Chapitre 2

Rappels sur les polynômes

2.1 Structures algébriques sur l'ensemble des polynômes :

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit quatre lois.

- La loi . définie par $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda.P)(X) = \lambda.P(X)$.
- La loi + définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$.
- La loi $\times$ définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \times Q)(X) = P(X) \times Q(X)$.
- La loi $\circ$ définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \circ Q)(X) = P(Q(X))$.
  Ou encore, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P \circ Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k(X)$.

2.2 Degré d'un polynôme :

Définition 1

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $P = 0$, on pose $\deg(P) = -\infty$.
- Sinon, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, et on pose $\deg(P) = n$.
  - a_n est appelé coefficient dominant et $a_n X^n$ terme dominant de $P(X)$.
  - Si $a_n = 1$, on dit que $P(X)$ est unitaire.

Proposition 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de $\mathbb{K}[X]$.
On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$.

Exercice de colle (E1)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de $P_n(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.

Par opérations, on a tout d'abord $\deg(P_n) \leq 2n$. Et P_n n'a que des termes pairs.

Rédaction 1:

termes en X^{2n} : $1 - 2 + 1 = 0$

termes en $X^{2(n-1)}$: $\binom{2n}{1} - \binom{2n}{1} = 0$

termes en $X^{2(n-2)}$: $\binom{2n}{2} + \binom{2n}{2} \neq 0$

donc $\deg(P_n) = 2(n-2)$ (du moins si $n \geq 2$)

si $n = 0$ ou 1, $P_n = 0$ donc $\deg(P_n) = -\infty$

Rédaction 2:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\cancel{n}\, n-1} \binom{n}{k} X^{2k} - \cancel{2X^{2n}} + \sum_{k=0}^{\cancel{n}\, n-1} \binom{n}{k} X^{2k} (-1)^{n-k}$$

$$\underset{(n\geq 1)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \underbrace{\left(1 + (-1)^{n-k}\right)}_{=0 \text{ si } k = n-1} X^{2k}$$

$$\underset{(n\geq 2)}{=} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \underbrace{\left(1 + (-1)^{n-k}\right)}_{\neq 0 \text{ si } k = n-2} X^{2k}$$

Donc si $n \geq 2$, $\deg(P_n) = 2(n-2)$
si $n = 0$ ou 1 $\deg(P_n) = -\infty$.

Exercice de colle (E1)

On considère une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Déterminer le degré de T_n, son terme dominant et sa parité.

Le calcul donne $T_2(X) = 2X T_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1$ (polynôme pair).
$T_3(X) = 2X T_2(X) - T_1(X) = 4X^3 - 3X$ (polynôme impair).

On montre par une récurrence $\boxed{\text{double}}$: $\mathcal{P}_n$: $\begin{cases} \deg(T_n) = n \\ \text{terme dom. de } T_n = 2^{n-1} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*, 1 \text{ si } n = 0 \\ T_n \text{ de même parité que } n \text{ ie } T_n(-X) = (-1)^n T_n(X) \end{cases}$

Initialisation: $\boxed{\mathcal{P}_0 \text{ et } \mathcal{P}_1 \text{ sont vraies (évident).}}$

Hérédité: Soit $n \geq 0$ un entier. On suppose que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies. Montrons $\mathcal{P}_{n+2}$.

$$T_{n+2}(X) = 2X\, T_{n+1}(X) - T_n(X) \overset{\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}}{=} 2X\left(2^n X^{n+1} + \dots\right) - T_n(X)$$
$$= 2^{n+1} X^{n+2} + \text{termes de degrés} \leq n.$$

les 2 premiers points sont vérifiés.

$$T_{n+2}(-X) = 2(-X)\, T_{n+1}(-X) - T_n(-X) \overset{\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}}{=} -2X(-1)^{n+1} T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X)$$
$$= (-1)^{n+2}\left(2X\, T_{n+1}(X) - T_n(X)\right) = (-1)^{n+2}\, T_{n+2}(X)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

ce qu'on voulait.

