# Chapitre 4

# Séries numériques

## 4.1 Définitions

### 4.1.1 Séries

**Définition 1**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
On appelle série de terme général $u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

$S_n$ est appelé somme partielle d'ordre $n$ de la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notation : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\geqslant 0} u_n$.

**Exemple 4.1. (à connaître) :**

- *si* $u_k = k$ *alors* $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et donc* $\sum u_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *si* $u_k = k^2$ *alors* $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et donc* $\sum u_n = \left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Remarque :** Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut aussi définir la série de terme général $u_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On la note dans ce cas $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.

### 4.1.2 Nature

**Définition 2**

Soit $\sum u_n$ une série numérique.

On dit que $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente.

Dans ce cas, la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de la série $\sum u_n$.

On la note $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Dans le cas contraire, on dira que la série $\sum u_n$ diverge.

**Exemple 4.2.** *Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q$, la série de terme général $u_n$ est appelée série géométrique de raison $q$. L'étude complète de ces séries sera traitée dans un prochain paragraphe.*
*Prenons par exemple $u_n = \frac{1}{2^n}$. On a donc*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

*Puisque $\frac{1}{2} \in ]-1,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$.*
*Par conséquent, la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et a pour somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.*

**Remarque importante :**

On ne confondra pas les trois notations suivantes.

- $\sum u_n$ (série, c'est-à-dire une suite)
- $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ (somme partielle d'ordre $n$)
- $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (somme de la série quand elle converge)

L'énoncé suivant vu en première année est extrêmement important. Il peut servir à montrer la convergence de séries, mais aussi de suites.

**Proposition 1**

Soit $\sum u_n$ une série numérique. On a l'équivalence suivante.

$$\text{La série } \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge} \iff \text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}$$

**Remarque importante :**

Pour calculer la somme d'une série télescopique convergente, on reviendra à la définition en calculant explicitement ses sommes partielles.

**Preuve.**

□

**Exercice de colle (E1)**

Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, puis montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.

### 4.1.3 Structure d'espace vectoriel

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à valeurs dans $\mathbb{K}$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ est un scalaire, alors on définit les séries suivantes.

$$\sum u_n \; + \; \sum v_n \; = \; \sum (u_n + v_n)$$
$$\lambda \, . \, \sum u_n \; = \; \sum (\lambda . u_n)$$

On peut montrer que l'ensemble des séries numériques muni des lois + et . est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Le sous-ensemble des séries convergentes en est alors un sous-espace vectoriel, ce qui s'écrit (outre qu'il est non vide) :

**Proposition 2**

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries numériques convergentes et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sont des scalaires, alors la série $\sum (\lambda . u_n + \mu . v_n)$ converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda . u_n + \mu . v_n) \; = \; \lambda . \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu . \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

**Preuve.** Voir cours de première année. □

**Remarque :** Il se peut que la somme de deux séries divergentes donne une série convergente. Par exemple, prenons

$$u_n = \frac{1}{2^n} - 1 \qquad \text{et} \qquad v_n = 1.$$

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} 1 \; = \; \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} - (n+1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty .$$

Ainsi, les séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes. Cependant on a vu que leur somme

$$\sum u_n + \sum v_n \; = \; \sum (u_n + v_n) \; = \; \sum \frac{1}{2^n}$$

est convergente (série géométrique).

Dans ce cas, il est incorrect d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \; = \; \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n).$$

Car les deux premières sommes n'existent pas !

Le tableau suivant donne la nature de $\sum(u_n+v_n)$ en fonction de celles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, du moins, quand c'est possible.

| Nature de $\sum(u_n+v_n)$ | $\sum u_n$ converge | $\sum u_n$ diverge |
|---|---|---|
| $\sum v_n$ converge | | |
| $\sum v_n$ diverge | | |

### 4.1.4 Reste partiel d'une série convergente

**Définition 3**

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente dont on note $S$ la somme.
On appelle reste partiel d'ordre $n$ de cette série :

$$R_n = S - S_n \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

**Proposition 3**

La suite des restes partiels d'une série numérique convergente tend vers 0.

**Preuve.(D1)**

□

### 4.1.5 Terme général d'une série convergente

**Proposition 4 (Condition nécessaire de convergence)**

Soit $\sum u_n$ une série numérique. On a l'implication suivante.

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Mais, la réciproque est fausse.

