Chapitre 3

Suites numériques

3.1 Limites

3.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Illustration graphique :

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si on a

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad n \geqslant n_0 \implies u_n \geqslant A.$$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Définition 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si on a

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : \quad n \geqslant n_0 \implies u_n \leqslant A.$$

On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 1

Toute suite convergente est bornée.

Preuve.(D1)

□

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers ℓ.
Si $\ell > 0$ alors il existe un réel $m > 0$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que l'on ait $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n > m$.

Preuve.

□

Proposition 3

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. On a :

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ la suite $(a.u_n + b.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a\ell + b\ell'$.
2. La suite $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.
3. Si $\ell' \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{\ell}{\ell'}$.
4. **Passage à la limite** dans une inégalité :
   Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **réelles** et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$ alors on a aussi $\ell \leqslant \ell'$.

3.1.2 Suites extraites

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 3.1. *Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Exemple 3.2. *Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$ est divergente.*

On pourrait également, en utilisant la définition de limite, montrer la proposition suivante.

Proposition 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

3.2 Relations de comparaison

3.2.1 Comparaison locale de suites

Définition 5

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dominée par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite **bornée** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'à partir d'un certain rang on ait
$$u_n = v_n w_n.$$
On note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est négligeable devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tendant vers 0** telle qu'à partir d'un certain rang on ait
$$u_n = v_n w_n.$$
On note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
3. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équivalente à* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tendant vers 1** telle qu'à partir d'un certain rang on ait
$$u_n = v_n w_n.$$
On note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Remarque : Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas (à partir d'un certain rang), on peut diviser toutes les égalités par v_n et on obtient la proposition suivante.

Proposition 6

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas (à partir d'un certain rang n_0). On a les équivalences suivantes.

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \iff \text{la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0} \text{ est bornée}$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1$$

Exemple 3.3. *Démontrer que* $\dfrac{n\ln(n)}{n^3+3n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

3.2.2 Premières propriétés

- La relation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ signifie :
- La relation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$ signifie :
- A retenir :

$$\boxed{\begin{aligned} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n &\iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ &\iff u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\end{aligned}}$$

- **Transitivité :**
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$; c'est la transitivité de la relation o.

  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$; c'est la transitivité de la relation O.

- **Linéarité :**
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $au_n + bv_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$ alors $au_n + bv_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$.

- On se méfiera de l'équivalent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$, quasiment toujours faux !
  Celle-ci signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **nulle à partir d'un certain rang**.

- **Opérations sur les équivalents :**
  On peut multiplier et diviser des équivalents. On ne peut pas composer des équivalents par une fonction. On ne peut pas ajouter des équivalents. Cependant, on pourra utiliser la propriété suivante.

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n) \quad \Longleftrightarrow \quad u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

- **Equivalents et limites :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et soit $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.
  On a l'implication suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

- On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{K}$. Si $\boxed{\ell \neq 0}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

- **Equivalents et signes :** Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors pour n assez grand, u_n et v_n sont de même signe.

3.3 Théorèmes d'existence

3.3.1 Suite monotone

Proposition 7 (Théorème de la limite monotone)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors elle converge.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

3.3.2 Théorème d'encadrement

Proposition 8 (Théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou du moins à partir d'un certain rang), on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite vaut ℓ.

Attention : On confond souvent le théorème d'encadrement (qui donne l'existence et la valeur d'une limite) et le passage à la limite dans des inégalités qui nécessite de **connaître au préalable** l'existence des limites.

3.3.3 Suites adjacentes

Définition 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dira que ces suites sont **adjacentes**, si :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$,
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Remarque : Les points 2. et 3. entraînent le point 1. Il n'est donc pas nécessaire de vérifier que $u_n \leqslant v_n$.

Proposition 9

Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes alors elles convergent et elles convergent vers une même limite ℓ.
De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Définition 7 (Valeurs approchées)

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ un réel (par exemple une limite de suite).
On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de ℓ à $\varepsilon > 0$ près si $|\ell - \alpha| < \varepsilon$.
On dira de plus, que α est une valeur approchée à ε près par défaut (resp. par excès) si $\ell - \varepsilon < \alpha \leqslant \ell$ (resp. $\ell \geqslant \alpha < \ell + \varepsilon$).

Exemple 3.4. *On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \quad \textit{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

1. Justifier l'existence de ces deux suites et étudier le signe de $u_n - v_n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$.

3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

4. Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée ℓ à 10^{-4} près.

