Chapitre 18

Fonctions numériques, fonctions vectorielles

18.1 Fonctions numériques (rappels)

Dans ce paragraphe, on rappelle des énoncés au programme de première année sans les démontrer. On en donne aussi quelques applications numériques. De nombreux points ne sont pas précisés (règles de dérivation, conséquence du signe de f' sur la monotonie de f, dérivées successives, dérivées de référence...). Il conviendra de compléter ce travail en revoyant le cours et les exercices vus en MPSI/PCSI.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, et I sera un intervalle de $\mathbb{R}$.

18.1.1 Limites

Définition 1 (Limite finie en un point)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, a un point ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Définition 2 (Limite finie en $+\infty$)

Soit $f : [\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geqslant A \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

On a un énoncé analogue pour une limite finie en $-\infty$.

La notion de limite infinie (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$) est à travailler en autonomie.

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle de la limite)

- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et a un point ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence suivante.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } I \\ \text{et convergeant vers } a, \text{ on a} \\ \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell \end{array} \right.$$

- Soit $f : [\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence suivante.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } I \\ \text{et divergeant vers } +\infty, \text{ on a} \\ \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell \end{array} \right.$$

Cet énoncé est plus souvent utilisé dans sa forme contraposée (et seulement dans un sens).

Exercice de colle (E1)

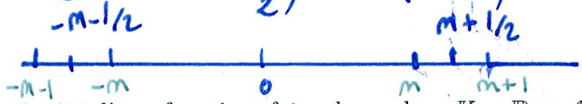
On note E la fonction *partie entière* et on considère $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) + E(-x)$.
Démontrer que la fonction f n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x-1 < E(x) \leqslant x$ et $-x-1 < E(-x) \leqslant -x$

En ajoutant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2 \leqslant f(x) \leqslant 0$ donc f est bornée. Elle ne peut donc pas avoir $\pm\infty$ comme limite en $+\infty$.

• Si on avait $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on aurait $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} f(n) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} f(n+\frac{1}{2}) = \ell$. Mais $f(n) = E(n) + E(-n) = n - n = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et $f(n+\frac{1}{2}) = E(n+\frac{1}{2}) + E(-n-\frac{1}{2}) = n + (-n-1) = -1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$. Contradiction.



18.1.2 Continuité

On rappelle la définition de continuité d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application.

- Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ autrement dit si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

  Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors f est continue en x_0 si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

- On dit que f est continue sur I si f est continue en chaque point de I.
  Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors f est continue sur I si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

En combinant cette définition et la proposition 1, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $x_0 \in I$. On a l'équivalence suivante.

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \begin{cases} \text{Pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } I \\ \text{et convergeant vers } x_0, \text{ on a} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x_0) \end{cases}$$

Quelques énoncés liés à la continuité dans le cas où $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$:

Proposition 3 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Si a et b sont deux points de I tels que $a \leqslant b$, alors on a l'implication

$$f(a)f(b) \leqslant 0 \implies \exists c \in [a,b],\ f(c) = 0.$$

Exercice de colle (E1)

Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Par hypothèse, $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

On considère $g : x \in [0,1] \longrightarrow f(x) - x$.

f est continue sur $[0,1]$ donc g est continue sur $[0,1]$.

De plus $\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{array}\right\}$. Donc par le th. des valeurs intermédiaires $\exists x \in [0,1]$, $g(x) = 0$ ie $f(x) = x$.

Exercice de colle (E2)

Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0,1],\ f(x) = x\}$ admet un minimum.

Refaire le (E1) ci-dessus. Ainsi A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, comme elle est minorée, elle admet une borne inférieure $m = \inf(A) \geq 0$.

Montrons qu'il s'agit d'un minimum, c'est-à-dire que $m \in A$ ie que $f(m) = m$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de A (m est le plus grand)

donc $\exists x_n \in A$ tq $x_n \leq m + \frac{1}{n}$.

De plus m est un minorant de A donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq x_n \leq m + \frac{1}{n}$

Par le th. d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = m}$

Or f est continue en m donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(m)$

Enfin $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in A$ donc $x_n = f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} m$

Par unicité de la limite $f(m) = m$ ce qu'on voulait.

