

# Chapitre 7

## Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désignera indifféremment le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$ .

### 7.1 Espaces Vectoriels

#### 7.1.1 Définitions et rappels

##### Définition 1

Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi de composition interne notée  $+$  :

$$\begin{cases} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{cases}$$

et d'une application (appelée loi externe) notée  $\cdot$  :

$$\begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda \cdot v \end{cases}$$

On dit que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, si les conditions suivantes sont réalisées.

- $(E, +)$  est un groupe commutatif, ( $+$  possède un élément neutre,  $+$  est associative et commutative, et tout élément de  $E$  possède un symétrique (opposé) pour  $+$ )
- $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot u &= \lambda \cdot u + \mu \cdot u, \\ \lambda \cdot (u + v) &= \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, \\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) &= (\lambda \times \mu) \cdot u, \\ 1 \cdot u &= u. \end{aligned}$$

Les éléments de  $E$  sont appelés vecteurs, ceux de  $\mathbb{K}$  sont appelés scalaires.

##### Exemple 7.1.

- $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}[X], \mathcal{F}(X, \mathbb{K}), \mathcal{F}(X, \mathbb{K}^n)$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.
- $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

##### Définition 2

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de  $E$  est un sous ensemble  $F \subset E$  qui, muni des lois  $+$  et  $\cdot$ , est un espace vectoriel.

##### Proposition 1

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On a l'équivalence suivante.

$$F \text{ s.e.v. de } E \iff \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 : \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F. \end{cases}$$

**Exemple 7.2.**

- $\{0_E\}$  est le plus petit s.e.v. de  $E$ .
- l'intersection de deux s.e.v. de  $E$  est un s.e.v. de  $E$ , mais pas la réunion !
- Si  $u_1, \dots, u_n$  sont des vecteurs de  $E$ , alors on définit  $F = \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$  par :

$$u \in \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\} \iff \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

Alors  $F = \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\}$  est un s.e.v. de  $E$ .

- Si  $F$  et  $G$  sont des s.e.v. de  $E$  alors  $F + G = \{f + g, f \in F, g \in G\}$  est aussi un s.e.v. de  $E$ .

**7.1.2 Produit d'espaces vectoriels**

On se donne deux espaces vectoriels  $(F, \cdot, +)$  et  $(G, \cdot, +)$  sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On appelle ensemble produit  $E = F \times G$  l'ensemble suivant.

$$E = F \times G = \{(x, y), x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

Sur cet ensemble, on définit les lois suivantes.

- La loi  $\cdot$  :  $\forall(x, y) \in F \times G, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ .
- La loi  $+$  :  $\forall(x, y) \in F \times G, \forall(x', y') \in F \times G, \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ .

On peut sans difficulté étendre ces notions au produit de  $N$  espaces vectoriels sur un même corps  $\mathbb{K}$ . On a alors la proposition suivante.

**Proposition 2**

Si  $E_1, \dots, E_p$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels alors  $E = E_1 \times \dots \times E_p = \prod_{i=1}^p E_i$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**7.1.3 Somme directe de sous-espaces vectoriels**

**Définition 3**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $(E_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  une famille finie de s.e.v. de  $E$ . On appelle **somme** de la famille  $(E_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  l'ensemble suivant.

$$\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} E_i = E_1 + \dots + E_n = \{u_1 + \dots + u_n, (u_1, \dots, u_n) \in E_1 \times \dots \times E_n\}.$$

On admet alors la proposition suivante.

**Proposition 3**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de s.e.v. de  $E$ . L'ensemble  $E_1 + \dots + E_n$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et c'est le plus petit espace vectoriel contenant la réunion des  $E_i$ .

Avec ces notations, on a la proposition suivante.

**Proposition 4**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $(E_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  une famille finie de s.e.v. de  $E$ . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Pour toutes familles  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs de  $(E_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , on a :

$$u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_n \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i = v_i.$$

Autrement dit : La « décomposition » d'un vecteur de  $E_1 + \dots + E_n$  est unique.

(ii) Pour toute famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs de  $(E_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , on a :

$$u_1 + \dots + u_n = 0 \quad \implies \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u_i = 0.$$

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que la somme  $E_1 + \dots + E_n$  est **directe** et on la note

$$\bigoplus_{i \in \{1, \dots, n\}} E_i = E_1 \oplus \dots \oplus E_n.$$

**Preuve.** On raisonne par **double implication**.

Supposons (i) et montrons (ii).

