Chapitre 19

Fonctions de plusieurs variables

19.1 Notations

Dans tout ce chapitre, $E = \mathbb{R}^p$ est muni d'une norme que l'on note $\|.\|$.
On considère des fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que l'ensemble de ces fonctions $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ muni des lois $+$ et $\bullet$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 19.1. *Ici, $p = 2$ et $f : (x, y) \longmapsto \ln(2x - y) + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Déterminer et représenter D_f.*

Définition 1 (Applications partielles)

On se donne une base $\mathcal{B}$ de E. Pour $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, on adopte les notations suivantes.

Si l'on fixe $a = (a_1, \dots, a_p)_{\mathcal{B}} \in U$, les p applications partielles de f en a dans la base $\mathcal{B}$ sont les

$$f_{x_i} : x_i \in U_i \longmapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

où $U_i = \{x_i \in \mathbb{R},\ (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \in U\}$.

Exemple 19.2. *On reprend $f : (x, y) \longmapsto \ln(2x - y) + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.*
On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique. On pose $a = (1, 1)$.
Vérifier que $a \in D_f$. Déterminer les applications partielles de f en a et préciser leurs ensembles de définition.

19.2 Continuité

On rappelle la définition de continuité vue dans le chapitre *Espaces vectoriels normés*.

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$.
• On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in U, \quad \|x - a\| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
• On dit que f est continue sur U si elle l'est en tout point x de U.
• On note $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ qui sont continues sur U.

On a les propriétés suivantes.

- Une combinaison linéaire d'applications continues est continue et donc $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
- Le produit, la composition d'applications continues est continue.

Pour montrer qu'une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, on utilise si l'on peut les opérations sur les fonctions continues. En un point a qui « pose problème », on peut essayer de trouver une majoration

$$|f(x) - f(a)| \leqslant g(\|x - a\|)$$

avec $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 0$.

On remarque aussi que, puisqu'on est en dimension finie, toutes les normes sont « équivalentes ». On choisira celle qui convient le mieux. Sur $\mathbb{R}^2$, on rappelle que

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \qquad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et } \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|),$$

et on utilisera par exemple les majorations suivantes.

$$|x| \leqslant \|(x, y)\|_\infty \leqslant \|(x, y)\|_2, \qquad |y| \leqslant \|(x, y)\|_\infty \leqslant \|(x, y)\|_2 \quad \text{ou encore} \quad |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\|(x, y)\|_2^2.$$

Exemple 19.3. *Etudier la continuité de l'application suivante.*

$$g : \begin{cases} (x, y) & \longmapsto \quad \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ \textit{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \longmapsto \quad 0 \end{cases}$$

Proposition 1

Avec les notations précédentes, si f est continue en a alors son application partielle f_{x_i} est continue en a_i.
Mais la réciproque est fausse.

Preuve.

$\square$

Cas où la réciproque est fausse :

Exercice de colle (E1)

On considère la fonction

$$h : \begin{cases} (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

Montrer que les applications partielles de h en $(0,0)$ sont continues en 0 mais que h n'est pas continue en $(0,0)$.

19.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dans ce paragraphe, les fonctions sont définies sur des **ouverts** U de $\mathbb{R}^p$.

19.3.1 Dérivées partielles

Soit $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$ non nul.
Puisque U est ouvert, $\exists \delta > 0,\ \forall t \in]-\delta, \delta[,\ a + tv \in U$. Ainsi,
si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction

$$\varphi_v :\ t \longmapsto f(a + tv)$$

est au moins définie sur $]-\delta, \delta[$.

Définition 3

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$ une direction non nulle.
On dit que f admet une dérivée en a selon la direction v si la fonction $\varphi_v :\ t \longmapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0 autrement dit si

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_v(t) - \varphi_v(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \quad \text{existe.}$$

On note $D_v(a) = \varphi_v'(0)$.

En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on appelle **dérivées partielles** de f (dans la base $\mathcal{B}$), les dérivées de f suivant les directions $e_1, \ldots, e_p$ (si elles existent !). On les note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f$. Sous réserve d'existence, on a :

$$\begin{aligned} D_{e_i}(a) \ =\ \partial_i f(a) \ =\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \ &=\ \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \\ &=\ \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_p) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)}{t} \ . \\ &=\ \lim_{t \to 0} \frac{f_{x_i}(a_i + t) - f_{x_i}(a_i)}{t} \ =\ f_{x_i}'(a_i) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles.