Proposition 4 (Image d'un intervalle par une application continue)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Si a et b sont deux points de I tels que $a \leqslant b$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur $[a,b]$.
On peut retenir cet énoncé sous la forme : *l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Proposition 5 (Théorème de la bijection monotone)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone.
- Si a et b sont deux points de I tels que $a \leqslant b$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte une et une seule fois par f sur $[a,b]$,
- La fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$,
- La bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et de même monotonie que f.

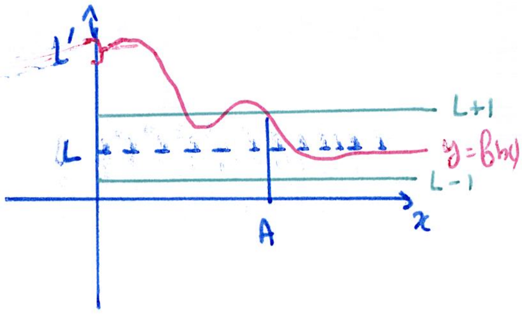
> **Proposition 6 (Image continue d'un segment)**
>
> Soit $I=[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On a :
> - la fonction f possède un maximum M et un minimum m sur $[a,b]$,
> - $f([a,b])=[m,M]$.
>
> On peut retenir cet énoncé sous la forme : *l'image continue d'un segment de $\mathbb{R}$ est un segment.*

> **Exercice de colle (E2)**
>
> Montrer qu'une fonction $f :]0,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en 0 et en $+\infty$ est bornée.

- On écrit la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ avec $\varepsilon = 1$.

$\exists A>0,\ \forall x \geqslant A \quad |f(x)-L| \leqslant 1.$

et donc $\forall x\in[A,+\infty[\quad |f(x)| \leqslant |f(x)-L|+|L| \leqslant 1+|L|.$



- Puisque f est continue sur $]0,A]$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L'$, f est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,A]$ donc f est bornée sur $]0,A]$

$\exists M>0,\quad \forall x\in[0,A],\ |f(x)|\leqslant M.$

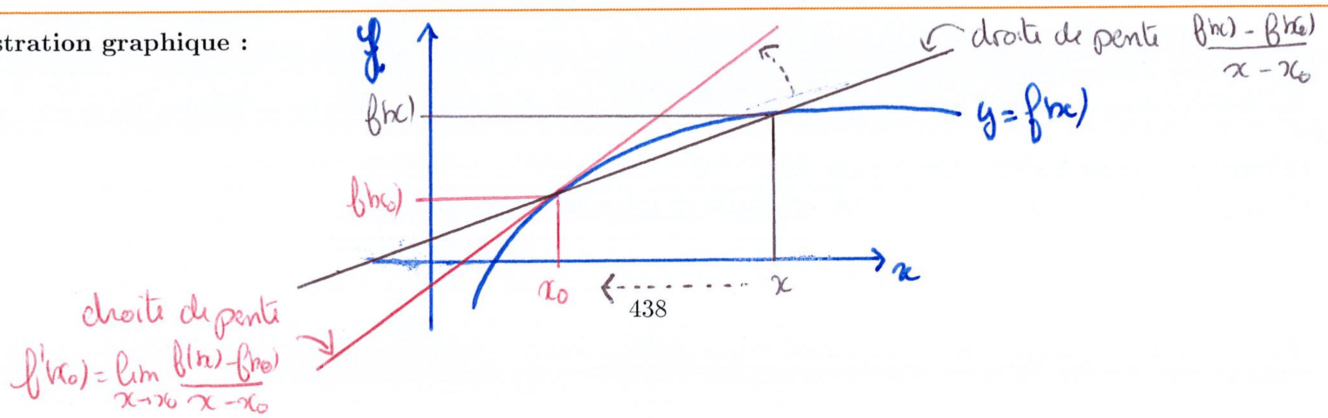
Conclusion : en posant $M' = \max(M, 1+|L|)$ on a

$\forall x\in]0,+\infty[,\ |f(x)|\leqslant M'.$ Ainsi $\boxed{f \text{ est bornée.}}$

18.1.3 Dérivabilité

> **Définition 4**
>
> Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application.
>
> - Soit $x_0\in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe dans $\mathbb{R}$.
>   Dans ce cas, on note cette limite $f'(x_0)$: c'est le nombre dérivé de f en x_0.
>   Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors f est dérivable en x_0 si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et dans ce cas on a l'égalité : $f'(x_0) = \mathrm{Re}(f)'(x_0) + i\mathrm{Im}(f)'(x_0)$.
> - On dit que f est dérivable I si f est dérivable en chaque point de I.
>   Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f l'application $f' : x\in I \mapsto f'(x)$.
>   Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. On a alors $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\mathrm{Im}(f)'$.