Réciproquement, (ii) et montrons (i).

□

Par exemple, dans le cas de deux espaces vectoriels, on a la proposition suivante.

**Proposition 5**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F, G$  deux s.e.v. de  $E$ . On a l'équivalence suivante.

$$\text{La somme } F + G \text{ est directe} \quad \iff \quad F \cap G = \{0\}.$$

**Preuve. (D1)** On raisonne par **double implication**.

Supposons que la somme  $F + G$  est directe et montrons que  $F \cap G = \{0\}$ .

Réciproquement, supposons que  $F \cap G = \{0\}$  et montrons que la somme  $F + G$  est directe

□

**Remarque :** Cet énoncé peut s'adapter pour plusieurs sous-espaces vectoriels (cf proposition suivante).

Cependant, il est incorrect de dire que si  $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0\}$  alors la somme  $F + G + H$  est directe. Par exemple, dans  $E = \mathbb{R}^2$ , on note  $F = \text{Vect}\{(1, 0)\}$ ,  $G = \text{Vect}\{(0, 1)\}$  et  $H = \text{Vect}\{(1, 1)\}$ .

Il est clair que  $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{(0, 0)\}$ .

Justifier pourtant que la somme  $F + G + H$  n'est pas directe.

Voici une généralisation possible de la proposition précédente mais qui n'est pas explicitement au programme.

### Exercice de colle (E3)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $E_1, \dots, E_n$  des s.e.v. de  $E$ . On a l'équivalence suivante.

$$\text{La somme } E_1 + \dots + E_n \text{ est directe} \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, E_i \cap \left( \sum_{j \neq i} E_j \right) = \{0\}.$$

On rappelle aussi la définition suivante et on la généralise à plusieurs sous-espaces vectoriels.

**Définition 4**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soient  $F, G$  deux s.e.v. de  $E$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$ , si  $E = F \oplus G$ , autrement dit si pour tout vecteur  $u$  de  $E$ , il existe un unique  $f \in F$  et un unique  $g \in G$  tels que  $u = f + g$ .

$$\forall u \in E, \exists! f \in F, \exists! g \in G : u = f + g.$$

2. Soient  $E_1, \dots, E_n$  des s.e.v. de  $E$ .

On dit que  $E_1, \dots, E_n$  sont **supplémentaires** dans  $E$ , si  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ , autrement dit si pour tout vecteur  $u$  de  $E$ , il un unique  $(u_1, \dots, u_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$  tels que  $u = u_1 + \dots + u_n$ .

$$\forall u \in E, \exists!(u_1, \dots, u_n) \in E_1 \times \dots \times E_n : u = u_1 + \dots + u_n.$$

La proposition 5 s'écrit alors :

**Proposition 6**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F, G$  deux s.e.v. de  $E$ . On a l'équivalence suivante.

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G, \\ F \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Pour démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, on pourra utiliser un raisonnement par **analyse et synthèse**.

**Exercice de colle (E1)**

On note  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{P}$  son sous-ensemble des fonctions paires et  $\mathcal{I}$  celui des fonctions impaires. On rappelle que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer qu'ils sont supplémentaires.

**Analyse :**

Synthèse :

**Exercice de colle (E2)**

On note  $E = \mathbb{K}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On désigne par  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $n \in \mathbb{N}$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On se donne un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  et on pose :

$$\mathbb{K}[X].P = \{Q.P, Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

l'ensemble des multiples de  $P$ .

1. Montrer que  $\mathbb{K}[X].P$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n + 1$  soit le degré de  $P$ .  
Rappeler la définition de la division euclidienne d'un polynôme  $A \in \mathbb{K}[X]$  par le polynôme  $P$ .  
En déduire que  $\mathbb{K}[X].P$  et  $\mathbb{K}_n[X]$  sont supplémentaires dans  $E$ .

## 7.2 Familles de vecteurs

### 7.2.1 Familles libres, familles génératrices

On rappelle d'abord le cas des familles finies.

#### Définition 5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_n\}$  une famille de  $E$ . On dit que :

- $\mathcal{F}$  est une famille libre (ou linéairement indépendante) si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0).$$

- $\mathcal{F}$  est une famille liée si :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

- $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$  si :

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

Ainsi,  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$  si  $E = \text{vect}\{u_1, \dots, u_n\}$ .