5. Écrire en Python une fonction `suites(n)` *qui prend pour argument un entier* `n` *et qui renvoie la liste* `[`u_n`,` v_n`]`.

```
import math
def suites(n) :
```

6. Écrire en Python une fonction `valeur(eps)` *qui prend pour argument un réel* `eps`>0 *et qui renvoie une valeur approchée de ℓ à* `eps` *près par défaut.*

```
def valeur(eps) :
```

3.4 Deux exemples à connaître (cf Vade Mecum)

3.4.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe des réels b et c tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0.$$

On note $(\mathcal{E})$: $x^2+bx+c=0$ l'équation caractéristique associée et $\Delta=b^2-4c$ son discriminant.
• Si $\Delta\neq 0$ alors $(\mathcal{E})$ possède deux solutions (éventuellement complexes) z_1 et z_2 distinctes et on peut trouver deux constantes $A,B\in\mathbb{K}$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=Az_1^n+Bz_2^n.$$

• Si $\Delta=0$ alors $(\mathcal{E})$ possède une solution double (éventuellement complexe) z_0 et on peut trouver deux constantes $A,B\in\mathbb{K}$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=(An+B)z_0^n.$$

• Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et si $\Delta<0$ alors les solutions de $(\mathcal{E})$ sont de la forme $r\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$ avec $r>0$ et on peut trouver deux constantes réelles A et B telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=r^n(A\cos(\theta n)+B\sin(\theta n)).$$

Mise en oeuvre : Cf. DNS0.

3.4.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 8

On appelle suite arithmético-géométrique, une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation du type :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=au_n+b \qquad (*)$$

où a et b sont des constantes numériques données.

Plan d'étude : Si $a=1$, il s'agit d'une suite arithmétique et si $b=0$, il s'agit d'une suite géométrique. On suppose donc désormais que $a\neq 1$ et que $b\neq 0$.
• Déterminer l'unique suite constante vérifiant $(*)$. On note ℓ cette constante.
• Poser $v_n=u_n-\ell$ et montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
• En déduire l'expression de v_n, puis celle de $u_n=v_n+\ell$.

Mise en oeuvre : Cf. DNS0.

3.5 Etude des suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

3.5.1 Définition

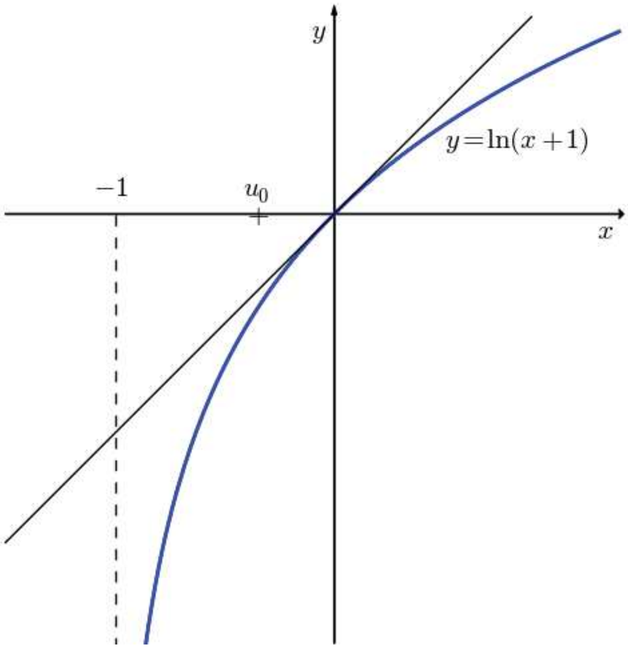
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On veut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On ne peut pas toujours le faire !
Cela dépend de la fonction f.

Exemple 3.5. *On peut démontrer qu'il n'est pas possible de définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :*

$$\begin{cases} u_0 \in]-1, 0[, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n). \end{cases}$$



Remarque : Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou si $f(I) \subset I$ alors on pourra toujours calculer u_n. Ainsi, par exemple, les suites suivantes sont bien définies.

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \exp(u_n - 1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \end{cases}$$

Proposition 11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est **continue** sur I alors on a l'implication :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \quad \Longrightarrow \quad f(\ell) = \ell.$$

Ainsi, si f est continue sur I, les seules limites possibles pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont **contenues dans** I sont les points fixes de f.

Preuve. (D1)

□

Ainsi, l'hypothèse de la continuité est **essentielle**. Il ne faut pas oublier de la vérifier, même si celle-ci est évidente ! Il ne faut pas non plus oublier les limites possibles qui ne seraient pas dans I mais à ses extrémités.