Illustration graphique :



Rappel : On a l'implication qui suit.

$$f \text{ dérivable en } x_0 \text{ (resp sur } I) \implies f \text{ continue en } x_0 \text{ (resp sur } I).$$

Quelques énoncés liés à la dérivabilité sur un intervalle :

Proposition 7 (Dérivée de la bijection réciproque)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable et strictement monotone. Elle est donc une bijection de I sur $f(I)$. Soit $x_0 \in I$, on note $y_0 = f(x_0) \in f(I)$. On a alors l'équivalence suivante.

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } y_0 \iff f'(x_0) \neq 0,$$

et dans ce cas, on a l'égalité $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Globalement, si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exercice de colle (E1)

Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

1) f est définie, dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x > 1$, $f'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) > 0$.
Donc f est continue, strictement croissante sur $]1,+\infty[$, par le th. de la bijection, f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur son image $]-1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-1 \nearrow$	$+\infty$

2) On a f dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) \neq 0$
donc g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall y \in]-1,+\infty[$, $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))} = \dfrac{1}{\ln(g(y))}$

3) On remarque $f(e) = e\ln(e) - e = 0$ donc $g(0) = e$.
Et d'après ce qui précède :

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Proposition 8 (Dérivée et extremum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I.
Si f présente un extremum local en a et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

Proposition 9 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que l'on a :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$,
- $f(a) = f(b)$,

alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice de colle (E2)

On considère le polynôme $U_n(X) = (X^2-1)^n$ et on pose $P_n = U_n^{(n)}$.
Démontrer que P_n possède n racines distinctes et qu'elles appartiennent à $]-1,1[$.

On montre par reccurrence finie que :

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $U_n^{(k)}$ possède k racines distinctes dans $]-1,1[$ (au moins).

Initialisation : pour $k=0$, il n'y a rien à faire.

Hérédité : Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. On suppose que $U_n^{(k)}$ possède k racines distinctes dans $]-1,1[$. On les note :

$\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < +1 = \alpha_{k+1}$. On pose $-1 = \alpha_0$ et $1 = \alpha_{k+1}$

$U_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ donc 1 et -1 sont racines de multiplicité n de U_n. Par conséquent, puisque $k \leq n-1$, 1 et -1 sont racines de multiplicité $n-k \geqslant 1$ de $U_n^{(k)}$.

Ainsi $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$

Pour $j \in [\![0,k]\!]$ on applique le th. de Rolle sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$.

$x \longmapsto U_n^{(k)}(x)$ est continue sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, dérivable sur $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ et $U_n^{(k)}(\alpha_j) = 0 = U_n^{(k)}(\alpha_{j+1})$. Donc :

$$\exists \beta_j \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[, \ (U_n^{(k)})'(\beta_j) = U_n^{(k+1)}(\beta_j) = 0.$$

Ainsi $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ sont $k+1$ racines distinctes ($\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \beta_k < \alpha_{k+1}$) de $U_n^{(k+1)}$. Ce qu'on voulait.

Conclusion : Le résultat est donc vrai pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

En particulier, pour $k=n$: $\boxed{U_n^{(n)} \text{ possède } n \text{ racines distinctes dans }]-1,1[}$

Et comme $U_n^{(n)}(X)$ est de degré $2n-n=n$, il n'en a pas d'autre.

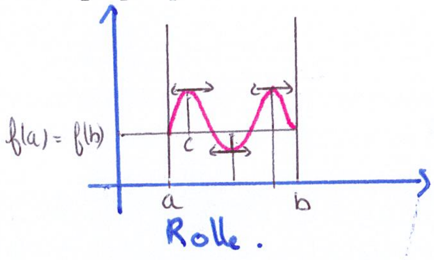
Proposition 10 (Égalité des accroissement finis)

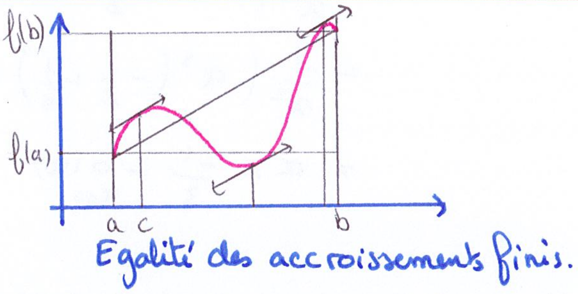
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que l'on a :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$

alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Illustrations graphiques :





