

Chapitre 1

Rappels sur les complexes

1.1 Introduction

Pour $a \in \mathbb{R}$, l'équation algébrique $(\mathcal{E}) : x^2 = a$ n'a pas toujours de solution dans \mathbb{R} .

- Si $a > 0$ alors (\mathcal{E}) possède **deux** solutions réelles distinctes : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$ alors (\mathcal{E}) possède **une** solution réelle : $x = 0$.
- Si $a < 0$ alors (\mathcal{E}) n'a **aucune** solution réelle.

On *imagine* alors qu'on dispose d'un *nombre* i (forcément non réel), solution de l'équation :

$$x^2 = -1.$$

Grâce à lui, les équations $x^2 = a$ avec $a < 0$ ont maintenant des solutions :

$$\begin{aligned}x^2 = a &\iff x^2 - a = 0 \iff x^2 - (i\sqrt{-a})^2 = 0 \\ &\iff (x - i\sqrt{-a})(x + i\sqrt{-a}) = 0 \\ &\iff x = i\sqrt{-a} \text{ ou } x = -i\sqrt{-a}\end{aligned}$$

On pourrait construire un ensemble qui contient \mathbb{R} (la construction rigoureuse du corps \mathbb{C} est hors-programme), et le nombre imaginaire i , muni d'une loi $+$ et d'une loi \times qui prolongent celles connues sur \mathbb{R} . Ces lois vérifient certaines propriétés qui confèrent à cet ensemble une structure de **corps** (hors-programme en PSI). Cet ensemble, qui s'appelle **le corps des nombres complexes**, est défini par :

$$\mathbb{C} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}\}.$$

1.2 Nombres Complexes

Proposition 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

De plus, a et b sont **uniques**, a est appelé **partie réelle** de z , et b est appelé **partie imaginaire** de z . On note :

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad b = \operatorname{Im}(z).$$

L'écriture algébrique de z est $z = a + ib = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$.

Corollaire 1

- L'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{1, i\}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 dont $(1, i)$ est une base.
- L'ensemble $\mathbb{R} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{1\}$ est contenu dans \mathbb{C} .
- L'ensemble $i\mathbb{R} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{i\} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$ est contenu dans \mathbb{C} , c'est l'ensemble des imaginaires purs.

On peut représenter un complexe $z = a + ib$ par le point $M(a, b)$ dans le plan réel \mathbb{R}^2 . On dit alors que M est d'affixe z .

Proposition 2 (Opérations dans les complexes)

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. En utilisant l'égalité $i^2 = -1$, on a :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad \text{et} \quad zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Et donc

- $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$.
- $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$ et $\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z')$.

1.3 Conjugaison, module et inverse

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition 1

On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne usuelle, et d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et M le point de \mathbb{R}^2 d'affixe z . On appelle :

- **module** de z la longueur OM et on note :

$$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- **conjugué** de z , le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.
Ainsi, le point M' d'affixe \bar{z} est le symétrique par rapport à (Ox) du point M .

Illustration graphique :

- L'axe (Ox) est l'ensemble des points dont l'affixe est réelle.
- L'axe (Oy) est l'ensemble des points dont l'affixe est imaginaire pure.

Proposition 3 (Propriétés de la conjugaison)

Soient z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes.

$$\bullet \overline{\bar{z}} = z \qquad \bullet \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \qquad \bullet \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

Proposition 4 (Propriétés du module)

Soient $z = a + ib$ et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes.

- $z = 0 \iff |z| = 0$
- $|z|^2 = z\bar{z}$ et donc si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|zz'| = |z||z'|$ et si $z' \neq 0$ alors $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Proposition 5 (Liens avec parties réelle et imaginaire)

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a :

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $|\operatorname{Re}(z)| = |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| = |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Exemple 1.1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(\mathcal{E}) : z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 13 + 18i$.

Corollaire 2 (Caractérisation des réels et des imaginaires purs)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

- $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff \bar{z} = z.$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff \bar{z} = -z.$

1.3.2 Affixe d'un vecteur et inégalité triangulaire**Définition 2**

On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne usuelle, et d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On dit qu'un vecteur v de \mathbb{R}^2 est d'affixe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ si ses coordonnées dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) sont (a, b) , autrement dit si $v = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

Proposition 6

Soient v et v' deux vecteurs de \mathbb{R}^2 d'affixes respectives z et z' .

- La norme du vecteur v est $\|v\| = |z|$.
- L'affixe du vecteur $v + v'$ est $z + z'$.
- Si α est un **réel** alors le vecteur αv est d'affixe αz .

Si M et M' sont deux points d'affixes respectives z et z' , alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est d'affixe $z' - z$.

Par conséquent, on a $MM' = \left\| \overrightarrow{MM'} \right\| = |z - z'|$.

Illustration graphique :

Proposition 7 (Inégalités triangulaires)

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$\bullet |z + z'| \leq |z| + |z'|. \quad (1)$$

$$\bullet |z| - |z'| \leq \left| |z| - |z'| \right| \leq |z + z'|. \quad (2)$$

Illustration graphique :

1.3.3 Équation d'un cercle

On munit \mathbb{R}^2 de sa structure euclidienne usuelle, et d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soient Ω le point d'affixe $\omega = a + ib$ et R un réel strictement positif. On note $\mathcal{C}(\Omega, R)$ le cercle de centre Ω et de rayon R , et $\mathcal{D}(\Omega, R)$ le disque ouvert de centre Ω et de rayon R .