2.3 Multiples et diviseurs d'un polynôme :

Définition 2

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que $Q \in \mathbb{K}[X]$ divise P (ou est un diviseur de P) si il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = U \times Q$.
  On note $Q|P$.
- On dit que Q est un multiple de P si P est un diviseur de Q.
  On note $P.\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des multiples de P.

Proposition 3 (Division euclidienne)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $\boxed{B \neq 0}$.
Il existe un unique $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est appelé le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Exemple 2.1. *Quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)$?*

$(X-a) \neq 0$ donc : $\exists! \, (Q,R) \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = (X-a)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(X-a) = 1$

Ainsi R est un polynôme constant, on le note $\alpha \in \mathbb{K}$. $P(X) = (X-a)\,Q(X) + \alpha$.

On évalue en $X = a$, on obtient : $P(a) = 0 + \alpha = \alpha$.

Donc $R(X) = \alpha = P(a) \in \mathbb{K}$.

Exemple 2.2. *Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $U(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$ par $V(X) = X^2 + 2X - 1$.*

On « pose » cette division euclidienne.

$$\begin{array}{rl|l}
 & U(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1 & X^2 + 2X - 1 = V(X) \\
\ominus & X^4 + 2X^3 - X^2 & \boxed{X^2 - 5X + 13} \\
 & -5X^3 + 3X^2 - X + 1 & \uparrow \\
\ominus & -5X^3 - 10X^2 + 5X & \text{Quotient} \\
 & 13X^2 - 6X + 1 & \\
\ominus & 13X^2 + 26X - 13 & \\
\text{Reste} \longrightarrow & \boxed{-32X + 14} & \text{de degré } 1 < \deg(V)
\end{array}$$

et donc :

$$\boxed{U(X) = (X^2 - 5X + 13)\,V(X) - 32X + 14}$$

Rappel : racines cubiques de l'unité.

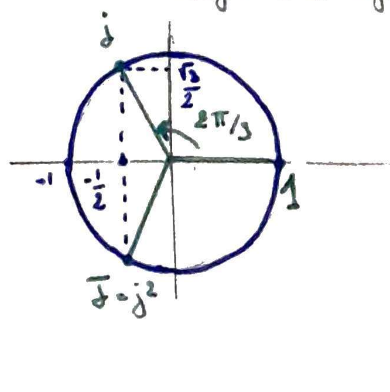
à retenir !

On pose $j = e^{2i\pi/3}$

Les racines cubiques de l'unité sont : 1, j et $\bar{j} = j^2$

$X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-\bar{j}) = (X-1)(X^2+X+1)$

$j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$.



Exercice de colle (E2)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que : $B = X^2 + X + 1$ divise $P \iff P(j) = 0$.

($\Rightarrow$) Si X^2+X+1 divise P Par définition, $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = Q(X).(X^2+X+1)$

Donc $P(j) = Q(j) \times \underbrace{(j^2+j+1)}_{=0} = 0$ Ainsi $P(j)=0$.

($\Leftarrow$) Si $P(j)=0$.

j est racine de P. Comme P est à coefficients réels, $\bar{j}$ est aussi racine de P.

Comme $j, \bar{j}$ sont distincts, $(X-j)(X-\bar{j})$ divise P.

Or $(X-j)(X-\bar{j}) = X^2+X+1$ donc X^2+X+1 divise P.

Autre rédaction possible : On écrit la division euclidienne de $P(X)$ par X^2+X+1 :

$\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $P(X) = Q(X)(X^2+X+1) + \overbrace{aX+b}^{R(X)}$

On évalue en j : $P(j) = 0 = Q(j)\underbrace{(j^2+j+1)}_{=0} + aj + b = a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b$

Donc $\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 0 \\ a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$ ou encore $a = b = 0$. Ainsi :

$P(X) = Q(X)(X^2+X+1)$ ce qu'on voulait.