Interprétation cinématique : Un point se déplace sur l'axe des abscisse entre les instants a et b. On note $x(t)$ sa position à l'instant t. La fonction x est continue et dérivable sur $[a,b]$. L'égalité des accroissements finis dit qu'il existe un instant $t_0 \in [a,b]$ tel que $x'(t_0) = \dfrac{x(b)-x(a)}{b-a}$, c'est-à-dire tel que la vitesse instantannée en t_0 est égale à la vitesse moyenne sur $[a,b]$.

Proposition 11 (Inégalité des accroissement finis)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que l'on a :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$,
- il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a,b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$,

alors on a l'encadrement $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

On peut remplacer la troisième condition par $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant M$, la conclusion devient :

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant M.$$

Interprétation cinématique : Avec les notations précédentes, l'inégalité des accroissements finis dit que si la vitesse instantannée d'un point mobile est comprise entre m et M alors sa vitesse moyenne également. Evidemment, si l'aiguille du compteur d'un véhicule ne dépasse pas 90 km/h lors d'un trajet, sa vitesse moyenne ne la dépassera pas non plus !

Proposition 12 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément de I. On suppose que l'on a :

- f est continue sur I,
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
- $f'_{|I \setminus \{a\}}$ admet une limite finie l en a,

alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$. Par conséquent, f' est continue en a.

Si on remplace la troisième condition par $f'_{|I \setminus \{a\}}$ tend vers $\pm\infty$ en a, on peut dire que le graphe de f admet une (demi-)tangente verticale en le point d'abscisse a.

Exemple 18.1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si x est non nul et $f(0) = 1$.*
On montre que f est dérivable en 0.

- *Par opérations sur les fonction continues, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0. Elle l'est donc bien sur $\mathbb{R}$.*

- *Par opérations sur les fonction dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

- *On détermine la limite de f' en 0 à l'aide de développements limités.*

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + o(x^3)\right)$$

$$= x \times \frac{-1}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) =$ 0

Remarque : cette rédaction est celle vue en première année. Avec le cours sur les séries entières, on peut directement démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On donne un exemple pour lequel le recours aux séries entières n'est pas possible.

Exercice de colle (E1)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$. Donc f est aussi continue en 0
Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :
$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissance comparée.
Par le th. de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
De plus, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ / dérivable sur $\mathbb{R}$ et en 0 : $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc f' est continue en 0
Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice de colle (E3)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On montre par récurrence sur n que
$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X], \ \forall x \in \mathbb{R}^*, \ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(1/x)}{Q_n(1/x)} e^{-1/x^2}$

Initialisation : Pour $n = 0$, $P_n = Q_n = 1$ convient.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tq :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(1/x)}{Q_n(1/x)} e^{-1/x^2}$$

On dérive cette égalité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \left[-\frac{1}{x^2} \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} \frac{P_n}{Q_n}\left(\frac{1}{x}\right)\right] e^{-1/x^2}$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} \frac{P_n'(1/x)Q_n(1/x) - P_n(1/x)Q_n'(1/x)}{Q_n^2(1/x)} + 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 \frac{P_n(1/x)}{Q_n(1/x)}\right) e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{P_{n+1}(1/x)}{Q_{n+1}(1/x)} e^{-1/x^2} \quad \text{avec} \quad P_{n+1} = \frac{-X^2(P_n' Q - P_n Q_n') + 2X^3 P_n Q_n}{Q_n^2}$$

ce qu'on voulait.

Montrons par récurrence sur n que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n = 0$: f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(1/x)}{Q_{n+1}(1/x)} e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \text{(crois. comparées)}$$

Par le th. de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Ainsi $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et

$\lim_{x \to 0} f^{(n+1)}(x) = 0 = f^{(n+1)}(0)$. Donc $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$: f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$

Ce qu'on voulait.

18.1.4 Dérivées successives

Définition 5

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction numérique.

- Si f est dérivable, sa fonction dérivée f' peut, elle aussi, être dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée de f' est appelée fonction dérivée seconde de f et on la note f'' ou $f^{(2)}$.
- Par récurrence, on définit de même les fonctions dérivées succesives de f sur I lorsqu'elles existent. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f sur I.