Exemple 19.4. *En précisant où c'est possible, calculer les dérivées partielles de la fonction f définie par*

$$f(x, y) = e^{2x+y} \ln(y^2 + x).$$

Exercice de colle (E1)

Etudier l'existence de dérivées partielles en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de la fonction

$$g : \begin{cases} (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

19.3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 4

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point a de U.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ sont continues sur U.
On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. C'est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Les opérations sur les fonctions dérivables et sur les fonctions continues donnent la proposition suivante.

Proposition 2

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On a :

- $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.
- $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\dfrac{\partial(f \times g)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} g + f \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$.
- Si g ne s'annule pas sur U, $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_i} = \dfrac{1}{g^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} g - f \dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right)$.
- Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $f(U) \subset I$ alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \times (\varphi' \circ f)$.

On sait que si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors en tout a de I, on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \underset{h \to 0}{o}(h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h).$$

On peut généraliser ce résultat en dimension supérieure. On admettra la proposition suivante.

Proposition 3

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$. Si U est un ouvert et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors pour tout $a \in U$, f admet le développement limité à l'ordre 1 suivant en a :

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + \|h\|\varepsilon(h), \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On note parfois $\|h\|\varepsilon(h) = o(\|h\|)$.

On définit alors l'application différentielle de f en a.

Définition 5

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $a \in U$, l'application suivante est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ appelée **différentielle** de f en a :

$$df(a) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h = (h_1, \dots, h_p) & \longmapsto & df(a).h = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array} \right. .$$

Ainsi, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, le développement limité de f à l'ordre 1 en a s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \|h\|\varepsilon(h).$$

Proposition 4

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors :
- f est continue sur U.
- f admet une dérivée selon tout vecteur v non nul de $\mathbb{R}^p$.

Preuve.

$\square$

Exemple 19.5. *Après avoir justifié son existence, écrire le développement limité en $a = (-1, 1, 0)$ à l'ordre 1, de*

$$f : (x, y, z) \longmapsto (x^2 + yz)e^z$$

Exercice de colle (E1)

On considère l'application $f : x \in \mathbb{R}^p \longmapsto \|x\|_2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^p \smallsetminus \{0\}$.
2. Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$, déterminer $df(a)$ et écrire en justifiant le développement limité à l'ordre 1 de f en a.

19.3.3 Règle de la chaîne

Proposition 5

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $x_1, \dots, x_p : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications dérivables telles que

$$\forall t \in I, \quad (x_1(t), \dots, x_p(t)) \in U.$$

Alors $F : t \longmapsto F(t) = f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) &= x_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_p(t)) + \cdots + x_p'(t)\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1(t), \dots, x_p(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_p(t)). \end{aligned}$$

Cas où $p = 2$: La règle de la chaîne s'écrit $\dfrac{d}{dt}\Big(f(x(t), y(t))\Big) = x'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$.

Cas où $p = 3$: La règle de la chaîne s'écrit

$$\frac{d}{dt}\Big(f(x(t), y(t), z(t))\Big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)).$$

Preuve. Sans restreindre la généralité, on écrit cette preuve dans le cas où $p = 2$ **(D3)**.

□

On peut appliquer ce résultat aux dérivées partielles d'une application composée et démontrer la proposition suivante.

Proposition 6

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $x_1, \ldots, x_p : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in V, \quad (x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_p(u_1, \ldots, u_n)) \in U.$$

Alors $g : (u_1, \ldots, u_n) \longmapsto f(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_p(u_1, \ldots, u_n))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et on a :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \forall (u_1, \ldots, u_n) \in V \quad \frac{\partial g}{\partial u_j}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_p(u_1, \ldots, u_n)) \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, \ldots, u_n).$$

On retiendra le résultat de manière formelle : $\displaystyle \frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$.

Dans le cas particulier où $n = p = 2$, on obtient l'énoncé suivant.

Proposition 7

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $x, y : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (u, v) \in V, \quad (x(u, v), y(u, v)) \in U.$$

Alors $g : (u, v) \longmapsto f(x(u, v), y(u, v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et pour tout $(u, v) \in V$, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v) & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \dfrac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u, v) & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \dfrac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \dfrac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{array} \right.$$

Remarque : On retiendra plus formellement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial g}{\partial u} & = & \dfrac{\partial f}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & = & \dfrac{\partial f}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right.$$

sachant que les dérivées partielles de f sont évaluées en $(x(u, v), y(u, v))$ et celles de g, x, y en (u, v).