Pour tout point M d'affixe $z = x + iy$, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(\Omega, R) &\iff \Omega M = R \\ &\iff |z - \omega| = R \iff |z - \omega|^2 = R^2 \\ &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}(\Omega, R) &\iff \Omega M < R \iff |z - \omega| < R \\ &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2 \end{aligned}$$

Exercice de colle (E1)

Représenter l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe z tels que $Z = \frac{5z - 2}{z - 1}$ soit imaginaire pur.

1.4 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

1.4.1 Définition

Définition 3

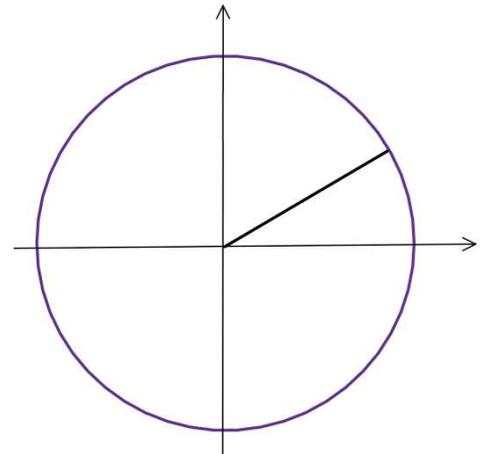
On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de modules 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Ainsi, l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 dont l'affixe est dans \mathbb{U} est le cercle de centre O et de rayon 1.

Par propriétés du module, on a les assertions suivantes.

- Si z et z' sont dans \mathbb{U} , alors zz' l'est aussi.
- Si z est dans \mathbb{U} , alors $-z$ et \bar{z} le sont aussi.
- Si z est dans \mathbb{U} , alors $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ et donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$ est dans \mathbb{U} .



1.4.2 Notation exponentielle des complexes de module 1

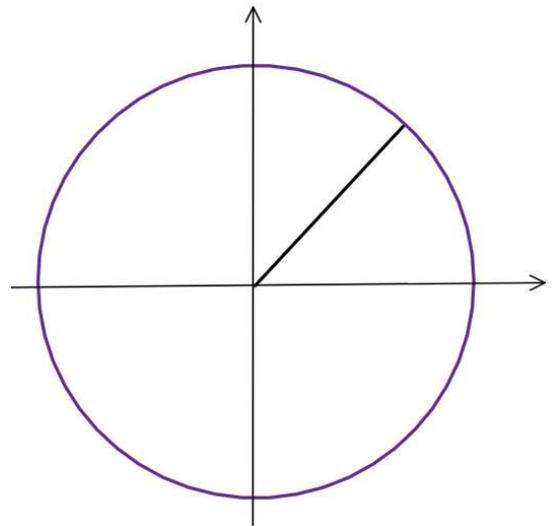
Soit $z = x + iy \in \mathbb{U}$.

On a donc $x^2 + y^2 = 1$ et en particulier, M d'affixe z appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Par conséquent, il existe un réel t (unique modulo 2π) tel que :

$$x = \cos(t) \text{ et } y = \sin(t)$$

On obtient alors $z = \cos(t) + i \sin(t)$.



Définition 4

Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on sait qu'il existe un réel t (unique modulo 2π) tel que $z = \cos(t) + i \sin(t)$.

On **note** alors $z = e^{it}$.

Cette notation n'est pas choisie au hasard. La fonction exponentielle réelle vérifie certaines propriétés algébriques. On va montrer que ces propriétés sont encore vérifiées pour les exponentielles d'imaginaires purs.

On rappelle pour cela quelques formules de trigonométrie élémentaire qui se démontrent géométriquement (revoir précisément le thème 2 du Vade Mecum).

Proposition 8

Pour tous a et b dans \mathbb{R} , on a :

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$

Proposition 9

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Preuve.

□

En utilisant le quatrième point, on montrerait le résultat suivant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Puis en utilisant, le troisième point, on étendrait l'égalité à $n \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 3 (Formule de Moivre)

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

ce qui s'écrit aussi $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Exemple 1.2. Exprimer $\cos(4t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$, puis comme un polynôme en $\cos(t)$.

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient aussi très facilement le résultat suivant.

Proposition 10 (Formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\theta) = \mathcal{R}e(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \mathcal{I}m(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

1.4.3 Techniques de calculs à maîtriser

Linéarisations

On a parfois besoin de linéariser des expressions du type $\cos^n(x)$, $\sin^p(x)$ ou encore $\cos^n(x)\sin^p(x)$, par exemple pour en chercher des primitives, ou encore des développements en série entière.

On peut pour cela :

- Utiliser le formulaire.

ou

- Exprimer $\cos^n(x)$ et $\sin^p(x)$ en partant des formules d'Euler, développer complètement en utilisant la formule du binôme de Newton, et enfin regrouper les termes e^{ikx} et e^{-ikx} pour faire apparaître des termes $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$.