**Exemple 7.3.** Soit  $u \in E$ . Montrer que :

$\{u\}$  est libre si et seulement si  $u \neq 0$ .

**Exemple 7.4.** Soient  $u, v \in E$ . Montrer l'équivalence suivante.

$$\{u, v\} \text{ est liée} \iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda v \\ \text{ou} \\ v = 0. \end{cases}$$

**Exemple 7.5.** On dit qu'une famille  $\{P_1, \dots, P_N\}$  de  $\mathbb{K}[X]$  est échelonnée en degrés si

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_N).$$

Toute famille de polynômes non nuls, échelonnée en degrés est libre. En effet :

### Exercice de colle (E1)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soient des réels tels que  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ .  
Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $f_i : x \mapsto e^{\alpha_i x}$ .  
Montrer que  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$  est une famille libre de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

On montre ce résultat par récurrence sur  $n$ .

- **Initialisation :** Si  $n = 1$ , soit  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ . Alors  $f_1 : x \mapsto e^{\alpha_1 x}$  n'est pas la fonction nulle donc  $\{f_1\}$  est libre.
- **Hérédité :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons le résultat démontré pour ce  $n$ . On se donne des réels  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n+1}$ . et on note  $f_i : x \mapsto e^{\alpha_i x}$ . Montrons que  $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_{n+1}\}$  est une famille libre de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

## 7.2.2 Bases

### Définition 6

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On dira que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  si elle est à la fois libre et génératrice de  $E$ .

### Exemple 7.6.

- base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ,
- $(1, X, \dots, X^n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

On rappelle alors la caractérisation suivante vue en première année.

### Proposition 7

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On a :

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \iff \forall u \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Tout vecteur  $u$  de  $E$  s'écrit alors de manière unique comme combinaison linéaire de  $e_1, \dots, e_n$ . Le  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est appelé coordonnées (ou composantes) de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

## 7.2.3 Espaces vectoriels de dimension finie

### Définition 7

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dira que  $E$  est de dimension finie si  $E$  possède une famille génératrice finie, autrement dit, si l'on peut trouver des vecteurs  $u_1, \dots, u_p \in E$  tels que

$$E = \text{vect}\{u_1, \dots, u_p\}.$$

### Proposition 8

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel qui possède une famille génératrice finie  $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_n)$ . Alors toute famille libre contenue dans  $\mathcal{G}$  peut être complétée par des éléments de  $\mathcal{G}$  en une base de  $E$ .

Et donc, de toute famille génératrice finie, on peut extraire une base. Ainsi, tout espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base. On rappelle les propositions suivantes.

### Proposition 9

Dans tout espace vectoriel  $E$  de dimension finie, il existe au moins une base. Toutes les bases de  $E$  ont alors même cardinal, on appelle ce nombre dimension de  $E$  (notée  $\dim(E)$ ).

La proposition 8 a pour conséquence directe les deux propositions suivantes.

**Proposition 10 (Théorème de la Base Extraite)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base de  $E$ .

**Proposition 11 (Théorème de la Base Incomplète)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base de  $E$ .

**Exemple 7.7.**

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ ,
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$ ,
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ ,
- $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace de dimension 2,
- on appelle rang d'une famille finie de vecteurs, la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent.

$$\text{rg}\{u_1, \dots, u_p\} = \dim(\text{vect}\{u_1, \dots, u_p\}).$$

**Proposition 12**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$ .

- Soient  $u_1, \dots, u_p \in E$ . Si  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre alors  $p \leq n$ , ou encore toute famille de cardinal au moins  $n + 1$  est liée.
- Soient  $u_1, \dots, u_p \in E$ . Si  $(u_1, \dots, u_p)$  est une famille génératrice de  $E$ , alors  $p \geq n$ , ou encore, il faut au moins  $n = \dim(E)$  vecteurs pour engendrer  $E$ .
- Soit  $e_1, \dots, e_n \in E$ . On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E &\iff (e_1, \dots, e_n) \text{ libre,} \\ &\iff (e_1, \dots, e_n) \text{ génératrice de } E. \end{aligned}$$

Ainsi, les bases sont les familles libres de cardinal maximal ou encore les familles génératrices de cardinal minimal.