Passage en coordonnées polaires sur $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice de colle (E1)

Soit $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Déterminer un ouvert U_1 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_1 définie par :

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & V_1 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est bijective. Exprimer φ_1^{-1}.

Exercice de colle (E2)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
Exprimer les dérivées partielles de F en fonctions de celles de f.

En déduire la résolution sur $V_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles $(\mathcal{E})$: $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Passage en coordonnées polaires sur $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0),\ x \leqslant 0\}$.

Exercice de colle (E3)

Passage en coordonnées polaires sur $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0),\ x \leqslant 0\}$. Déterminer un ouvert U_2 de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'application φ_2 définie par :

$$\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} U_2 & \longrightarrow & V_2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

est bijective et exprimer φ_2^{-1}.

Lorsque $r \neq 0$, exprimer les dérivées partielles de f en fonctions de celles de F.

Exemple 19.6. Changement de variables affine.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$F(u, v) = f(au + bv, cu + dv).$$

Exprimer les dérivées partielles de F en fonctions de celles de f.

A quelle condition peut-on exprimer les dérivées partielles de f en fonctions de celles de F ?

Proposition 8

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si U est un **ouvert convexe**, alors on a l'équivalence suivante.

$$f \text{ est constante} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \dots, p\},\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in U \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Preuve.

□

19.3.4 Gradient

On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne usuelle et note $\mathcal{B}$ sa base canonique. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}).$$

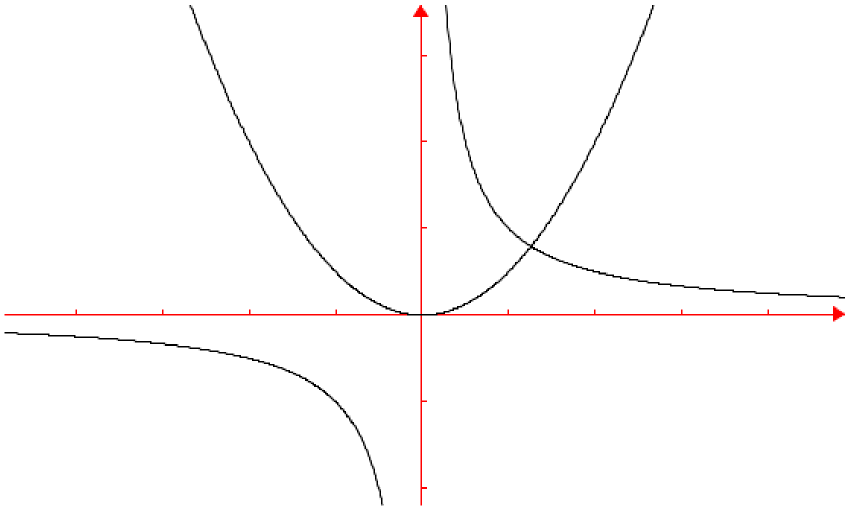
Ainsi, il existe un unique vecteur $u \in \mathbb{R}^p$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, on ait $df(a).h = \langle u, h \rangle$.
Le vecteur u dépend de f et de a, on le note $\overrightarrow{\text{grad}} f_a$ ou encore $\nabla f(a)$. Ainsi

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad df(a).h = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f_a, h \rangle = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

On peut exprimer $\nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f_a$ à l'aide des dérivées partielles de f en a. En effet, puisque la base canonique est orthonormée, on a

$$df(a).h = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f_a, h \rangle = \langle \nabla f(a), h \rangle \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\text{grad}} f_a = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Exemple 19.7. *On considère l'application* $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2y - 2x - y^2$.
Après avoir justifié son existence, déterminer le gradient de f *et représenter sommairement le champ de vecteurs obtenu.*



19.4 Applications géométriques

19.4.1 Courbes du plan

Définition 6

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle courbe $\mathcal{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ d'équation $F(x,y) = 0$, l'ensemble suivant.

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in V,\ F(x,y) = 0\}.$$

Ainsi, pour tout $M(x,y) \in V$ on a $M \in \mathcal{C} \iff F(x,y) = 0$.

Exemple 19.8.

- *Lorsque* F *est une application affine, on retrouve les équations de droites* $(D) :\ ax + by + c = 0$.
- *Lorsque* $F(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$, *on obtient le cercle de centre* $\Omega = (a,b)$ *et de rayon* R.