Exemple simple : Linéarisons $\cos^3(x)\sin(x)$ de deux façons.

$$\begin{aligned} \cos^3(x)\sin(x) &= \cos^2(x)\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{4}(1 + \cos(2x))\sin(2x) \\ &= \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\sin(2x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\sin(4x) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \cos^3(x)\sin(x) &= \frac{1}{24i}(e^{ix} + e^{-ix})^3(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{24i}(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x})(e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{24i}(e^{i4x} + (3-1)e^{i2x} + (1-3)e^{-i2x} - e^{-i4x} + (3-3)e^{i0x}) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2i}((e^{i4x} - e^{-i4x}) + 2(e^{i2x} - e^{-i2x})) = \frac{1}{8}(\sin(4x) + 2\sin(2x)) \end{aligned}$$

Exemple 1.3. *Linéariser* $\sin^5(x)$.

Méthode de l'arc moitié

On est parfois amené à factoriser des expression du type $e^{ip} \pm e^{iq}$ par exemple pour en déterminer le module et l'argument, ou pour en déterminer la partie réelle et la partie imaginaire.

On retiendra la « méthode » plutôt que le résultat lui-même. L'idée est de considérer l'angle *moitié* $\frac{p+q}{2}$.

On a donc $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$, et les propriétés algébriques de la fonction exponentielle complexe, nous permettent de faire apparaître les formules d'Euler.

Proposition 11

Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$, on a :

$$\bullet e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

$$\bullet e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\bullet 1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}$$

$$\bullet 1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right) = -2i \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{i\frac{t}{2}}$$

Exercice de colle (E1)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

Exercice de colle (E1)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, calculer les sommes $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

1.5 Forme trigonométrique ou exponentielle d'un complexe non nul

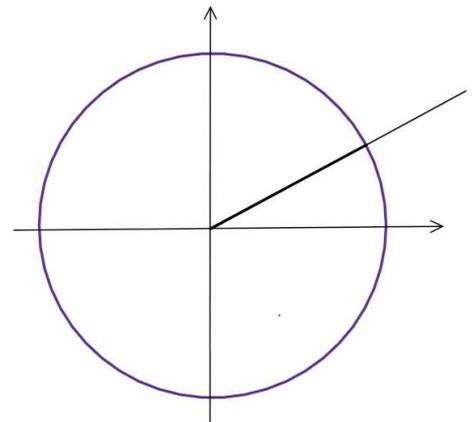
Dans tout ce paragraphe, z désigne un nombre complexe **non nul**.

L'écriture exponentielle a été définie pour les complexes de module 1.

À la manière d'un vecteur qu'on divise par sa norme pour le rendre unitaire, on divise z par $|z|$ qui est non nul, pour le « rendre » de module 1.

Puisque $\frac{z}{|z|}$ est dans \mathbb{U} , il existe un unique θ modulo 2π , tel que :

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \text{ ou encore } z = |z|e^{i\theta}.$$



Définition 5

Soit z un nombre complexe **non nul**. On note $r = |z|$. Alors, il existe un **unique** θ modulo 2π , tel que :

- $z = re^{i\theta}$ (écriture complexe)
- $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ (écriture trigonométrique)

Avec les notations précédentes, l'angle θ est aussi l'angle $(\vec{e}_1, \widehat{OM})$ où M est le point d'affixe z .

On dit alors que θ est **un** argument de z . On note :

$$\theta \equiv \text{Arg}(z)[2\pi].$$

Exemple 1.4. Écrire sous forme exponentielle le complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exemple 1.5. Donner le module et l'argument de $z = -3e^{i\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On peut utiliser les propriétés de l'exponentielle $e^{i\theta}$ pour obtenir des propriétés sur les arguments.

Proposition 12

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

- $\text{Arg}(\bar{z}) \equiv -\text{Arg}(z) \quad [2\pi]$
- $\text{Arg}(zz') \equiv \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \quad [2\pi]$
- $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\text{Arg}(z) \quad [2\pi]$
- $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') \quad [2\pi]$

Preuve. On note $r = |z| > 0$ et $r' = |z'| > 0$. Ainsi, si θ et θ' sont des arguments de z et z' respectivement, on a : $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$.

□

Exercice de colle (E1)

1. Déterminer des réels A (amplitude) et φ (déphasage) tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait : $2 \cos(t) - 3 \sin(t) = A \cos(t - \varphi)$.
2. En déduire la résolution de $(\mathcal{E}) : 2 \cos(t) - 3 \sin(t) = 0$.

1.6 Racines n -ièmes

1.6.1 Cas général

On retiendra la proposition suivante.

Proposition 13

Pour tous $r, r' \in \mathbb{R}$ strictement positifs, pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante :

$$r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \text{et} \\ \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Soit n un entier naturel. Les racines n -ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation :

$$z^n = 1.$$

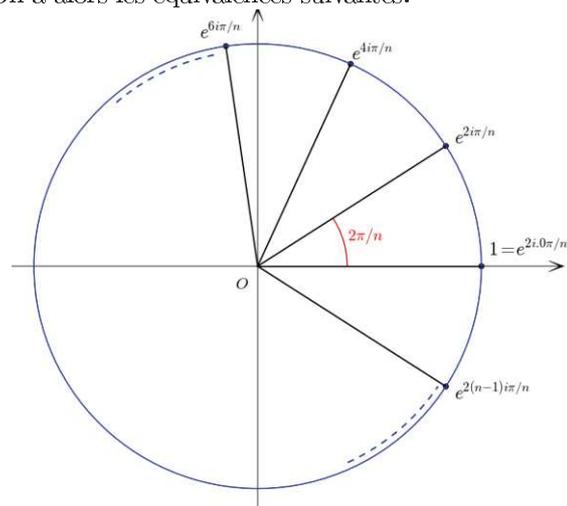
Il est évident 0 n'est pas solution. Soit donc z un nombre complexe non nul. Il s'écrit de manière unique sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ est défini modulo 2π . On a alors les équivalences suivantes.