3.5.2 Monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Attention, les énoncés qui suivent sont dans le programme mais pas en tant que proposition.

• **Par l'étude du signe de $f(x)-x$:**

Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation $u_{n+1}=f(u_n)$, on s'intéresse au signe de

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n.$$

Avec les notations précédentes, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on a l'implication suivante.

$$\left.\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in I\\ \\ \forall x\in I,\ f(x)\geqslant x \quad (\text{resp.} f(x)\leqslant x)\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\qquad (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est croissante (resp. décroissante)}$$

Exemple 3.6. *Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in[0,1]$ et $u_{n+1}=u_n-u_n^2$* **(E1)**.

• **En utilisant la croissance de f (démonstration par récurrence) :**

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $u_0\in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1}=f(u_n)$.
Si f est **croissante**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone**. Plus précisément, on a :

- si $u_1\geqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- si $u_1\leqslant u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Preuve. (D1) Ce résultat se montre très simplement par récurrence. On prouve le premier point. On suppose que f est croissante et que l'on a $u_1\geqslant u_0$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_n:\qquad u_{n+1}\geqslant u_n.$$

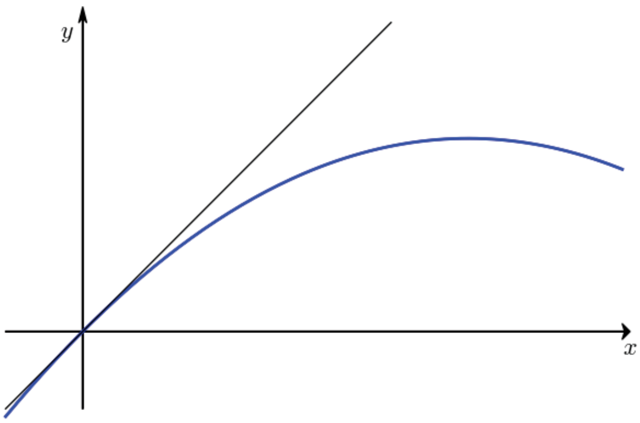
Initialisation :

Hérédité :

Le cas où f est croissante et $u_1 \leqslant u_0$ est très similaire.

□

Illustration graphique :



Remarque :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est décroissante, alors la fonction $f \circ f$ est croissante et en appliquant ce qui précède, on montre que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonies opposées.

Preuve. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
On a alors d'une part $f(v_n) = u_{2n+1}$ et donc

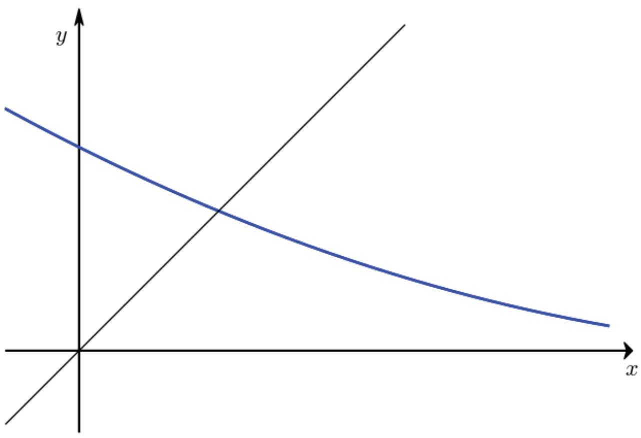
$$f(f(v_n)) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = v_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$f \circ f(v_n) = v_{n+1}$$

avec $f \circ f$ croissante. D'après le premier cas, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. On montrerait de même que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Et par décroissance de f, les premiers termes de ces suites ont des ordres opposés. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de monotonies contraires. □

Illustration graphique :



3.5.3 Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

On rappelle l'énoncé suivant connu sous le nom d'Inégalité des Accroissements Finis.

Proposition 12

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- S'il existe un réel m tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $m \leqslant f'(x)$ alors on a
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a).$$
- S'il existe un réel M tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $f'(x) \leqslant M$ alors on a
$$f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$
- S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$ on ait $|f'(x)| \leqslant M$ alors on a
$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

On utilise cet énoncé avec par exemple $b = u_n$ et $a = \ell$ (un point fixe de f).