Définition 7 (Point régulier)

Soit $F :\ V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C} :\ F(x,y) = 0$. Soit $M(x,y) \in \mathcal{C}$, on dit que M est un point régulier de $\mathcal{C}$ si

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_F(M) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) \neq (0,0).$$

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ est régulière si tous ses points le sont.

On admet la proposition suivante.

Proposition 9

Soit $F :\ V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C} :\ F(x,y) = 0$.
Si $M(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ est un point régulier de $\mathcal{C}$, alors la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente en ce point dont la normale est dirigée par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_F(M_0) \neq (0,0).$$

Illustration graphique :

Exercice de colle (E1)

On considère la courbe $\mathcal{C} : 2x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 1$.
Démontrer que cette courbe est régulière et déterminer l'équation de sa tangente en un point $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$.

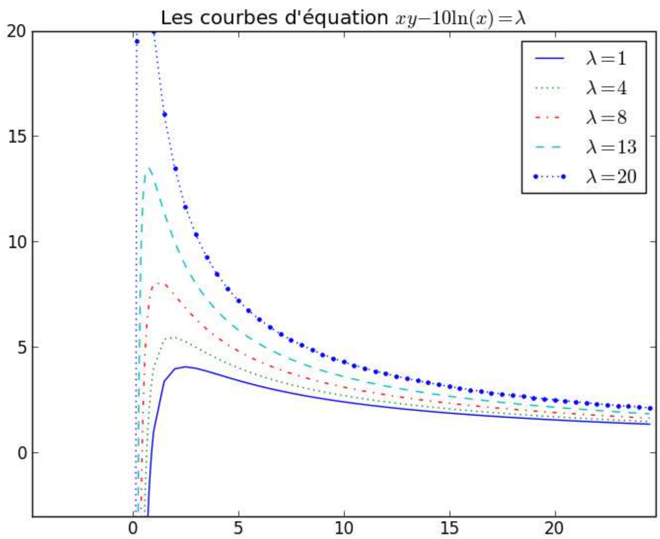
Définition 8 (Lignes de niveau)

Soit $F : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle lignes de niveau assaociées à F les courbes d'équations

$$\mathcal{C}_\lambda : \ F(x, y) = \lambda.$$

Proposition 10

Avec les notations précédentes, en un point $M(x, y)$ de $\mathcal{C}_\lambda$ où il est non nul, le gradient de F est orthogonal à $\mathcal{C}_\lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de λ.



19.4.2 Surfaces

Définition 9

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On appelle surface $\mathcal{S}$ de classe $\mathcal{C}^1$ d'équation $F(x, y, z) = 0$, l'ensemble suivant.

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in V,\ F(x, y, z) = 0\}.$$

Ainsi, pour tout $M(x, y, z) \in V$ on a $M \in \mathcal{S} \iff F(x, y, z) = 0$.

Exemple 19.9. *Lorsque F est un polynôme, on dira que $\mathcal{S}$ est une surface algébrique. En voici des cas simples.*
- *Lorsque F est de degré 1, on retrouve les équations de plans (P) : $ax + by + cz + d = 0$.*
- *Si $F(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2$, on obtient la sphère de centre $\Omega = (a, b, c)$ et de rayon R.*

Définition 10 (Point régulier)

Soit $F :\ V \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{S} :\ F(x, y, z) = 0$. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$, on dit que M est un point régulier de $\mathcal{S}$ si

$$\overrightarrow{\text{grad}}_F(M) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\right) \neq (0, 0, 0).$$

On dit que la surface $\mathcal{S}$ est régulière si tous ses points le sont.

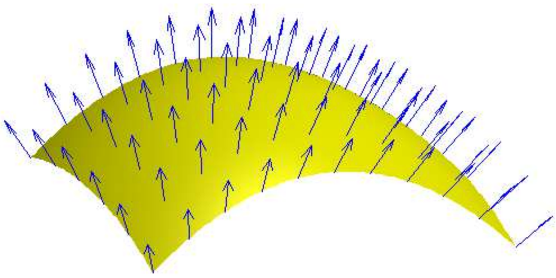
Définition 11 (Plan tangent)