$$z^n = 1 \iff \rho^n e^{in\theta} = 1 = 1e^{i \cdot 0}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = 1 \text{ (car } \rho^n > 0) \\ \text{et} \\ n\theta \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \text{ (car } \rho > 0) \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$



Et comme l'exponentielle complexe est $2i\pi$ -périodique, on peut démontrer que cette dernière condition équivaut à :

$$z^n = 1 \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \text{et} \\ \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

1.6.2 Cas particulier : racines carrées

Dans ce cas précis, on peut chercher les solutions soit sous forme exponentielle (cf ci-dessus), soit sous forme algébrique. Il faudra prendre de le temps de réfléchir à la solution la plus adaptée.

• **Sous la forme trigonométrique :** Soit $Z \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $Z = z^2$.

– Si $Z = 0$ alors : $Z = z^2 \iff z = 0$ (une seule solution).

– Si $Z \neq 0$, on note $R = |Z| > 0$ et $\theta \equiv \text{Arg}(Z)[2\pi]$. Ainsi $Z = Re^{i\theta}$.

Le complexe $z = 0$ n'est pas solution de $Z = z^2$, on cherche donc les solutions sous leur forme exponentielle $z = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} Z = z^2 &\iff Re^{i\theta} = (re^{i\alpha})^2 = r^2e^{2i\alpha} \\ &\iff \begin{cases} R = r^2 \text{ (car } R, r^2 \in]0, +\infty[) \\ \text{et} \\ \theta \equiv 2\alpha[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = \sqrt{R} \text{ (car } r > 0) \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2\alpha + 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = \sqrt{R} \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi \end{cases} \\ &\iff z = e^{i\theta/2} \text{ ou } z = e^{i\theta/2+\pi} = -e^{i\theta/2} \end{aligned}$$

• **Sous la forme algébrique :** On écrit $Z = A + iB$ et on cherche $z = a + ib$ tel que $Z = z^2$.

On identifie parties réelle et imaginaire. La résolution est beaucoup plus rapide en ajoutant au système l'égalité des modules.

Il faut absolument y penser.

$$\begin{aligned} Z = z^2 &\iff A + iB = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab \\ &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = A & (1) \\ 2ab = B & (2) \\ |Z| = |z|^2 \text{ i.e. } a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2} & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Les égalités (1) et (3) permettent de calculer a^2 et b^2 . Et on obtient exactement deux solutions opposées pour z en utilisant (2) qui donne le signe du produit ab .

Exercice de colle (E1)

Calculer les racines carrées de $Z = -7 - 24i$.

1.7 Équation algébriques de degré deux

La résolution se fait comme dans \mathbb{R} , à ceci près que, dans \mathbb{C} , un nombre complexe **non nul** a toujours **deux** racines carrées distinctes.

Ainsi, lorsque le discriminant Δ est non nul, l'équation de degré 2 associée a exactement deux solutions distinctes, et lorsque $\Delta = 0$, elle a une solution double.

Exercice de colle (E1)

Déterminer les solutions de $(\mathcal{E}) : (12 - 3i)z^2 - 8iz + 32i = 0$.

1.8 Exponentielle complexe

À ce stade, $\exp(z) = e^z$ est définie pour $z \in \mathbb{R}$ (la fonction exponentielle est l'unique solution sur \mathbb{R} de $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$) et pour $z = it$ imaginaire pur. Dans ce paragraphe, on donne une définition de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et qui prolonge celles que l'on connaît déjà.

1.8.1 Définition

Définition 6

Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on **pose** :

$$e^z = \exp(z) = e^x \times e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Ainsi :

- Si $z = x \in \mathbb{R}$, alors $e^z = e^x \times e^{i0} = e^x (\cos(0) + i \sin(0)) = e^x$.
- Si $z = iy \in i\mathbb{R}$, alors $e^z = e^0 \times e^{iy} = e^{iy}$.

Exemple 1.6. Calculer e^z avec $z = \ln(2) + i\frac{\pi}{3}$.

On a les premières propriétés suivantes.

Proposition 14

Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\bullet |e^z| = |e^x \times e^{iy}| = \underbrace{|e^x|}_{>0} \times \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = e^x.$$

En particulier, $e^z \neq 0$.

$$\bullet e^z = e^x \times e^{iy} \text{ avec } e^x > 0 \text{ donc } \text{Arg}(e^z) = y.$$

1.8.2 Propriétés

Proposition 15 (Propriété fondamentale)

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}.$$

Preuve.

□

On pourrait en déduire les propriétés suivantes.

Corollaire 4

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

- $(e^z)^{-1} = \frac{1}{e^z}$
- $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.

Proposition 16 (Périodicité)

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi \\ &\iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Preuve.

□

Exemple 1.7. Résoudre (\mathcal{E}) : $e^z = 2i$.