**Preuve.(D1)**

□

On retiendra l'égalité suivante. Elle permet d'obtenir des résultats sur $u_n$ quand on dispose d'hypothèses sur $S_n$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = S_n - S_{n-1}.}$$

**Cas où la réciproque est fausse :** On pose $u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$.

**fin de (D1)**

**Application :** Par contraposée, une série numérique dont le terme général ne tend pas vers 0 est divergente. On dit alors que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Par exemple, $\sum (-1)^n$ et $\sum n$ divergent grossièrement.

### 4.1.6 Exemple important : les séries géométriques

Les séries géométriques interviennent dans de très nombreux domaines des mathématiques. Il est absolument nécessaire de connaître **précisément** ce paragraphe **sans aucune hésitation**.

**Définition 4**

On appelle série géométrique de raison $a \in \mathbb{K}$, toute série $\lambda . \sum a^n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

**Expression des sommes partielles :**

Si $a \neq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Si $a = 1$ alors $\sum_{k=0}^{n} a^k = n+1$

**Proposition 5**

Soit $a \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence suivante.

$$\sum a^n \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |a| < 1.$$

Et dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

**Preuve.**

□

**Expression des restes partiels :** Si $|a| < 1$ alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k = \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

En effet :

**Exemple 4.3.** *Ecrire sous la forme d'une fraction le nombre rationnel* $q = 0,212121212121\ldots$

## 4.2 Séries à termes positifs

### 4.2.1 Définition et premières propriétés

**Définition 5**

La série numérique $\sum u_n$ est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in \mathbb{R}^+$.

**Remarque :** On pourra **adapter** les résultats qui suivent aux séries à termes négatifs, et plus généralement aux séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.

**Proposition 6**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, on note $S_n$ ses sommes partielles. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Ainsi deux cas se présentent :

- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ converge et l'on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$
De plus, la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses restes partiels décroît et tend vers 0.
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$
**Convention :** On pourra écrire dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

**Remarque :** Cette dernière convention n'est valable, et n'a de sens, que pour les séries à termes positifs. Elle est compatible avec les opérations dans $[0, +\infty[\cup\{+\infty\}$.

**Preuve.**

□

### 4.2.2 Théorèmes de comparaison

**Proposition 7**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

1. On suppose qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$ (c'est en particulier le cas quand $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$), alors :
   - $\sum v_n$ converge $\quad\Longrightarrow\quad \sum u_n$ converge.
   - $\sum u_n$ diverge $\quad\Longrightarrow\quad \sum v_n$ diverge. (contraposée)
2. On suppose que $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$, alors :
   - $\sum v_n$ converge $\quad\Longrightarrow\quad \sum u_n$ converge.
3. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :
   - $\sum v_n$ converge $\quad\Longleftrightarrow\quad \sum u_n$ converge.

**Preuve.**

□

**Remarque importante :** Si l'on veut appliquer les théorèmes de comparaison à des séries dont le terme général est négatif (éventuellement à partir d'un certain rang), mieux vaut tout multiplier par $-1$ et se ramener au cas positif. Car de nombreuses erreurs sont commises dans les manipulations d'inégalités.

### 4.2.3 Nature des Séries de Riemann

Les séries de Riemann sont les séries du type $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

♢ **Nature de la série harmonique** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ **:**

**Méthode 1 :** en utilisant les théorèmes de comparaison

**Exercice de colle (E1)**

En utilisant les théorèmes de comparaison, montrer que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

**Méthode 2 :** en utilisant une intégrale (cf Encadrements à l'aide d'intégrales)

♢ **Cas où** $\alpha \leqslant 1$ **:**

♢ **Cas où** $\alpha > 1$ **:**

**Exercice de colle (E3)**

Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha}$.

**Proposition 8 (Séries de Riemann)**

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

### 4.2.4 Règle de D'Alembert

**Lemme**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

On a alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

**Preuve.**

□

On utilise ce lemme, pour démontrer le résultat suivant appelé règle (ou critère) de d'Alembert pour les séries numériques.

**Proposition 9 (Règle de D'Alembert pour les séries numériques)**

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

On a alors :

- si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge (et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$)
- si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge (et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$)
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

**Preuve.**

- si $\ell < 1$ :

• si $\ell > 1$ :

• Cas où $\ell = 1$ :

□

**Remarque :** On utilise le plus souvent la règle de d'Alembert quand le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie, c'est-à-dire quand $u_n$ est défini par des produits, des factorielles, des puissances...