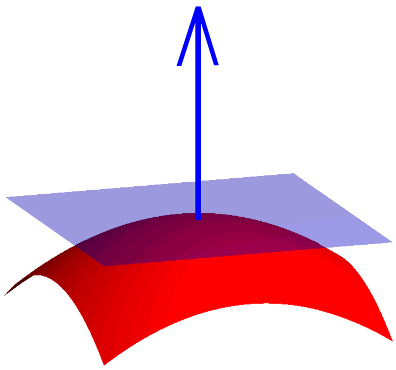
Soit $\mathcal{S} : F(x, y, z) = 0$ un surface de classe $\mathcal{C}^1$ et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de $\mathcal{S}$. On appelle plan tangent à $\mathcal{S}$ en M_0 le plan passant par M_0 et normal à

$$\overrightarrow{\text{grad}}_F(M) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right) \neq (0, 0, 0).$$

Toute droite passant par M_0 et contenue dans le plan tangent est tangente à $\mathcal{S}$ en M_0.
La normale à $\mathcal{S}$ en M_0 est la droite normale au plan tangent et passant par M_0.

Illustration graphique :





Exercice de colle (E1)

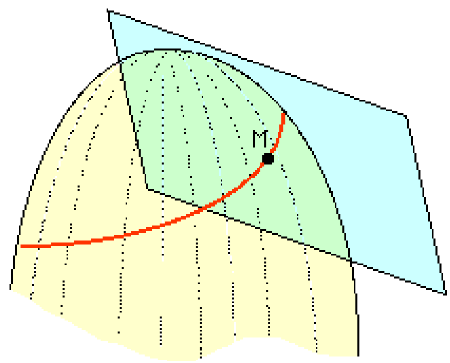
Montrer que la surface $\mathcal{S} : x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 9$ est régulière et déterminer l'équation de son plan tangent en $M_0(1, 1, 1)$.

Définition 12 (Courbe tracée sur une surface)

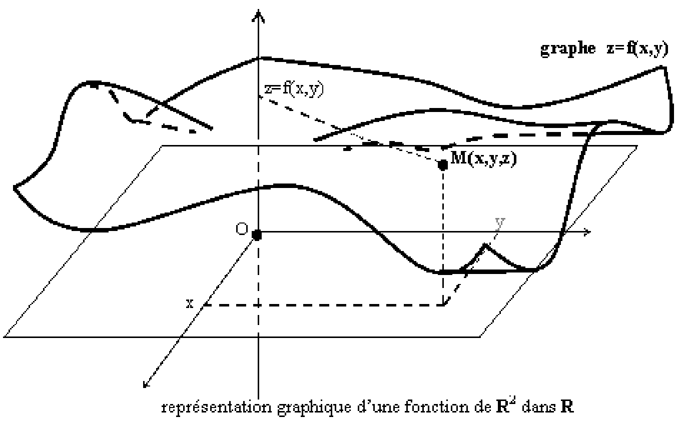
Soit $\mathcal{S} : F(x, y, z) = 0$ un surface de classe $\mathcal{C}^1$ et $(\Gamma) : t \in I \longmapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$.
On dit que (Γ) est une courbe tracée sur $\mathcal{S}$ si pour tout $t \in I$, $M(t)$ appartient à $\mathcal{S}$ autrement dit si :

$$\forall t \in I, \quad F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Remarque 1 : Si $M_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ est à la fois régulier en tant que point de $\mathcal{S}$ et régulier en tant que point de (Γ), alors la tangente à (Γ) en ce point est contenue dans le plan tangent à $\mathcal{S}$ en ce point.



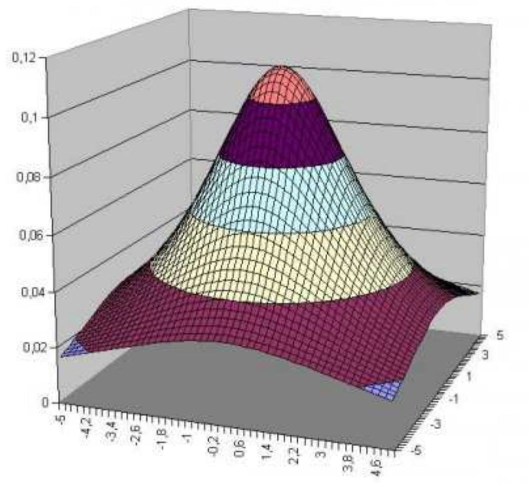
Remarque 2 : Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, alors le graphe de la fonction f est la surface d'équation $z = f(x, y)$.