Avec le troisième énoncé, on obtient $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant M|u_n - \ell|$ soit :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant M|u_n - \ell|.$$

Par récurrence, on montrerait facilement que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant M^n|u_0 - \ell|.$$

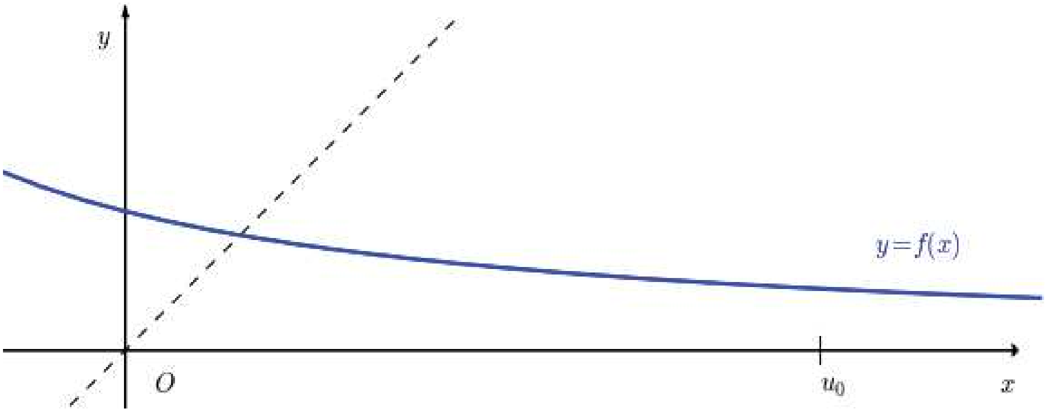
Ainsi, si $0 < M < 1$ alors M^n tend vers 0 et le théorème de majoration donne la convergence vers ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dans le cas où $m > 1$ et où $u_0 \geqslant l$, avec le premier énoncé, on montrerait de même que la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger.

Exemple 3.7. *On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geqslant 0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{u_n + 2}.$$

- *Illustration graphique :*



- *Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que ses termes sont positifs.*

• *Déterminer la seule limite ℓ possible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

• *On suppose ici que $u_0 = 1$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge effectivement vers ℓ et déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.*

3.6 Quelques outils à connaître

3.6.1 Inégalités

- Fonctions majorées, minorées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin(x)| \leqslant 1, \quad |\cos(x)| \leqslant 1, \quad |\operatorname{Arctan}(x)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) \geqslant 1.$$

- Inégalités de convexité :

$$\forall x \geqslant -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leqslant e^x.$$

- Autres inégalités :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \sin(x) \leqslant x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x| \quad \text{et} \quad |x| \leqslant |\operatorname{sh}(x)|.$$

- Inégalités triangulaires :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x + y \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{et} \quad \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|$$

3.6.2 Limites de référence

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \qquad \qquad \lim_{x \to -\infty} x^k e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{(\ln(x))^l} = +\infty \qquad \qquad \lim_{x \to 0^+} x^k (\ln(x))^l = 0 \quad (\text{si } k > 0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$$

3.6.3 Développements limités

Développement limités provenant de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Développements limités provenant de la fonction exponentielle :

$$
\begin{array}{lclcl}
\exp(x) & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \\
\sin(x) & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}) \\
\cos(x) & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}) \\
\mathrm{sh}(x) & = & x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}) \\
\mathrm{ch}(x) & = & 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1}) \\
\mathrm{Arctan}(x) & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2}) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})
\end{array}
$$

Développement limité de $(1+x)^\alpha$:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)
\end{aligned}
$$

3.7 Annexe

3.7.1 Rappels sur la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 9 (Majorant, minorant, partie bornée)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et M un réel. On dit que :

- M est un majorant de A si : $\forall a \in A,\ a \leqslant M$,
- m est un minorant de A si : $\forall a \in A,\ m \leqslant a$,
- A est une partie bornée si elle possède un majorant et un minorant, c'est-à-dire si :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall a \in A, \quad m \leqslant a \leqslant M.$$

Définition 10 (borne supérieure, inférieure)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle, si elle existe, borne supérieure de A, le plus petit de ses majorants. On la note $\sup(A)$.
- On appelle, si elle existe, borne inférieure de A, le plus grand de ses minorants. On la note $\inf(A)$.

Proposition 13 (Très important!)

Si A est une partie **non vide** et **majorée** (resp. minorée) de $\mathbb{R}$, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure).

Par **convention** :

- Si A est un partie non vide et **non majorée** de $\mathbb{R}$, on écrira $\sup(A) = +\infty$.
- Si A est un partie non vide et **non minorée** de $\mathbb{R}$, on écrira $\inf(A) = -\infty$.