**Exemple 4.4.** *Déterminer la nature de* $\sum \dfrac{n!}{2^{2^n}}$.

## 4.3 Séries à termes quelconques

### 4.3.1 Séries à termes complexes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes complexes. On écrit : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a_n + ib_n$
avec $a_n = \mathrm{Re}(u_n), b_n = \mathrm{Im}(u_n) \in \mathbb{R}$. On a donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{=A_n} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k}_{=B_n} = A_n + iB_n.$$

Par conséquent, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \iff \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent.}}$$

Et dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

### 4.3.2 Séries alternées

**Définition 6**

On appelle série alternée, toute série du type $\sum(-1)^n v_n$ où $v_n \in \mathbb{R}$ est de signe constant.

**Remarque :** On peut toujours se ramener au cas où $v_n \geqslant 0$. Si $v_n \leqslant 0$, on étudiera :

$$-\sum(-1)^n v_n = \sum(-1)^n(-v_n)$$

**Proposition 10 (Théorème des séries alternées)**

Soit $\sum(-1)^n v_n$ une série alternée.
On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. On a alors :

- La série $\sum(-1)^n v_n$ converge.
- Si l'on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k v_k$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_{2p+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n v_n \leqslant S_{2p}.$$

- Si l'on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k v_k$, on a :
  - $R_n$ est du signe de $(-1)^{n+1}v_{n+1}$ (premier terme)
  - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leqslant |(-1)^{n+1}v_{n+1}| = v_{n+1}$

**Preuve.** On montre dans un premier temps que les suites extraites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Pour montrer le dernier point, on distingue deux cas.

- Si $n = 2p - 1$ :

  $R_{2p-1} = S - S_{2p-1}$

  $R_{2p-1} - (-1)^{2p} v_{2p} = R_{2p} = S - S_{2p}$

- Si $n = 2p$ :

  $R_{2p} = S - S_{2p}$

  $R_{2p} - (-1)^{2p+1} v_{2p+1} = R_{2p+1} = S - S_{2p+1}$

□

**Exemple :** Les séries de Riemann alternées (ce n'est pas un résultat de cours) :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 0.$$

En effet, si $\alpha \leqslant 0$ alors $\left| \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| = n^{-\alpha} \geqslant 1$ et donc $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.

Et si $\alpha > 0$, alors $\left( \dfrac{1}{n^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît et tend vers 0, donc d'après le théorème des séries alternées, la série converge.

**Remarque :** Lorsque la décroissance de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas immédiate, on pourra effectuer un développement asymptotique pour se ramener à des suites plus simples.

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer la nature de $\sum \ln \left( 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$.

### 4.3.3 Séries absolument convergentes, suites sommables

**Définition 7**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique (i.e. à valeurs réelles ou complexes).
On dit que la **série** $\sum u_n$ est **absolument convergente**, ou encore que la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **sommable** si :

$$\text{la série } \sum |u_n| \text{ converge.}$$

**Remarque :** La série $\sum |u_n|$ est à termes positifs, et donc, si elle diverge (ses sommes partielles sont croissantes et divergent vers $+\infty$), par convention, on peut écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = +\infty$.

On pourra donc adopter la notation suivante (officiellement au programme) :

$$\sum u_n \text{ converge absolument (ou } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est sommable) si } \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty.$$

On admet la proposition suivante.

**Proposition 11**

Soit $\sum u_n$ une série numérique. On a l'implication suivante.

$$\sum u_n \text{ converge absolument (ou } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est sommable)} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ converge.}$$

Et dans ce cas, on dit aussi que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la **somme** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Mais la réciproque est fausse.

**Exemple où la réciproque est fausse :** Par le théorème des séries alternées, la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, et pourtant, elle n'est pas absolument convergente car $\displaystyle\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

**Remarque :** La notion suivante est **explicitement hors-programme**. Mais par précaution (beaucoup d'enseignants l'utilisent), elle est précisée ici :

Une série numérique $\sum u_n$ est dite semi-convergente si elle est convergente mais non absolument convergente.

En combinant la notion d'absolue convergence et les théorèmes de comparaison, on obtient la proposition suivante.