Plus généralement, si $a = re^{i\theta}$ est un nombre complexe non nul donné sous sa forme exponentielle, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 e^z = a &\iff e^x \times e^{iy} = r \times e^{i\theta} \\
 &\iff \begin{cases} e^x = r & (\text{car } r, e^x \in]0, +\infty[) \\ \text{et} \\ y \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \ln(r) & (\text{car } r > 0) \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, y = \theta + 2k\pi \end{cases} \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = x + iy = \ln(r) + i\theta + 2ik\pi
 \end{aligned}$$

En conséquence, on a :

- L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ n'est pas surjective, car $0 \in \mathbb{C}$ n'a pas d'antécédent.
- Tout élément de $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0\}$ possède au moins un antécédent dans \mathbb{C} par l'application exponentielle.
- L'application \exp n'est pas injective, car avec les notations précédentes, le complexe non nul a possède une infinité d'antécédents à savoir :

$$\{\ln(r) + i\theta + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Cela n'a donc aucun sens d'évoquer « la bijection réciproque » de la fonction exponentielle, lorsqu'il s'agit d'exponentielle complexe.

1.9 Interprétation géométrique des nombres complexes

Dans ce paragraphe, le plan euclidien \mathbb{R}^2 est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et un complexe z est identifié au point de \mathbb{R}^2 d'affixe z .

1.9.1 Alignement, orthogonalité

Proposition 17

Soient A, B, C trois points distincts de \mathbb{R}^2 dont on note $a, b, c \in \mathbb{C}$ les affixes respectives. Alors :

$$\text{Arg} \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}.$$

Par conséquent, on a les caractérisations suivantes.

- A, B, C alignés $\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$
- $(AB) \perp (AC)$ $\iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$

Preuve.

□

Exercice de colle (E2)

Dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé, on se donne deux points A et B .

Montrer qu'un point M appartient au cercle de diamètre $[A, B]$ si et seulement si les vecteurs \vec{AM} et \vec{BM} sont orthogonaux.

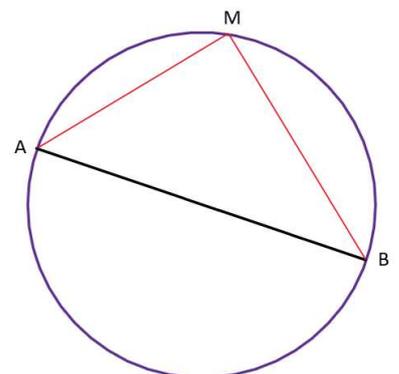
On note a et b les affixes de A et B .

Le centre du cercle \mathcal{C} de diamètre $[A, B]$ est le milieu Ω de $[A, B]$ et son affixe est $\omega = \frac{1}{2}(a+b)$.

Soit M un point du plan dont on note z l'affixe.

On a les équivalences suivantes.

$$M \in \mathcal{C} \stackrel{\text{déf.}}{\iff} \Omega M = \frac{1}{2} AB$$



$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \stackrel{\text{déf.}}{\iff} (\widehat{AM, BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

1.9.2 Transformations élémentaires

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 18

On identifie un élément z de \mathbb{C} au point M du plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé, dont l'affixe est z .

- Si $b \in \mathbb{C}$, l'application $z \mapsto z + b$ correspond à la translation de vecteur \vec{u} d'affixe b .
- Si $a = re^{i\theta}$ est un complexe non nul, l'application $z \mapsto az = re^{i\theta}z$ correspond à la similitude de centre O , de rapport $r > 0$ et d'angle θ , c'est-à-dire la composée de l'homothétie de centre O et de rapport r et de la rotation de centre O et d'angle θ .

Illustrations graphiques :

1.10 Quelques remarques importantes

1.10.1 Erreurs fréquentes à éviter !

- Première erreur :

On ne peut pas écrire des inégalités entre deux nombres complexes.

Ainsi, cela n'a aucun sens (a priori) d'écrire ~~$1 + i < 2 + i$~~

- Deuxième erreur :

La fonction *racine carrée* n'est définie que sur \mathbb{R}^+ .

C'est une erreur d'écrire ~~$\sqrt{2i} = 1 + i$~~ . En revanche, on peut dire que $1 + i$ est **une** racine carrée de $2i$.

- Troisième erreur :

La fonction \ln n'est définie que sur $]0, +\infty[$.

C'est une erreur d'écrire ~~$\ln(z)$~~ lorsque $z \in \mathbb{C}$. Cette erreur est souvent commise dans le calcul de primitives.

1.10.2 Synthèses de résultats précédents

Il y a trois façons de définir un nombre complexe z (éventuellement non nul).

- **Forme algébrique** : $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
- **Forme exponentielle (si $z \neq 0$)** : $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.
- **Forme trigonométrique (si $z \neq 0$)** : $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

On utilise ces notations dans les deux énoncés qui suivent.

Proposition 19 (Caractérisations d'un réel)

Dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé, on note M le point d'affixe z . On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\iff y = \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\iff z - \bar{z} = 0 \\ &\iff \bar{z} = z \\ &\iff \operatorname{Arg}(z) \equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\iff M \in (0x) \end{aligned}$$

Proposition 20 (Caractérisations d'un imaginaire pur)

Dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé, on note M le point d'affixe z . On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} z \in i\mathbb{R} &\iff x = \operatorname{Re}(z) = 0 \\ &\iff z + \bar{z} = 0 \\ &\iff \bar{z} = -z \\ &\iff \operatorname{Arg}(z) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &\iff M \in (0y) \end{aligned}$$

1.11 Applications aux autres chapitres

1.11.1 Suites Numériques

Exemple 1.8. Déterminer les suites complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} + (1 - i)u_n = 0$.