Exercice de colle (E3)

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer les équivalences suivantes :

$$(1) \quad \alpha = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A, \quad \alpha - \varepsilon < a \end{cases} \quad (2)$$

$$\iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ d'éléments de } A, \text{ telle que } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Exercice

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \sup(A) \leqslant \sup(B)$$

3.7.2 Suites à croissance contrôlée

Exercice de colle (E1)

Soit $L > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe vérifiant

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L.$$

1. **(E1)** On suppose que $L < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Est-ce encore vrai pour $L = 1$?
3. Application : soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$.

1.(E1)

2.

3.

3.7.3 Définition des relations de comparaison avec les quantificateurs

Exercice de colle (E3)

Écrire avec les quantificateurs les définitions suivantes (a est un réel).

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$
3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
4. $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$
5. $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$
6. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

3.7.4 Théorème de Césaro (MPSI)

Exercice de colle (E3 en autonomie)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que cette suite converge et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ.

Preuve.
• Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a les majorations suivantes.

$$\begin{aligned} |v_n - a| &= \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} - a\right| \\ &= \frac{1}{n}\,|u_1+u_2+\cdots+u_n - n.a| \\ &= \frac{1}{n}\,|(u_1-a)+(u_2-a)+\cdots+(u_n-a)| \quad \leqslant \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k-a| \end{aligned}$$

On a donc démontré $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad |v_n-a| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k-a|.}$

• On démontre à présent le résultat en revenant à la définition de limite. L'idée est de « couper » la somme précédente en deux. Soit $\varepsilon>0$.

↪ Par définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, on a

$$\boxed{\exists N_1\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{N}^*, \quad k\geqslant N_1 \implies |u_k-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.}$$

↪ L'entier N_1 étant constant, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k-a|\right)=0$. Et encore par définition, on obtient :

$$\boxed{\exists N_2\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad n\geqslant N_2 \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.}$$

↪ Soit $N_0=\max(N_1,N_2)$ et $n\geqslant N_0+1$ un entier. On a les majorations suivantes.

$$\begin{aligned} |v_n-a| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k-a| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k-a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|u_k-a| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \quad\leqslant\quad \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \quad=\quad \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}\times n\times\frac{\varepsilon}{2} \quad=\quad \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé $\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad n\geqslant N_0 \implies |v_n-a|\leqslant\varepsilon$. C'est la définition de $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a.}$

□

Exercice de colle (E3)

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n)=\ell\in\mathbb{R}$.
   À l'aide du théorème de Césaro, démontrer que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{n}=\ell$.
2. Soit $u_0\in]0,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_{n+1}=u_n-u_n^2$.
   Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ puis, en utilisant la question précédente, que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{nu_n}=1$.
   En déduire un équivalent de u_n.

1. On pose $u_n=v_{n+1}-v_n$ et on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell\in\mathbb{R}$.
D'après le théorème de Césaro, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{v_{n+1}-v_1}{n}\right)=\ell.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{v_{n+1}}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{v_{n+1}-v_1+v_1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{v_{n+1}-v_1}{n}\right)-\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{v_1}{n}\right)=\ell$.

Et par suite, puisque $n\underset{n\to+\infty}{\sim}n+1$, on a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{n+1}=\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{n}.}$

2. Soit $f:x\longmapsto x^2-x$. Une étude de cette fonction permet de montrer rapidement que $f(]0,1[)\subset]0,1[$. Ainsi, puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\in]0,1[.$$

D'autre part, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=-u_n^2\leqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite que l'on note $\ell\in[0,1]$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, la limite ℓ est un point fixe de f.

$$\begin{aligned} f(\ell)=\ell &\iff \ell=\ell-\ell^2,\\ &\iff \ell=0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0.}$

On pose ici, $v_n=\dfrac{1}{u_n}$. Calculons :

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}=\frac{1}{u_n-u_n^2}-\frac{1}{u_n}\\ &= \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{1-u_n}-1\right)=\frac{1}{u_n}\left(1+u_n+\underset{n\to+\infty}{o}(u_n)-1\right) \qquad \text{car } \lim_{n\to+\infty}u_n=0,\\ &= \frac{1}{u_n}\left(u_n+\underset{n\to+\infty}{o}(u_n)\right) \end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n)=1$ et d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{n}=1$. En remplaçant, v_n par son expression en fonction de u_n, on trouve

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nu_n}=1,}$$

ce qui s'écrit encore $\boxed{u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}.}$