**Proposition 12**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique (réelle ou complexe) et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes **positifs**.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

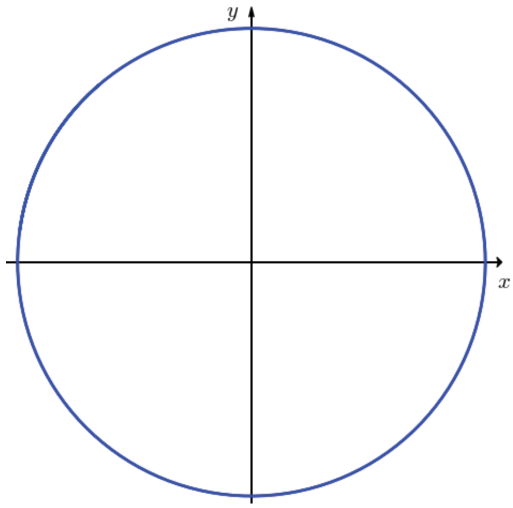
**Preuve.**

$\square$

**Exemple 4.5. Les séries géométriques.**

*On a vu que* $\sum a^n$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$. *On définit l'application* $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, *où* $z$ *est une variable complexe. On a :*

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{D}_f &\iff f(z) \text{ existe} \\ &\iff \sum z^n \text{ converge} \\ &\iff |z| < 1 \end{aligned}$$




*Ainsi,* $\mathcal{D}_f = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\} = D(0,1)$ *est le disque complexe ouvert de centre* $0$ *et de rayon* $1$. *On a en outre :*

$$\sum z^n \text{ converge absolument } \iff \sum |z|^n \text{ converge} \iff |z| < 1$$

*Il y a donc ici convergence absolue sur tout l'ensemble de définition.*

**Exercice de colle (E2)**

Démontrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge. Quel est le signe de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ ?

Etudier la nature de la série de terme général $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$

## 4.4 Produit de Cauchy de deux séries

### 4.4.1 Produit de Cauchy

**Idée :** On veux faire le produit de deux séries convergentes.

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad ).(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \quad )$$

Si l'on développe, il apparaît des termes $u_p v_q$.
Le produit de Cauchy (lorsqu'il existe) consiste à regrouper les termes $u_p v_q$ tels que $p + q = n$.

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{u_0 v_0}_{p+q=0} & + & \underbrace{u_0 v_1 + u_1 v_0}_{p+q=1} & + & \underbrace{u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0}_{p+q=2} & + & \cdots \\ w_0 & + & w_1 & + & w_2 & + & \cdots \end{array}$$

On admet la proposition suivante.

**Proposition 13**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Leur produit de Cauchy est la série $\sum w_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors $\sum w_n$ converge absolument et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

### 4.4.2 Série exponentielle

Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit la série numérique $\sum \frac{z^n}{n!}$. Montrons qu'elle est absolument convergente.

• Si $z = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!} = 1$ donc la série $\sum \frac{0^n}{n!}$ converge absolument.

• Si $z \neq 0$, on pose $u_n = \left|\dfrac{z^n}{n!}\right| > 0$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ < \ 1.$$

Donc d'après la règle de D'Alembert pour les séries numériques, $\sum u_n = \sum \left|\dfrac{z^n}{n!}\right|$ converge.

Ainsi, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente (et donc convergente) pour tout $z$ dans $\mathbb{C}$.

**Définition 8**

On appelle fonction exponentielle, la fonction définie par

$$\exp : z \in \mathbb{C} \ \longmapsto \ \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Elle est définie sur $\mathbb{C}$, et la série converge absolument sur $\mathbb{C}$.

On verra dans le chapitre « Séries entières », que cette fonction exponentielle coïncide avec celle définie en première année. On peut dores et déjà démontrer la propriété fondamentale suivante.

**Proposition 14**

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \exp(z+z') = \exp(z).\exp(z').$$

**Preuve.(D1)**

$\square$

## 4.5 Application : Séries de Bertrand

### 4.5.1 Nature

**Définition 9**

On appelle série de Bertrand toute série du type $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

**Attention : Les séries de Bertrand ne sont pas au programme de PSI et le résultat qui suit ne pourra pas être utilisé. Il faut savoir, sans hésitation, déterminer la nature d'une telle série.**

- Si $\alpha \neq 1$ alors $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Si $\alpha = 1$ alors $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = \sum \frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

### 4.5.2 Cas où $\alpha > 1$

On compare à une série de Riemann.

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$.

**Cas général :**

**Exercice de colle (E2)**

Montrer que si $\alpha > 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge.

### 4.5.3 Cas où $\alpha < 1$

On compare à la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2(n)}$.

**Cas général :**

**Exercice de colle (E2)**

Montrer que si $\alpha < 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ diverge.

### 4.5.4 Cas où $\alpha = 1$

• Si $\beta \leqslant 0$ :

• Si $\beta > 0$ : on compare à une intégrale (cf paragraphe suivant).

