, a_p) = 0.$$

3. On dit que f est **antisymétrique** si pour tout $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$ et pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tels que $i < j$ on a :

$$f(a_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{a_i}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{a_j}, \dots, a_p) = -f(a_1, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{a_j}, \dots, \underset{\overset{\uparrow}{j}}{a_i}, \dots, a_p).$$

3. On dit que f est une **forme** si elle prend ses valeurs dans $F = \mathbb{K}$.

Proposition 11 (admise)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application p linéaire de E^p dans F. On a l'équivalence :

$$f \text{ est antisymétrique} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est alternée.}$$

Preuve.

$\square$

Proposition 12

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E^p \longrightarrow F$ une application p-linéaire alternée.
Pour tout $(a_1, \ldots, a_p) \in E^p$, on a :
1. Si $(a_1, \ldots, a_p)$ est liée alors $f(a_1, \ldots, a_p) = 0$.
2. On ne change pas la valeur de $f(a_1, \ldots, a_p)$ en ajoutant à l'un des a_i une combinaison linéaire des autres.

Preuve.

$\square$

On admet enfin la proposition suivante.

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble des formes n-linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1, autrement dit les formes n-linéaires alternées sur E sont toutes proportionnelles.

8.6.2 Déterminant de n vecteurs dans une base de E

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 14

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire alternée $\varphi_{\mathcal{B}}$ sur E telle que $\varphi_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
L'application $\varphi_{\mathcal{B}}$ est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et on la note $\det_{\mathcal{B}}$.

Notations : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de n vecteurs de E, pour chaque u_j, on note $(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Ceci signifie que

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i.$$

Le déterminant de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ est noté

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemple 8.13. *Trouver l'application déterminant dans la base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 15

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On a alors

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$$

ce qui signifie que pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, on a $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \ldots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$.

Preuve.

□

On termine ce paragraphe par la caractérisation des bases à l'aide du déterminant.

Proposition 16

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de $n = \dim(E)$ vecteurs de E. On a

$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0.$$

8.6.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On le note $\det(A)$.

Si $A = [a_{i,j}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$, on a donc $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Cas où $n = 2$: Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Cas où $n = 3$: La règle de Sarrus donne

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +\Big(aei + dhc + bfg\Big) - \Big(gec + dbi + hfa\Big).$$

Attention, la règle de Sarrus n'est valable qu'en dimension 3 !

Puisqu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la proposition 13 s'écrit donc : A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. De plus, si on interprète les propositions 22 et 27 du chapitre précédent, on obtient :

Proposition 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence suivante.

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Remarque : voir aussi les équivalences de la proposition 1.
Par définition des déterminants, on a également :

Proposition 18

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E avec $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ alors $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) = \det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$.

8.6.4 Propriétés algébriques et méthodes de calcul

Proposition 19

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

1. $\det(\lambda.A) = \lambda^n \det(A)$
2. $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$
3. Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
4. $\det(A^T) = \det(A)$

Conséquence : Si A et B sont deux matrices semblables alors elles ont même déterminant, mais la réciproque est fausse.

Transformations élémentaires :

On décrit l'effet des transformations élémentaires sur le déterminant. On pourra les utiliser afin de faire apparaître des 0 dans la matrice et de simplifier le calcul du déterminant.

Opérations	Effet
$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j \ (i \neq j)$	déterminant inchangé
$C_i \longleftarrow \lambda C_i$	déterminant multiplié par λ
$C_i \longleftrightarrow C_j \ (i \neq j)$	déterminant multiplié par (-1)
$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j \ (i \neq j)$	déterminant inchangé
$L_i \longleftarrow \lambda L_i$	déterminant multiplié par λ
$L_i \longleftrightarrow L_j \ (i \neq j)$	déterminant multiplié par (-1)

Développement par rapport à une colonne ou une ligne :

Définition 7

Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$.
1. On appelle mineur d'indice (i,j) de A le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu à partir de A en supprimant sa $i$ème ligne et sa $j$ème colonne.
2. Le cofacteur d'indice (i,j) de A est alors $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

$\Delta_{i,j} =$

On admet la proposition suivante.

Proposition 20

Soit $A[a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$.

1. Le développement par rapport à la j-ème colonne de A donne :
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$
2. Le développement par rapport à la i-ème ligne de A donne :
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

Déterminant d'une matrice triangulaire :

En développant suivant une ligne, on montrerait par récurrence la proposition suivante.

Proposition 21

Le déterminant d'un matrice carrée triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Exercice de colle (E1)

Calculer le déterminant d'ordre n suivant.

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

8.6.5 Déterminant d'un endomorphisme de E

Définition 8

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E. On définit le déterminant de f par

$$\det(f) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\right) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
Cette définition ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Preuve.

□

Exercice de colle (E1)

Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \qquad f(M) = 2M + M^T.$$

Les paragraphes précédents ont les conséquences suivantes.