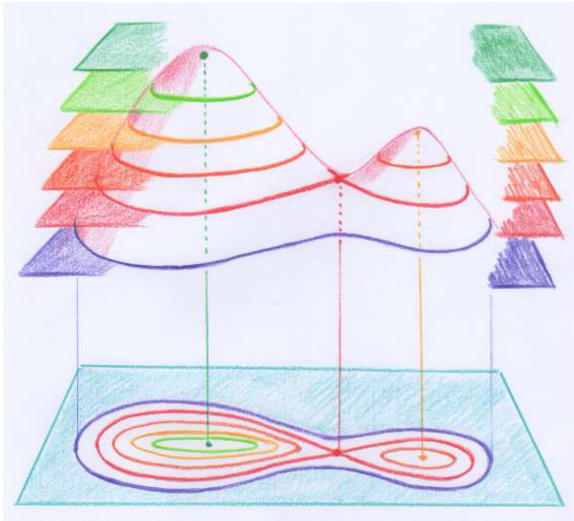


Si l'on coupe la surface par un plan de coordonnées $x = x_0$ (ou $y = y_0$, ou $z = z_0$), on obtient les **courbes coordonnées** de la surface d'équation $z = f(x, y)$.

• Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les courbes d'équations $f(x, y) = \lambda$ sont les lignes de niveau (cf cartes topographiques).

• Si l'on coupe la surface par un plan de coordonnées $x = x_0$ (ou $y = y_0$), on obtient un « maillage »de la surface.





un dessin de P. Popescu-Pampu sur `http://images.math.cnrs.fr`

19.5 Dérivées d'ordre supérieur

19.5.1 Définition

Lorsqu'elle existent, les dérivées partielles de f peuvent aussi admettre des dérivées partielles. Ce sont les dérivées partielles secondes de f. On les note :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } i \neq j : & \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \partial^2_{i,j} f \\[2ex] \text{si } i = j : & \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \partial^2_{i,i} f \end{array}\right\} \text{ il y en a } p \times p.$$

Les dérivées secondes peuvent aussi admettre des dérivées partielles (il y en aurait p^3). On peut ainsi, de proche en proche, définir la notion de dérivées partielles d'ordre k.

Définition 13

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si elle admet des dérivées partielles à l'ordre k sur U et si ces dérivées partielles sont continues sur U.
On note $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ qui sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. C'est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

On admet la proposition suivante.

Proposition 11 (Théorème de Schwarz)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U alors on a

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{(égalités de fonctions)}$$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U alors $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$ ne dépend pas de l'ordre de dérivation.

Ce théorème est admis, mais on peut le vérifier sur un exemple. On pose $f(x,y) = (x^2+y)e^{-x+2y}$.
Après avoir justifier leur existence, calculer les dérivées partielles secondes de f.

Exemple 19.10. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0)$.
Montrer que f *n'est pas de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

19.5.2 Développement limité à l'ordre 2

Définition 14 (Matrice hessienne)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ on fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U. Pour $a \in U$, on appelle matrice hessienne de f en a la matrice :

$$H_f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{i,j\in\{1,\dots,p\}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_p \partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U, par le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est **symétrique**.

Exemple 19.11. *Déterminer la matrice hessienne de la fonction f définie par $f(x,y) = (x^2+y)e^{-x+2y}$ au point $a = (1,1)$.*

Exercice de colle (E2)

On munit $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel et on considère l'application $f : x \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto \|x\|_2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
2. Pour tout $a \in U$, déterminer $H_f(a)$.

On admet la proposition suivante.

Proposition 12 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U et $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$.
Pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

ou encore

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_p + h_p) = f(a) \ + \ \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \ + \ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} h_i h_j \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \ + \ \|h\|^2 \varepsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

On note parfois $\|h\|^2 \varepsilon(h) = o(\|h\|^2)$.

Illustration du produit matriciel :

Exemple 19.12. *Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f définie par $f(x,y) = (x^2 + y)e^{-x+2y}$ au point $a = (1,1)$.*

Exercice de colle (E3)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$ une direction non nulle.
Montrer que la fonction $\varphi_v : \ t \longmapsto f(a+tv)$ est deux fois dérivable en 0 et que $\varphi_v'(0) = df(a).v$ et $\varphi_v''(0) = v^T H_f(a) v$.