## 4.6 Encadrements à l'aide d'intégrales

Pour des séries du type $\sum f(n)$ avec $f$ **monotone**, on peut utiliser des comparaisons avec des intégrales, pour obtenir :

- des natures de séries,
- des encadrements de sommes partielles, des équivalents, des développements asymptotiques,
- des encadrements de restes partiels en cas de convergence de la série.

On donne plusieurs exemples importants. La démarche est à maîtriser.

### 4.6.1 Nature de séries, encadrements de sommes partielles

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer la nature de $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

**Exercice de colle (E2)**

Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n}$ et un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

### 4.6.2 Développements asymptotiques

**Exercice de colle (E3 - résultat à retenir)**

Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ (appelée constante d'Euler) telle que

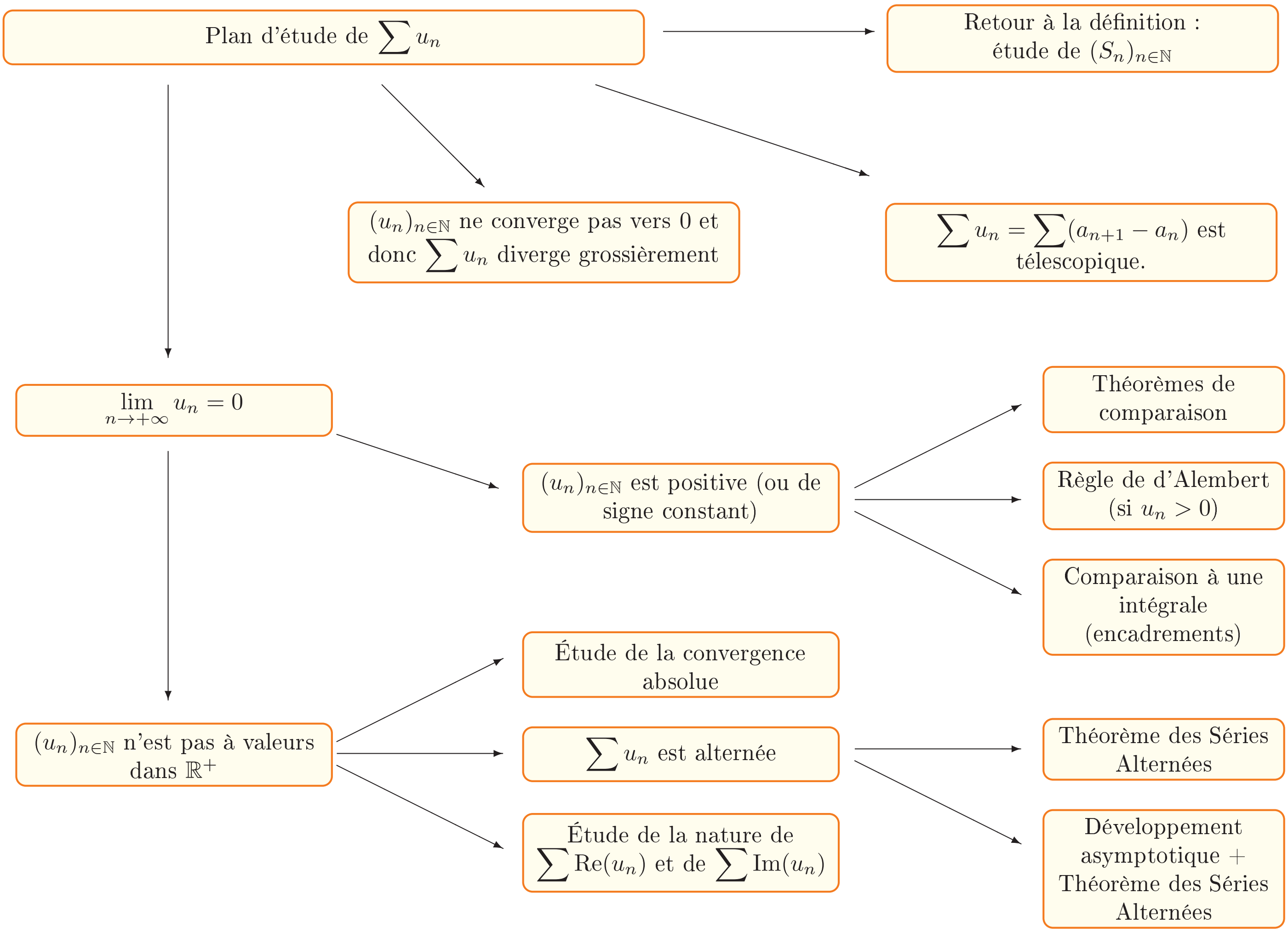
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1).$$

### 4.6.3 Encadrements et équivalents de restes partiels

**Exercice de colle (E2)**

Déterminer un équivalent quand $n$ tend vers $+\infty$ de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

## 4.7 Plan d'étude




## 4.8 Formule de Stirling

**Proposition 15**

On a l'équivalent suivant.