### 7.2.4 Dimension de sous-espaces vectoriels

**Proposition 13**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  est de dimension finie, et l'on a

$$\dim(F) \leq \dim(E).$$

De plus, si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui vérifie  $\dim(F) = \dim(E)$  alors on a  $F = E$ .

**Application :** Pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, il suffit de vérifier qu'ils ont même dimension et que l'un est inclus dans l'autre.

**Proposition 14**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Pour  $i = 1, \dots, n$ , on se donne des sous-espaces vectoriel  $E_i$ , chacun muni d'une base  $\mathcal{B}_i = (e_1^{(i)}, \dots, e_{p_i}^{(i)})$ . On a alors les équivalences suivantes.

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n \iff \mathcal{B} = (e_1^{(1)}, \dots, e_{p_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(n)}, \dots, e_{p_n}^{(n)}) \text{ est une base de } E.$$

Dans ce cas, on dira que  $\mathcal{B}$  est une base adaptée à la somme directe  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ .

**Preuve.** On le montre sans restreindre la généralité, dans le cas de deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$ . On se donne une base  $(f_1, \dots, f_p)$  de  $F$  et une base  $(g_1, \dots, g_q)$  de  $G$ .

□

### Proposition 15

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $E_1, \dots, E_n$  des s.e.v. de  $E$  dont la somme  $E_1 + \dots + E_n$  est directe. On a l'égalité suivante.

$$\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n).$$

En particulier, si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ , on a

$$\dim(E) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

**Preuve.**

□

### Proposition 16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E_1, \dots, E_n$  des s.e.v. de  $E$  **en somme directe**. On a l'équivalence suivante.

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n \iff \dim(E) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n).$$

Preuve.

□

On s'intéresse plus précisément à la somme de deux espaces vectoriels.

### Définition 8

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On dit que  $\mathcal{B}$  est adaptée à  $F$  s'il existe un entier  $p$  tel que  $1 \leq p \leq n$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $F$ .

On admet les propositions suivantes.

### Proposition 17

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $F$  est de dimension finie, alors il possède au moins un supplémentaire dans  $E$ .

### Proposition 18 (Formule de Grassman)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

### Proposition 19

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie** et  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On a les équivalences suivantes.

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

On donne enfin la proposition suivante.

### Proposition 20

Si  $E_1, \dots, E_p$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie alors  $E_1 \times \dots \times E_p$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p).$$

## 7.3 Applications linéaires

### 7.3.1 Définitions

#### Définition 9

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et une application  $f : E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est une application linéaire si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1.  $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ .
2.  $\forall (u, v) \in E^2, f(u + v) = f(u) + f(v)$  et  $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u) = \lambda f(u)$ .

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires, c'est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle forme linéaire une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K} = F$ , et endomorphisme une application linéaire de  $E$  dans  $E = F$ .

On notera  $\mathcal{L}(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes de  $E$ .

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est bijective, on dira que  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ , ou que  $E$  et  $F$  sont isomorphes. On appelle automorphisme de  $E$ , un endomorphisme de  $E$  qui est bijectif. On notera  $\mathcal{GL}(E)$  l'espace vectoriel des automorphismes de  $E$ .

**Exemple 7.8.** La dérivation est une application linéaire, l'intégration également puisque :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \quad \text{et} \quad \int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$$

**Exemple 7.9.** La spécialisation est une forme linéaire. En effet, on se place par exemple sur  $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ . Soit  $a \in I$ . Montrer que l'application  $\varphi : f \in E \mapsto f(a)$  est une forme linéaire.

#### Définition 10

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

On appelle **noyau** de  $f$  l'ensemble  $\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0\}$ . Ainsi :

$$\forall x \in E : \quad x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = 0.$$

On appelle **image** de  $f$  l'ensemble  $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$ . Ainsi :

$$\forall y \in F : \quad y \in \text{Im}(f) \iff \exists x \in E, y = f(x).$$

#### Proposition 21

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Alors  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Preuve.**

□

**Proposition 22**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a les équivalences suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 f \text{ est injective} & \iff \text{Ker}(f) = \{0\}, \\
 & \iff (\forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0) \\
 f \text{ est surjective} & \iff \text{Im}(f) = F
 \end{array}$$

**Preuve.**

□

### 7.3.2 Polynômes d'endomorphismes

**Définition 11**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u$  un **endomorphisme** de  $E$ .

- On pose  $u^0 = \text{Id}_E$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u^k = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$ .
- Si  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ , on pose  $P(u) = a_0u^0 + a_1u^1 + \dots + a_nu^n = a_0\text{Id}_E + a_1u + \dots + a_nu^n$ .