1.11.2 Fonctions dérivables, équations différentielles

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 21

Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable alors l'application $F : x \mapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}.$$

En particulier, si $\varphi(x) = (a + ib)x$ avec $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, alors avec les notations précédentes, $F'(x) = (a + ib)e^{(a+ib)x}$.

Exemple 1.9. Déterminer les fonctions complexes f deux fois dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant : $f'' - f' + (1 - i)f = 0$.

1.11.3 Intégration

On déduit du paragraphe précédent, les primitives suivantes pour des fonctions exponentielles à valeurs **complexes**.

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{C} \text{ est non nul, alors : } \int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C.$$

On utilise ces primitives pour calculer (on suppose ici $(a, b) \neq (0, 0)$) :

$$\int e^{at} \cos(bt) dt = \operatorname{Re} \left(\int e^{(a+ib)t} dt \right) \quad \text{et} \quad \int e^{at} \sin(bt) dt = \operatorname{Im} \left(\int e^{(a+ib)t} dt \right)$$

$$\text{avec } \int e^{(a+ib)t} dt = \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x} + C = \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) + C$$

$$= \underbrace{\left(\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) \right)}_{\in \mathbb{R} \text{ car } a, b \in \mathbb{R}} + i \underbrace{\left(\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (-b \cos(bx) + a \sin(bx)) \right)}_{\in \mathbb{R} \text{ car } a, b \in \mathbb{R}} + C$$

avec $C = A + iB \in \mathbb{C}$. Et donc :

$$\int e^{at} \cos(bt) dt = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + A \quad \text{et} \quad \int e^{at} \sin(bt) dt = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (-b \cos(bx) + a \sin(bx)) + B$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.10. Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin(2x)e^x dx$.

On verra qu'on peut aussi calculer cette intégrale par une double intégration par parties.

Exemple 1.11. Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \frac{1}{x-i}$.

Ce qui suit est facultatif (plus difficile)

Exemple 1.12. (Concours Commun Mines-Ponts 2021 Maths I PSI)

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction :

$$L : x \mapsto \int_0^x \frac{z}{1-tz} dt.$$

1. Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe \mathcal{C}^∞ .
2. Donner une expression simple de sa dérivée nième pour tout $n \geq 1$.

Correction :

1. Posons $\ell(t) = \frac{z}{1-tz}$, de sorte que $L(x) = \int_0^x \ell(t) dt$.

- On a $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$. Pour tout $t \in [0, 1]$:
 - Si $t \in [0, 1[$ alors, puisque $|z| \leq 1$, on $|tz| \leq |t| < 1$ et donc $tz \neq 1$.
 - Si $t = 1$, alors $1 - tz = 1 - z \neq 0$ car $z \neq 1$.

Ainsi, $\ell : t \mapsto \frac{z}{1-tz}$ est bien définie sur $[0, 1]$, et elle y est alors de classe \mathcal{C}^∞ comme quotient de la fonction constante $t \mapsto z$ et de la fonction affine $t \mapsto 1 - tz$ qui le sont.

- La fonction $L : x \mapsto \int_0^x \ell(t) dt$ est donc bien définie sur $[0, 1]$, et, puisque ℓ est continue sur $[0, 1]$, par le théorème fondamental du calcul intégral, c'est une primitive de ℓ sur $[0, 1]$. Comme ℓ est de classe \mathcal{C}^∞ , sa primitive L l'est aussi.

L est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$.

2. Montrons par récurrence que¹ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-xz)^n}$ pour $t \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$.

★ On a $L' = \ell$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\forall x \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$, $L^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-xz)^n}$.

Alors en dérivant cette relation (avec la formule $(u^\alpha)'(x) = \alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x)$), on obtient

$$\forall x \in [0, 1], \quad L^{(n+1)}(x) = \frac{(n-1)!z^n \times (-n) \times (-z)}{(1-xz)^{n+1}} = \frac{n!z^{n+1}}{(1-xz)^{n+1}},$$

qui est la formule voulue au rang $n + 1$.

On conclut par récurrence que l'on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], L^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-xz)^n}$.

1.11.4 Algèbre linéaire

Exemple 1.13. (Centrale 2014 maths 2 PC) On rappelle que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ il existe un couple unique de matrices $(U, V) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ tel que :

$$M = U + iV.$$

On munit l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices complexes à deux lignes et deux colonnes de l'addition $+$, de la multiplication \times usuelles et de la multiplication par un réel notée \cdot et définie usuellement par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}, \quad \lambda \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

Montrer que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} des réels et en déterminer une base.

Correction :

On vérifie d'abord qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel (c'était admis dans le sujet). On doit revenir à la définition d'espace vectoriel, puisque ce n'est un s.e.v. d'aucun autre de référence.