On donne le résultat suivant, que l'on montrera dans le chapitre *Révisions d'algèbre linéaire*.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'ensemble $\mathbb{K}[X].P$ des multiples de P, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{K}[X].P$.

2.4 Dérivation d'un polynôme :

Définition 3

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P, le polynôme

$$P'(X) = \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\alpha_{k+1} X^k.$$

De proche en proche, on définit les polynômes dérivés successifs de P par $P^{(k+1)}(X) = \left(P^{(k)}(X)\right)'$.

Exemple 2.3. *Déterminer le degré et le terme dominant de $L_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.*

On note $P_n(X) = (X^2-1)^n$. Il existe Q_n tel que $\deg(Q_n) \leq 2n-1$ et :

$$P_n(X) = X^{2n} + Q_n(X).$$

Alors :

$$P'_n(X) = 2n \cdot X^{2n-1} + Q'_n(X)$$

$$P''_n(X) = 2n \cdot (2n-1)\, X^{2n-2} + Q''_n(X)$$

$$\vdots$$

$$L_n(X) = P_n^{(n)}(X) = 2n \times (2n-1) \times \cdots \times (2n-(n-1))\, X^n + Q_n^{(n)}(X)$$

$$= \underbrace{2n \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1)\, X^n}_{\neq 0} + \underbrace{Q_n^{(n)}(X)}_{\text{de degré } \leq 2n-1-n = n-1}.$$

Donc $\deg(L_n) = n$ et le terme dominant de L_n est $(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1) = \dfrac{(2n)!}{n!}$

Proposition 4 (Formule de Taylor)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout entier $N \geqslant n$ et tout $a \in \mathbb{K}$, on a

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \quad \text{ou encore} \quad P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

2.5 Racines d'un polynôme :

Proposition 5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$.

(2) $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X-a)^n Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que a est racine d'ordre n de P.

Proposition 6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts.

- On a l'équivalence suivante.

$$a_1, \ldots, a_n \text{ racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n} (X - a_i) \text{ divise } P(X).$$

- Si $a_1, \ldots, a_n$ sont racines de P et si $\deg(P) = n$ alors $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i)$ où λ est le coefficient dominant de P.

- Un polynôme P non nul a au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

Exercice de colle (E1)

Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $X^2 - 2X + 1$.

On remarque que $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.

Or $P_n(1) = n - (n+1) + 1 = 0$

$P_n'(X) = n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1}$ donc $P_n'(1) = n(n+1) - (n+1)n = 0$

Ainsi 1 est racine de multiplicité au moins 2 de P_n donc :

$$\boxed{(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1 \text{ divise } P_n(X)}$$

Relation coefficients/racines : Pour trouver les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme $P(X)$, on écrit

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i).$$

On développe le produit, puis on identifie les coefficients. Il faut connaître les résultats suivants.

- Si $P(X) = aX^2 + bX + c$ et si a_1, a_2 sont ses racines, on a $S = a_1 + a_2 = \frac{-b}{a}$ et $P = a_1 a_2 = \frac{c}{a}$.
- Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et si a_1, a_2, a_3 sont ses racines, on a

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{-b}{a}, \quad a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad a_1a_2a_3 = \frac{-d}{a}.$$

En effet : $aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)$

$= a\left(X^3 - (a_1+a_2+a_3)X^2 + (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)X - a_1a_2a_3\right)$

Par unicité des coefficients : $\begin{cases} b = -a(a_1 + a_2 + a_3) \\ c = a(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) \\ d = -a(a_1a_2a_3) \end{cases}$

Il reste à diviser par a qui est non nul.

Exercice de colle (E2)

Déterminer les racines de $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux d'entre elles vaut la troisième.