19.6 Extrema

Définition 15

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que

- f admet un maximum en a si : $\forall x \in U,\ f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un minimum en a si : $\forall x \in U,\ f(x) \geqslant f(a)$.
- f admet un maximum local en a si : $\exists \delta > 0,\ \forall x \in U, \quad \|x-a\| < \delta \implies f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un minimum local en a si : $\exists \delta > 0,\ \forall x \in U, \quad \|x-a\| < \delta \implies f(x) \geqslant f(a)$.

Pour justifier l'existence d'un extremum, on pourra utiliser la proposition suivante (*Espaces vectoriels normés*).

Proposition 13 (Théorème des bornes atteintes - Condition suffisante)

Si $f : X \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur une partie fermée et bornée X de $\mathbb{R}^p$, alors f est bornée et elle atteint ses bornes.

Définition 16 (Point critique)

Soit $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que f admet des dérivées partielles en a. On dit que a est un point critique de f si $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$, autrement dit si toutes les dérivées partielles de f s'annulent en a ou encore si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_f(a) = 0$.

Proposition 14 (Condition nécessaire)

Soit $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec U ouvert et $a \in U$. On a

$$f \text{ admet un extremum local en } a \quad \Longrightarrow \quad a \text{ est un point critique de } f$$

Preuve.

$\square$

Remarque 1 : Ce résultat est faux si U n'est pas ouvert.

Remarque 2 : La réciproque de cette proposition est fausse.

Plan d'étude : Pour chercher les extrema locaux de $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$:

- On s'assure que U est ouvert et que f est de classe $\mathcal{C}^1$
- On cherche les points critiques de f sur U. Ce sont les seuls points où f peut admettre un extremum local.
- Si $a \in U$ est un point critique de f, on étudie le signe de $f(a+h) - f(a)$ éventuellement pour h petit seulement,
  - Soit directement dans l'expression de $f(a+h) - f(a)$. On peut obtenir un extremum local ou global.
  - Soit, si f est $\mathcal{C}^2$ à l'aide du développement limité à l'ordre 2 (cf Proposition 43). On obtient ici que des extrema **locaux**.
$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{df(a).h}_{=0} + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

Exemple 19.13. *Déterminer les extrema de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$.*

On pourra directement utiliser la proposition suivante.

Proposition 15

Soit $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec U ouvert et $a \in U$ un point critique de f.

- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'admet pas de minimum local en a.

- Si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ alors f admet un maximum local strict en a.
- Si $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ alors f n'admet pas de maximum local en a.

Le raisonnement suivant est à maîtriser :

On reprend l'exemple précédent. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert.
La matrice hessienne de f en (x, y) est :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(indépendante de } x, y\text{)}.$$

En particulier $H_f(-2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Elle est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note α, β ses valeurs propres :

- $\alpha\beta = \det(H_f(-2,2)) = 3 > 0$ donc α, β sont non nulles et de même signe.
- $\alpha + \beta = \operatorname{tr}(H_f(-2,2)) = 4 > 0$ donc $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Raisonnement à retenir

On en déduit que $H_f(-2,2) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.
En effet, par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}H_f(-2,2)P = P^T H_f(-2,2)P = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
Soit $h \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$h^T H_f(a) h = h^T P D P^T h = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } P^T h = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Et donc $h^T H_f(a) h = \alpha k_1^2 + \beta k_2^2 \geqslant 0$. Ainsi, $H_f(-2,2) \in \mathcal{S}_2^{+}(\mathbb{R})$.

De plus, si $h^T H_f(a) h = \alpha k_1^2 + \beta k_2^2 = 0$ alors $\alpha k_1^2 = \beta k_2^2 = 0$ et comme $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on obtient $P^T h = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0$.
Or P^T est inversible donc $h = 0$. Finalement :

$$\boxed{H_f(-2,2) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}).}$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, et puisque $a = (-2, 2)$ est un point critique de f, la proposition 15 donne

$$\boxed{f \text{ admet un seul extremum local, c'est un minimum local et c'est en } (-2,2).}$$

Remarque : avec cette rédaction, on travaille au **voisinage** du point critique, et donc on ne démontre pas qu'il s'agit d'un extremum global.

Exercice de colle (E2)

Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
Démontrer que f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^2$.
f y admet-elle des extrema locaux ?

Exercice de colle (E1)

Déterminer les extrema locaux et globaux sur $[0, \pi] \times [0, \pi]$ de la fonction f définie par $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$