On remarque que  $u^k$  et  $P(u)$  sont des endomorphismes de  $E$ .

**Définition 12**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $P$  est un **polynôme annulateur** de  $u$  si  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  (endomorphisme nul).

Par exemple, on reverra qu'une symétrie  $s$  vérifie  $s \circ s = \text{Id}_E$  ou encore  $s^2 - \text{Id}_E = 0$ . Ainsi  $P(X) = X^2 - 1$  est un polynôme annulateur de  $s$ .

On peut démontrer la proposition suivante.

**Proposition 23**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ .

- $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$ ,
- Et comme  $P \times Q = Q \times P$ ,  $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$  (i.e. les endomorphismes  $P(u)$  et  $Q(u)$  commutent).
- Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$ , alors tous ses multiples le sont aussi.

**Application au calcul de puissance :****Exercice de colle (E2)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $u^n$  comme combinaison linéaire de  $u$  et de  $\text{Id}_E$ .

**Idée :** On veut trouver « combien » on peut prendre de  $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E$  dans  $u^n$ , ou encore « combien » on peut prendre de  $X^2 - 3X + 2$  dans  $X^n$ . En fait, c'est surtout ce qu'il « reste » qui nous intéresse.

**Proposition 24**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\text{Ker}(P(u))$  est stable par  $u$ .

**Preuve.**

□

### 7.3.3 Liens avec les familles de vecteurs

On rappelle les propositions suivantes.

#### Proposition 25

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, dont on choisit une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de vecteurs de  $F$ . Alors il existe une unique application linéaire  $f : E \rightarrow F$  vérifiant :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad f(e_i) = f_i.$$

Autrement dit, une application linéaire de  $E$  dans  $F$  est entièrement déterminée par la donnée de l'image des vecteurs d'une base de  $E$ .

#### Proposition 26

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , on a :

1. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille génératrice de  $E$  alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ ,
2. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , on a :
  - $f$  est surjective  $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille génératrice de  $F$  et dans ce cas on a  $n = \dim(E) \geq \dim(F)$ .
  - $f$  est injective  $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une famille libre de  $F$  et dans ce cas  $n = \dim(E) \leq \dim(F)$ .
  - $f$  est un isomorphisme  $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$ .

**Application :** Deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension. Et donc, tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

On rappelle également la proposition suivante.

#### Proposition 27

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Alors on a

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F),$$

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

### 7.3.4 Formule du rang

#### Définition 13

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle rang de  $f$  la dimension de  $\text{Im}(f)$  quand elle est finie. On note  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ .

On rappelle la proposition suivante.

#### Proposition 28 (Formule du rang)

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie. Soit  $G$  un supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans  $E$ .

1. La restriction de  $f$  à  $G$  définit un isomorphisme de  $G$  sur  $\text{Im}(f)$ .
2. En conséquence, on a  $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$ .

**Preuve. (D2)**

□

On remarque que si  $F$  est de dimension finie, alors  $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$ , avec égalité si et seulement si  $f$  est surjective. De même, on a  $\text{rg}(f) = \dim(\text{vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}) \leq \dim(E)$ , avec égalité si et seulement si  $f$  est injective.

**Proposition 29 (Caractérisation des Isomorphismes)**

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie  $n \in \mathbb{N}$ , et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} f \text{ est un isomorphisme} & \iff f \text{ est injective} \\ & \iff f \text{ est surjective} \\ & \iff \text{rg}(f) = n \end{aligned}$$

**Proposition 30**

Soient  $E, F, G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . On a les assertions suivantes.

- $\text{rg}(g \circ f) \leq \min\{\text{rg}(f), \text{rg}(g)\}$ .
- Si  $f$  est un isomorphisme, alors  $\text{rg}(g) = \text{rg}(g \circ f)$ .
- Si  $g$  est un isomorphisme, alors  $\text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f)$ .

**Preuve. (D3)**

- On a d'abord  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ , donc  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$ .

De même,  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$  donc  $\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(g \circ f))$ . Et par la formule du rang, on obtient :

$$\dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(E) - \dim(\text{Im}(g \circ f))$$

On a bien aussi  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$ .