Proposition 22

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On a

1. $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$
2. u est inversible $\iff$ $\det(u) \neq 0$
   et dans ce cas $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

8.6.6 Déterminant de Vandermonde

Proposition 23

Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On appelle déterminant de Vandermonde associé à $(a_0, \ldots, a_n)$ le déterminant d'ordre $n+1$ suivant.

$$V(a_0, \ldots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

On a $V(a_0, \ldots, a_n) = \displaystyle\prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$.

Et en particulier, $V(a_0, \ldots, a_n)$ est non nuls si et seulement si $a_0, \ldots, a_n$ sont distincts deux-à-deux.

Ce déterminant est explicitement au programme de PSI, son calcul doit être maîtrisé et sa valeur connue.
Preuve.(D2)

• **Méthode 1 : par des transformations élémentaires**

• **Méthode 2 : en utilisant un polynôme**

□

Exercice (Application à l'interpolation de Lagrange)

Soient $a_0, \dots, a_n$ des complexes distincts deux-à-deux. Sans utiliser les polynômes de Lagrange, démontrer que pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(a_i) = y_i.$$

8.6.7 Déterminant par blocs

On a vu que le déterminant d'un matrice carrée triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. On peut généraliser ce résultat pour une matrice triangulaire par blocs.

Proposition 24

Le déterminant d'un matrice carrée triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses « matrices diagonales ».

On a donc :

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(B).$$

De manière plus générale, on a :

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & \bigstar & \cdots & \bigstar \\ \text{\Large 0} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bigstar \\ \text{\Large 0} & \cdots & \text{\Large 0} & A_p \end{pmatrix} = \det(A_1)\times\det(A_2)\times\cdots\times\det(A_p).$$

Exemple 8.14. *Calculer* $D = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & \bar{\beta} \\ -\beta & 0 & 0 & \bar{\alpha} \\ -1 & -\bar{\beta} & -\bar{\alpha} & 0 \end{vmatrix}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{C})$

8.7 Annexe

8.7.1 Matrices symétriques et antisymétriques ♡

Dans cette section, on note :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T = -M\}.$$

On rappelle que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour toute $M = [m_{i,j}]_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) &\iff M^T = M \\
&\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = m_{j,i} \\
M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) &\iff M^T = -M \\
&\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = -m_{j,i}
\end{aligned}$$

En particulier, les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

Exercice de colle (E1)

Démontrer rapidement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice de colle (E2)

1. Déterminer une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En déduire leurs dimensions respectives.
2. Déterminer le déterminant et la trace de l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = 2M + M^T$.

8.7.2 Matrices à diagonale strictement dominante ♡

Exercice de colle (E2)

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

8.7.3 Matrices stochastiques ♡

Définition 9

Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** si elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \tag{2}$$

Exercice de colle (E1)

On note $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. Démontrer les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1,n]\!],\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad AU = U \\ &\Longleftrightarrow \quad U \in \mathrm{Ker}(A - I_n) \end{aligned}$$

2. En déduire que l'ensemble des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

8.7.4 Formules de Cramer (Hors-Programme)

Exercice de colle (E3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On considère la système linéaire

$$\mathcal{S} : \quad AX = B \qquad \text{d'inconnue } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Montrer que si le système $\mathcal{S}$ est de Cramer, c'est-à-dire si $\Delta = \det(A) \neq 0$, alors il possède une unique solution X donnée par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

où A_i est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa $i$ème colonne par B.

8.7.5 Comatrice (Hors-Programme)

Définition 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée ($n \geqslant 2$). On appelle comatrice de A la matrice de ses cofacteurs :

$$\mathrm{Com}(A) = [(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}.$$

Exemple 8.15. *Donner la comatrice de* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice de colle (E3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée ($n \geqslant 2$). On a l'égalité suivante.

$$\mathrm{Com}(A)^T.A = A.\mathrm{Com}(A)^T = \det(A).I_n$$

8.7.6 Expression du déterminant à l'aide des permutations (MPSI)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Si (i, j) est un couple d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on notera $\tau_{(i,j)}$ la transposition d'indices (i, j) c'est-à-dire la permutation qui échange i et j.

Définition 11 (Signature)

Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. On dit qu'un couple (i, j) est une inversion de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversion de σ. La signature de σ est alors

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1, 1\}.$$

On peut démontrer que la signature d'une transposition vaut -1, et que la signature de la composée de deux permutations est le produit de leurs signatures.

La formule du déterminant pour une matrice 2×2 ou 3×3 en fonction des coefficients se généralise par la proposition suivante (Hors-Programme de PSI).

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}.$$

Conséquence : Le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme (homogène de degré n) en ses coefficients.

Exemple 8.16. *Dans l'expression de* $\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} \end{vmatrix}$, *déterminer le signe devant* $x_{1,2}x_{2,1}x_{3,3}x_{4,4}$ *et* $x_{1,3}x_{2,1}x_{3,4}x_{4,2}$.