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Si la formule de Stirling est à connaître, sa preuve n'est pas exigible. Néanmoins, les techniques qu'elle met en oeuvre sont très classiques et font souvent l'objet d'épreuves de concours. Il est donc conseillé de travailler le DNS correspondant.

## 4.9 Annexe

### 4.9.1 Sommation d'équivalents (Hors-Programme)

**Exercice (E3 en autonomie)**

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques avec $b_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$.

(1) Si $\sum b_n$ converge, montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.

(2) Si $\sum b_n$ diverge, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$.

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques avec $b_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$. Par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \qquad |a_n| \leqslant \varepsilon b_n. \tag{$*$}$$

(1) Supposons que $\sum b_n$ converge. Par comparaison, $\sum |a_n|$ converge aussi.
On se donne $\varepsilon > 0$ et on considère l'entier $N$ défini par $(*)$. Pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon b_k = \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k.$$

Ainsi, on a bien, par définition, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right).}$

(2) Supposons que $\sum b_n$ converge. Puisque cette série est à termes positifs, ses sommes partielles sont croissantes. Et puisqu'elles divergent, c'est forcément vers $+\infty$. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = +\infty.$$

On se donne $\varepsilon > 0$ et on considère l'entier $N$ défini par $(*)$. Pour tout $n > N$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad (\text{car } b_k \geqslant 0)\end{aligned}$$

On s'intéresse à la première somme. L'entier $N$ étant fixé, il s'agit d'une constante $C(N)$. Et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = +\infty$ :

$$\sum_{k=0}^{N} |a_k| = C(N) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Ainsi, il existe un entier naturel $N'$ tel que : $\forall n \geqslant N'$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} |a_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Finalement, si $n \geqslant \max(N, N')$, alors

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} b_k + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} b_k = 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Quitte à reprendre le raisonnement en changeant $\varepsilon$ en $\varepsilon/2$, on otient bien : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).}$

### 4.9.2 Transformation d'Abel (Hors-Programme)

On ne donne ici aucun énoncé, seulement quelques pistes de recherche dans un contexte particulier.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On s'intéresse à la nature de $\sum u_n v_n$.
On suppose connaître certaines hypothèses sur :

- la suite des sommes partielles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (par exemple convergente, ou bornée,...),
- la suite $(v_n - v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

On pourra retenir la démarche qui permet d'exploiter ces hypothèses :

L'idée-clé est d'écrire $u_n = U_n - U_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k v_k &= u_0v_0 + \sum_{k=1}^{n}(U_k - U_{k-1})v_k = u_0v_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k v_k - \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}v_k \\
&= u_0v_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k v_k - \sum_{k=0}^{n-1} U_k v_{k+1} = u_0v_0 - U_0v_1 + \sum_{k=0}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n
\end{aligned}$$

**Exercice (E3)**

Démontrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et en déduire la convergence $\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k)$.
On montre d'abord que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (**très classique !**).

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{i}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)/2}}{\mathrm{e}^{i/2}}\frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}\right) = \frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{in/2}\right) = \frac{\sin((n+1)/2)}{\sin(1/2)}\sin(n/2)
\end{aligned}$$

Et donc $|S_n| \leqslant \frac{1}{\sin(1/2)} = M$.

On utilise à présent l'égalité $\boxed{\sin(k) = S_k - S_{k-1}.}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n}{n} - S_0
\end{aligned}$$

Or $S_0 = 0$ et puisque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

D'autre part, on a l'encadrement suivant.

$$\left|S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| \leqslant M\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right| = M\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{M}{k(k+1)} \leqslant \frac{M}{k^2}.$$

Et la série de Riemann, $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, donc par comparaison, la série $\sum S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge absolument.

Finalement, $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k}$ admet une limite finie lorsque $n$ tend vers $+\infty$, et donc $\boxed{\sum \frac{\sin(n)}{n} \text{ converge.}}$