- On suppose que  $f$  est un isomorphisme (la surjectivité suffit). Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  alors : Puisque  $f$  est un isomorphisme  $(e'_1, \dots, e'_n) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$  et donc

$$\begin{aligned} \text{rg}(g \circ f) &= \text{rg}(g(f(e_1)), \dots, g(f(e_n))) \quad (\text{par définition du rang de } f) \\ &= \text{rg}(g(e'_1), \dots, g(e'_n)) = \text{rg}(g) \quad (\text{par définition du rang de } g) \end{aligned}$$

- On suppose que  $g$  est un isomorphisme (l'injectivité suffit). Soit  $H$  un supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans  $E$ . On se donne une base adaptée à la somme directe  $E = H \oplus \text{Ker}(f)$  :

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\text{base de } H}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\text{base de } \text{Ker}(f)}).$$

Alors, on a  $\text{rg}(f) = p = \dim(H)$ .

D'autre part,  $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g(f(e_1)), \dots, g(f(e_p)), \underbrace{g(f(e_{p+1}))}_{=0}, \dots, \underbrace{g(f(e_n))}_{=0}) = \text{rg}(g(f(e_1)), \dots, g(f(e_p)))$ .

Et comme  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$  et qu'elle est de cardinal  $p = \dim(\text{Im}(f))$ , c'en est une base de  $\text{Im}(f)$ .

Par conséquent,  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est une famille libre et puisque  $g$  est injective, son image par  $g$  l'est aussi. Son rang est donc son cardinal, c'est-à-dire  $p$ .

On a donc finalement :

$$\text{rg}(f) = p = \text{rg}(g(f(e_1)), \dots, g(f(e_p))) = \text{rg}(g \circ f).$$

□

**Remarque : Extrait de Centrale PSI maths 1 2023.** Démontrer que, si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , alors l'application  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$  conserve le rang.

### 7.3.5 Projecteurs et symétries

#### Définition 14

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. On appelle **projecteur** de  $E$  tout endomorphisme  $p \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $p \circ p = p$ .
2. Si  $E = F \oplus G$  alors tout vecteur  $x \in E$  s'écrit de manière unique sous la forme  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .  
On appelle **projection** sur  $F$  dans la direction de  $G$  l'application suivante.

$$p : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{cases}$$

Illustration graphique :

#### Proposition 31

Une projection est une application linéaire.

Preuve.

□

#### Proposition 32

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . Alors  $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$  et  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  dans la direction de  $\text{Ker}(p)$ .
2. Si  $E = F \oplus G$  et si  $p$  est la projection sur  $F$  dans la direction de  $G$  alors  $p$  est un projecteur et on a :

$$F = \text{Im}(p) \text{ et } G = \text{Ker}(p).$$

Preuve.

□

**Exemple 7.10.** Soit  $E$  un espace vectoriel de  $E$ , montrer que si  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur de  $E$  alors :

$$\text{Im}(p) = \text{Ker}(Id_E - p) = \text{Ker}(p - Id_E).$$

**Méthode 1 : en utilisant la caractérisation des projecteurs.**

Avec les notations précédentes, on a  $x_G = x - x_F = (Id_E - p)(x)$ . Ainsi, si  $p$  est la projection sur  $F$  dans la direction de  $G$  alors  $Id_E - p$  est la projection sur  $G$  dans la direction de  $F$  (et réciproquement).

En particulier, on a  $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(Id_E - p)$ .

**Méthode 2 : par double inclusion.**

**Exemple 7.11.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $p$  un projecteur de  $E$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base adaptée à  $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ . Ecrire la matrice de  $p$  dans cette base et vérifier que  $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$ .

**Exercice de colle (E1 - Méthode à connaître)**

On note  $E = \mathbb{R}^3$ . On considère les sous-espaces vectoriels suivants de  $E$ .

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}\{(1, 2, 1)\}.$$

Montrer que  $E = F \oplus G$  et déterminer la matrice dans la base canonique de  $E$ , de la projection  $p$  sur  $F$  dans la direction de  $G$ .