• Soit \mathcal{C} est muni de loi de composition interne notée $+$:

$$\begin{cases} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{C} \\ (u, v) & \longmapsto u + v \end{cases}$$

et d'une application (appelée loi externe) notée \cdot :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{C} \\ (\lambda, v) & \longmapsto \lambda \cdot v \end{cases}$$

• $(\mathcal{C}, +)$ est un groupe commutatif, $(+)$ possède un élément neutre (la matrice nulle), $+$ est associative et commutative (car elle l'est sur \mathbb{C} puisque $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ étant un \mathbb{C} -espace vectoriel), et tout élément de \mathcal{C} possède un symétrique (opposé) pour $+$

• $\forall (M, N) \in \mathcal{C}^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot M &= \lambda \cdot M + \mu \cdot M, \\ \lambda \cdot (M + N) &= \lambda \cdot M + \lambda \cdot N, \\ \lambda \cdot (\mu \cdot M) &= (\lambda \times \mu) \cdot M, \\ 1 \cdot M &= M. \end{aligned}$$

1. On devine la formule en calculant les premières dérivées de $L' = \ell$ au brouillon.

Car, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ étant un \mathbb{C} -espace vectoriel, toutes ces égalités sont avec des scalaires complexes. A fortiori elles sont vraies pour des scalaires réels.

Et donc $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} .

Il est ensuite immédiat, avec les notations usuelles de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que :

$$\mathcal{C} = \text{Vect}\{E_{1,1}, iE_{1,1}, E_{1,2}, iE_{1,2}, E_{2,1}, iE_{2,1}, E_{2,2}, iE_{2,2}\}.$$

Donc $\mathcal{B} = \{E_{1,1}, iE_{1,1}, E_{1,2}, iE_{1,2}, E_{2,1}, iE_{2,1}, E_{2,2}, iE_{2,2}\}$ engendre \mathcal{C} (sur \mathbb{R}).

Vérifions qu'elle est libre (sur le corps \mathbb{R}).

Soient $a_{1,1}, b_{1,1}, a_{1,2}, b_{1,2}, a_{2,1}, b_{2,1}, a_{2,2}, b_{2,2}$ des réels tels que :

$$a_{1,1}E_{1,1} + b_{1,1}iE_{1,1} + a_{1,2}E_{1,2} + b_{1,2}iE_{1,2} + a_{2,1}E_{2,1} + b_{2,1}iE_{2,1} + a_{2,2}E_{2,2} + b_{2,2}iE_{2,2} = 0.$$

On a donc
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} + ib_{1,1} & a_{1,2} + ib_{1,2} \\ a_{2,1} + ib_{2,1} & a_{2,2} + ib_{2,2} \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi tous les coefficients $a_{n,p} + ib_{n,p}$ sont nuls, et par unicité des parties réelles et imaginaires :

$$\forall n, p \in \{1, 2\}, a_{n,p} = b_{n,p} = 0.$$

La famille \mathcal{B} est libre.

Conclusion :

$$\mathcal{B} = \{E_{1,1}, iE_{1,1}, E_{1,2}, iE_{1,2}, E_{2,1}, iE_{2,1}, E_{2,2}, iE_{2,2}\} \text{ est une base de } \mathcal{C}.$$

1.11.5 Géométrie

Exemple 1.14. (Centrale 2014 maths 2 PC)

- On note $[x]$ la partie entière du réel x .
- On se place dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 muni de son repère orthonormé canonique \mathcal{R} , d'origine O .

Soit z un nombre complexe, de partie réelle x et de partie imaginaire y , tels que $(x, y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$. On note

$$\theta(z) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ et } R(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{2(\text{Re}(z) + |z|)}}$$

A.1 Justifier que θ et R sont bien définis.

A.2 Lorsque z vaut successivement $z_1 = 4$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$, calculer $R(z)$, $\theta(z)$ et $(R(z))^2$.

A.3 Vérifier que $\theta(z) \in]-\pi, \pi[$ et que $R(z) \in \mathcal{P} = \{Z \in \mathbb{C} / \text{Re}(Z) > 0\}$.

A.4 Représenter sur une figure le cercle \mathcal{C} de centre O de rayon $|z|$ et les points M d'affixe z et B d'affixe $-|z|$.
En considérant des angles bien choisis, montrer que

$$\theta(z) = \text{Arg}(z) = 2\text{Arg}(z + |z|)$$

où $\text{Arg}(z)$ désigne la détermination principale de l'argument du nombre complexe z .

A.5 Déterminer $(R(z))^2$, $\theta \circ R(z)$ et $|z|^{1/2} e^{i\theta(z)/2}$ en fonction de z , $R(z)$ et $\theta(z)$.

A.6 Résoudre à l'aide de E l'équation $Z^2 = z$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

A.7 En déduire que R est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans \mathcal{P} . Préciser sa bijection réciproque.

Correction :

A.1 On suppose $(x, y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$ et donc $x \notin \mathbb{R}^-$ OU $y \neq 0$.

Si $y \neq 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$. En particulier $x + \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. $\theta(z)$ est donc bien défini (arctan est définie sur \mathbb{R}).

Si $y = 0$ alors $x \notin \mathbb{R}^-$ et $x + \sqrt{x^2} = x + |x| > 0$. Là encore, $\theta(z)$ existe.

