Chapitre 2

Rappels sur les polynômes

2.1 Structures algébriques sur l'ensemble des polynômes :

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit quatre lois.

- La loi . définie par $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda.P)(X) = \lambda.P(X)$.
- La loi $+$ définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$.
- La loi $\times$ définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \times Q)(X) = P(X) \times Q(X)$.
- La loi $\circ$ définie par $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \circ Q)(X) = P(Q(X))$.
  Ou encore, si $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P \circ Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k(X)$.

2.2 Degré d'un polynôme :

Définition 1

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $P = 0$, on pose $\deg(P) = -\infty$.
- Sinon, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, et on pose $\deg(P) = n$.
  - a_n est appelé coefficient dominant et $a_n X^n$ terme dominant de $P(X)$.
  - Si $a_n = 1$, on dit que $P(X)$ est unitaire.

Proposition 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ de $\mathbb{K}[X]$.
On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$.

Exercice de colle (E1)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de $P_n(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.

Exercice de colle (E1)

On considère une famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Déterminer le degré de T_n, son terme dominant et sa parité.

2.3 Multiples et diviseurs d'un polynôme :

Définition 2

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que $Q \in \mathbb{K}[X]$ divise P (ou est un diviseur de P) si il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = U \times Q$.
  On note $Q|P$.
- On dit que Q est un multiple de P si P est un diviseur de Q.
  On note $P.\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des multiples de P.

Proposition 3 (Division euclidienne)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est appelé le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

Exemple 2.1. *Quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)$?*

Exemple 2.2. *Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $U(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$ par $V(X) = X^2 + 2X - 1$.*

Rappel : racines cubiques de l'unité.

Exercice de colle (E2)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que : $B = X^2 + X + 1$ divise $P \iff P(j) = 0$.

On donne le résultat suivant, que l'on montrera dans le chapitre *Révisions d'algèbre linéaire*.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'ensemble $\mathbb{K}[X].P$ des multiples de P, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{K}[X].P$.

2.4 Dérivation d'un polynôme :

Définition 3

Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P, le polynôme

$$P'(X) = \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\alpha_{k+1} X^k.$$

De proche en proche, on définit les polynômes dérivés successifs de P par $P^{(k+1)}(X) = \left(P^{(k)}(X)\right)'$.

Exemple 2.3. *Déterminer le degré et le terme dominant de* $L_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

Proposition 4 (Formule de Taylor)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout entier $N \geqslant n$ et tout $a \in \mathbb{K}$, on a

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \quad \text{ou encore} \quad P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

2.5 Racines d'un polynôme :

Proposition 5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$.

(2) $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X-a)^n Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que a est racine d'ordre n de P.

Proposition 6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts.

- On a l'équivalence suivante.

$$a_1, \dots, a_n \text{ racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n} (X - a_i) \text{ divise } P(X).$$

- Si $a_1, \dots, a_n$ sont racines de P et si $\deg(P) = n$ alors $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i)$ où λ est le coefficient dominant de P.
- Un polynôme P non nul a au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

Exercice de colle (E1)

Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $X^2 - 2X + 1$.

Relation coefficients/racines : Pour trouver les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme $P(X)$, on écrit

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_i).$$

On développe le produit, puis on identifie les coefficients. Il faut connaître les résultats suivants.

- Si $P(X) = aX^2 + bX + c$ et si a_1, a_2 sont ses racines, on a $S = a_1 + a_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $P = a_1 a_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et si a_1, a_2, a_3 sont ses racines, on a

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{-b}{a}, \quad a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad a_1a_2a_3 = \frac{-d}{a}.$$

En effet :

Exercice de colle (E2)

Déterminer les racines de $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux d'entre elles vaut la troisième.

2.6 Décomposition en produit de facteurs irréductibles :

Proposition 7 (Théorème de D'Alembert)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe et donc tout polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{C}$.

Proposition 8

Soit $P(X)$ polynôme $\boxed{\text{non nul}}$ de $\mathbb{C}[X]$. Alors $P(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{n_i}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines de P et $n_1, \ldots, n_r$ leurs multiplicités respectives.

Proposition 9

Soit $P(X)$ polynôme $\boxed{\text{non nul}}$ de $\mathbb{R}[X]$. Alors $P(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^{s} (X^2 + p_j X + q_j)^{m_j}$$

avec pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}, \ p_j^2 - 4q_j < 0$.

Exercice de colle (E1)

Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - 1$.

En conséquence, on a la proposition suivante.

Proposition 10

- Un polynôme $\boxed{\text{non nul}}$ de dégré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines distinctes.
- Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ possède $n+1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

Exercice de colle (E1)

On considère le polynôme $P(X) = X(X-1)(X-2)\dots(X-n)$.
Démontrer que $P'(X)$ possède une unique racine dans $]0,1[$.