**Définition 15**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. On appelle **endomorphisme involutif** de  $E$  tout endomorphisme  $s \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $s \circ s = I_E$ .
2. Si  $E = F \oplus G$  alors tout vecteur  $x \in E$  s'écrit de manière unique sous la forme  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

On appelle **symétrie** par rapport à  $F$  dans la direction de  $G$  l'application  $s : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{cases}$

**Illustration graphique :**

On pourrait démontrer les énoncés suivants.

**Proposition 33**

Une symétrie est une application linéaire.

**Proposition 34**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit  $s$  un endomorphisme involutif de  $E$ . Alors  $E = \text{Ker}(s - I_E) \oplus \text{Ker}(s + I_E)$  et  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - I_E)$  dans la direction de  $\text{Ker}(s + I_E)$ .
2. Si  $E = F \oplus G$  et si  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$  dans la direction de  $G$  alors  $s$  est un endomorphisme involutif et on a :

$$F = \text{Ker}(s - I_E) \text{ et } G = \text{Ker}(s + I_E).$$

Avec les notations précédentes, si  $p$  est la projection sur  $F$  dans la direction de  $G$  et si  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$  dans la direction de  $G$ , alors on a la relation suivante entre  $p$  et  $s$  (à savoir retrouver rapidement!).

$$s = 2p - Id_E$$

En effet : pour tout  $x = x_F + x_G \in E$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ , on a les égalités suivantes.

**Exemple 7.12.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On suppose que  $E = F \oplus G$  et on se donne une base  $\mathcal{B}$  adaptée à cette somme directe. Écrire la matrice dans cette base de la symétrie  $s$  par rapport à  $F$  dans la direction de  $G$ .

## 7.4 Hyperplans

### Définition 16

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un **hyperplan** de  $E$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

### Proposition 35 (MPSI)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned}
 F \text{ est un hyperplan de } E & \underset{\text{définition}}{\iff} F \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle} \\
 & \iff F \text{ admet une droite vectorielle pour supplémentaire dans } E
 \end{aligned}$$

**Preuve.** Soit  $F$  un hyperplan de  $E$ . Alors, par définition, il existe une forme linéaire non nulle  $\varphi$  telle que  $F = \text{Ker}(\varphi)$ . Puisque  $\varphi \neq 0$ , alors il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\varphi(x_0) \neq 0$ . On montre, par analyse et synthèse, que  $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}\{x_0\}$ .

**Réciproquement :** Si  $E = F \oplus D$  avec  $D$  droite vectorielle. Alors il existe  $x_0 \in E$  non nul tel que  $D = \text{Vect}\{x_0\}$ .

□

**Proposition 36 (MPSI - PCSI)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie**  $n$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} F \text{ est un hyperplan de } E & \stackrel{\text{définition}}{\iff} F \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle} \\ & \iff F \text{ admet une droite vectorielle pour supplémentaire dans } E \\ & \iff \dim(F) = n - 1 \end{aligned}$$

**Corollaire 1**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Si  $x$  est un vecteur de  $E$ , on note  $(x_1, \dots, x_n)$  ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ . Tout hyperplan de  $E$  admet une équation du type

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0.$$

Cette équation est unique à un scalaire multiplicatif près.

**Preuve.**

□

**Exemple 7.13.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , les hyperplans sont les plans.  
Par exemple,  $H : x - 2y + z = 0$  est l'équation d'un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ .

## 7.5 Annexe

### 7.5.1 Polynômes de Lagrange

**Proposition 37**

Soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  distincts. L'application suivante est un isomorphisme.

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

**Preuve.(E1)**

□

**Proposition 38**

Soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  distincts. Il existe une unique base  $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Cette base est appelée base de Lagrange associée aux scalaires  $a_0, \dots, a_n$ , et on a :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ .

**Preuve.**

□

**Exercice de colle (E1)**

Soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  distincts et  $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  la base de Lagrange associée à  $a_0, \dots, a_n$ .

1. Déterminer les coordonnées d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  dans cette base.
2. Reconnaitre  $L_0(X) + \dots + L_n(X)$  et  $a_0 L_0(X) + \dots + a_n L_n(X)$

### 7.5.2 Pour aller plus loin (Hors-Programme)

#### Exercice de colle (E3)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'implication suivante (*La réciproque est évidente*).

$$\left( \forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x \right) \implies \left( \exists \lambda \in \mathbb{K}, \underbrace{\forall x \in E, u(x) = \lambda x}_{\text{i.e } u = \lambda \text{Id}_E} \right)$$