Pour tout complexe z' , on a $|Re(z')| \leq |z'|$ avec égalité si et seulement si $z' \in \mathbb{R}$. Plus précisément, si $z' \in \mathbb{R}^+$, $Re(z') = |z'|$ et si $z' \in \mathbb{R}^-$, $Re(z') = -|z'|$. Comme $z \notin \mathbb{R}^-$, on a donc $|z| > -Re(z)$ et $R(z)$ est donc bien défini.

A.2 On a

$$\theta(z_1) = 2 \arctan(0) = 0, \quad R(z_1) = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2, \quad R(z_1)^2 = 4$$

$$\theta(z_2) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}, \quad R(z_2) = \frac{2i}{\sqrt{4}} = 1 + i, \quad R(z_2)^2 = 2i$$

$$\theta(z_3) = 2 \arctan(-\sqrt{3}/3) = -\frac{\pi}{3}, \quad R(z_3) = \frac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad R(z_3)^2 = 1 - i\sqrt{3}$$

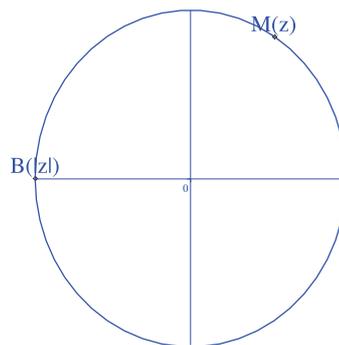
A.3 arctan est la bijection réciproque de la restriction de tan à $] -\pi/2, \pi/2[$ (à valeurs dans \mathbb{R}). C'est donc une fonction à valeurs dans $] -\pi/2, \pi/2[$. Ainsi

$$\theta(z) \in] -\pi, \pi[$$

On a $Re(R(z)) = \frac{1}{\sqrt{2(Re(z)+|z|)}} Re(z + |z|) = \frac{1}{\sqrt{2(Re(z)+|z|)}} (Re(z) + |z|)$ et on a vu en **A.1** que cette quantité est > 0 . Ainsi

$$R(z) \in \mathcal{P}$$

A.4 B est sur l'axe des abscisses et sur \mathcal{C} , plus précisément à gauche de l'origine.



Soit $\alpha = \text{Arg}(z)$; on a donc $z = |z|e^{i\alpha}$ et $\alpha \in] -\pi, \pi[$ ($\alpha \neq \pi$ car $z \notin \mathbb{R}^-$). On en déduit que

$$\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|z| \sin(\alpha)}{|z| \cos(\alpha) + |z|} = \frac{2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}{2 \cos^2(\alpha/2)} = \tan(\alpha/2)$$

Ainsi,

$$\arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \arctan(\tan(\alpha/2))$$

Comme $\alpha/2 \in]-\pi/2, \pi/2[$, la quantité précédente vaut $\alpha/2$. On a donc prouvé que

$$\theta(z) = \alpha = \text{Arg}(z)$$

Par ailleurs, on a aussi

$$z + |z| = |z|(e^{i\alpha} + 1) = |z|2 \cos(\alpha/2)e^{i\alpha/2}$$

Comme $|z|2 \cos(\alpha/2) > 0$ et $\alpha/2 \in]-\pi, \pi]$, on a donc

$$\text{Arg}(z + |z|) = \frac{\alpha}{2} = \frac{\theta(z)}{2}$$

A.5 D'après la question précédente, $\text{Arg}(R(z)) = \text{Arg}(z + |z|) = \theta(z)/2$. Par ailleurs,

$$|R(z)|^2 = \frac{(z + |z|)(\bar{z} + |z|)}{2(\text{Re}(z) + |z|)} = \frac{2|z|^2 + (z + \bar{z})|z|}{2(\text{Re}(z) + |z|)} = |z|$$

et on en déduit que

$$R(z)^2 = |R(z)|^2 e^{2i\text{Arg}(R(z))} = |z| e^{i\text{Arg}(z)} = z$$

De plus

$$\theta \circ R(z) = \text{Arg}(R(z)) = \text{Arg}(z + |z|) = \frac{\theta(z)}{2}$$

et enfin comme $|R(z)| = (|R(z)|^2)^{1/2} = |z|^{1/2}$

$$|z|^{1/2} e^{i\theta(z)/2} = |R(z)| e^{i\text{Arg}(z + |z|)} = |R(z)| e^{i\text{Arg}(R(z))} = R(z)$$

A.6 Comme $z \neq 0$, $Z^2 = z$ a deux solutions opposées. On vient de voir que $R(z)$ est une des solutions. L'autre est donc $-R(z)$. Elles sont distinctes car $R(z) \neq 0$.

A.7 La question **A.3** indique que R va de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans \mathcal{P} .

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ tels que $R(z_1) = R(z_2)$. En élevant au carré, on obtient $z_1 = z_2$ ce qui donne l'injectivité de R .

Soit $z' \in \mathcal{P}$; on a $(z')^2 \notin \mathbb{R}^-$ car les complexes dont le carré est dans \mathbb{R}^- sont les imaginaires purs et ont une partie réelle nulle. De plus $R((z')^2)$ est solution de $Z = (z')^2$ donc on a $R((z')^2) = \pm z'$. Comme z' et $R((z')^2)$ sont tous deux dans \mathcal{P} (parties réelles de même signe et non nulles) on a ainsi $R((z')^2) = z'$.

On a montré que R est bijective de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ dans \mathcal{P} de bijection réciproque l'élévation au carré.