On note α, β et $\gamma = \alpha + \beta$ les trois racines de P

Les relations coefficient/racines (cf ci-dessus avec $a = 1$) donnent :

$$\begin{cases} -(\alpha+\beta+\gamma) = -8 \\ (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 23 \\ -\alpha\beta\gamma = -28 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\gamma = 8 \\ 23 = \alpha\beta + 4(\alpha+\beta) \\ 28 = 4\alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 4 \\ \alpha\beta = 7 \quad (\text{produit}) \\ \alpha + \beta = 4 \quad (\text{somme}) \end{cases}$$

Ainsi α et β sont les racines de X^2-4X+7.

$\Delta = 16-4\times 7 = -12 = -(2\sqrt{3})^2 < 0$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } 4,\ 2+i\sqrt{3} \text{ et } 2-i\sqrt{3}}$

2.6 Décomposition en produit de facteurs irréductibles :

Proposition 7 (Théorème de D'Alembert)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe et donc tout polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{C}$.

Proposition 8

Soit $P(X)$ polynôme $\boxed{\text{non nul}}$ de $\mathbb{C}[X]$. Alors $P(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{n_i}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines de P et $n_1, \ldots, n_r$ leurs multiplicités respectives.

Proposition 9

Soit $P(X)$ polynôme $\boxed{\text{non nul}}$ de $\mathbb{R}[X]$. Alors $P(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^{s} (X^2+p_jX+q_j)^{m_j}$$

avec pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, $p_j^2 - 4q_j < 0$.

Exercice de colle (E1)

Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - 1$.

<u>Rappel (cf. Vade Mecum)</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $\rho > 0$ on a :

$$z^n = 1 \iff \rho^n . e^{in\theta} = 1 = 1 . e^{i0}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 0 + 2k\pi. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \quad (\text{car } \rho > 0) \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

(il suffit de choisir n entiers consécutifs pour k)

Ici, les racines 5-ièmes de l'unité sont 1, $e^{2i\pi/5}$, $e^{4i\pi/5}$, $e^{6i\pi/5} = e^{-4i\pi/5}$ et $e^{8i\pi/5} = e^{-2i\pi/5}$

$$P(X) = (X-1)\underbrace{(X-e^{2i\pi/5})(X-e^{-2i\pi/5})}\underbrace{(X-e^{4i\pi/5})(X-e^{-4i\pi/5})} \quad \left(\text{décomposition dans } \mathbb{C}[X]\right)$$

$$P(X) = (X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X + 1\right) \quad (\text{décomposition dans } \mathbb{R}[X])$$

car (à retenir) :

$$(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta}) = X^2 - (e^{i\theta}+e^{-i\theta})X + e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1.$$

En conséquence, on a la proposition suivante.

Proposition 10

- Un polynôme $\boxed{\text{non nul}}$ de dégré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines distinctes.
- Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ possède $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

Exercice de colle (E1)

On considère le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-2)\dots(X-n)$.
Démontrer que $P'(X)$ possède une unique racine dans $]0,1[$.

Existence : l'application $x \longmapsto P(x)$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et vérifie $P(0) = P(1) = 0$.

Par le th. de Rolle, $\exists\, c_1 \in]0,1[$ tel que $P'(c_1) = 0$.

Unicité : En répétant le raisonnement précédent, on montrerait qu'il existe $c_2 \in]1,2[$, $c_3 \in]2,3[$, ..., $c_n \in]n-1,n[$ tels que :

$$P'(c_2) = P'(c_3) = \dots = P'(c_n) = 0.$$

Ainsi $c_1, \dots, c_n$ sont n racines de $P'(X)$ et elles sont distinctes car :

$$0 < c_1 < 1 < c_2 < 2 < c_3 \dots < n-1 < c_n < n.$$

Or P est de degré $n+1$ donc $\deg(P') = n$, P' ne peut donc pas avoir d'autre racine.

c_1 est la seule racine de P' dans $]0,1[$.