Définition 6

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction numérique et $p \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f admet une dérivée à l'ordre k sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f admet une dérivée à tout ordre sur I.

Proposition 13 (formule de Leiniz)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Alors la fonction $f.g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et l'on a

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}.$$

Exercice de colle (E1)

Calculer de deux façons la dérivée n−ième de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Tout d'abord, sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $h = \dfrac{1}{1+x}$.

f et h sont $\mathcal{C}^\infty$ sur D et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \dots, \quad f^{(j)} = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

De même $h^{(j)}(x) = \dfrac{(-1)^j j!}{(1+x)^{j+1}}$

Méthode 1 :

$\forall x \in D$, $g(x) = \dfrac{1/2}{1-x} + \dfrac{1/2}{1+x}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall x \in D$

$$\boxed{g^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}}$$

Méthode 2 : f et h sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur D donc par la formule de Leibniz :

$\forall x \in D$:

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{(1+x)^{n-k+1}}$$

$$= \boxed{n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-k}}{(1-x)^{k+1}(1+x)^{n-k+1}}}$$

On profite de ce chapitre pour revoir les différentes formules de Taylor rappelées dans le chapitre *Rappels et compléments sur l'intégration.*

Proposition 14 (Formule de Taylor avec reste intégrale)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Montrer que pour tout $(a, x) \in I^2$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Proposition 15 (Inégalité de Taylor-Lagrange - 1)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{K})$ et si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$ alors on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proposition 16 (Inégalité de Taylor-Lagrange - 2)

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{K})$ et si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I alors pour tout $(a,x) \in I^2$ on a :

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On peut utiliser ces propositions par exemple pour démontrer qu'une fonction est développable en série entière.

Proposition 17 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et a un élément de I. Alors $R_n(x) = \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$

Exercice de colle (E1)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc par la formule de Taylor-Young (en 0) :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

De même, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc :

$$f'(x) = f'(0) + x f''(0) + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

On a donc :

$$\frac{1}{x^2}\left(x f'(x) - f(x) + f(0)\right) = \frac{1}{x^2}\left(\cancel{x f'(0)} + x^2 f''(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \left(\cancel{f(0)} + \cancel{x f'(0)} + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)\right) + \cancel{f(0)}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} . \left(\frac{x^2}{2} f''(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \frac{f''(0)}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

Et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x f'(x) - f(x) + f(0)}{x^2} = \dfrac{f''(0)}{2}}$

18.1.5 Convexité

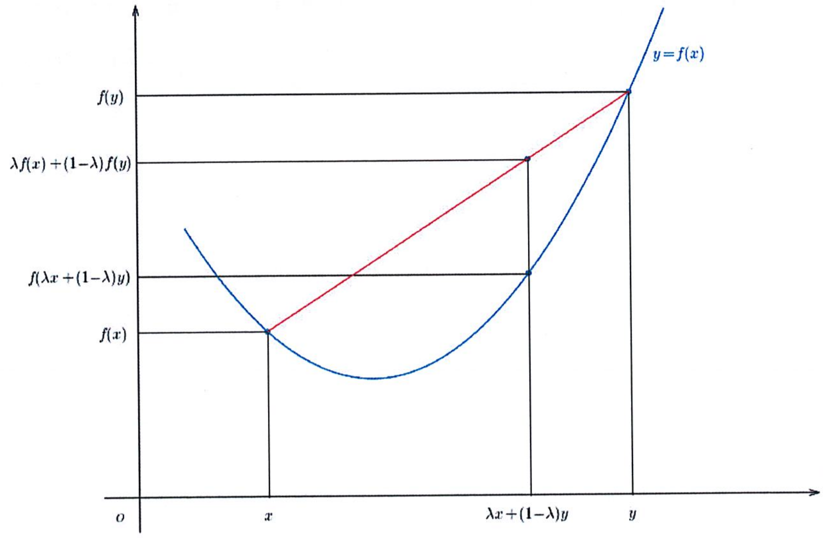
Définition 7

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est convexe si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation graphique : On remarque que lorsque λ parcourt $[0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y$ parcourt le segment $[x,y]$ (ou $[y,x]$ si $x > y$).

Ainsi, graphiquement, une fonction est convexe si son graphe est en dessous de ses sécantes (ou cordes).



Proposition 18 (Caractérisation des fonctions convexes)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On suppose que f est dérivable sur I. Alors :

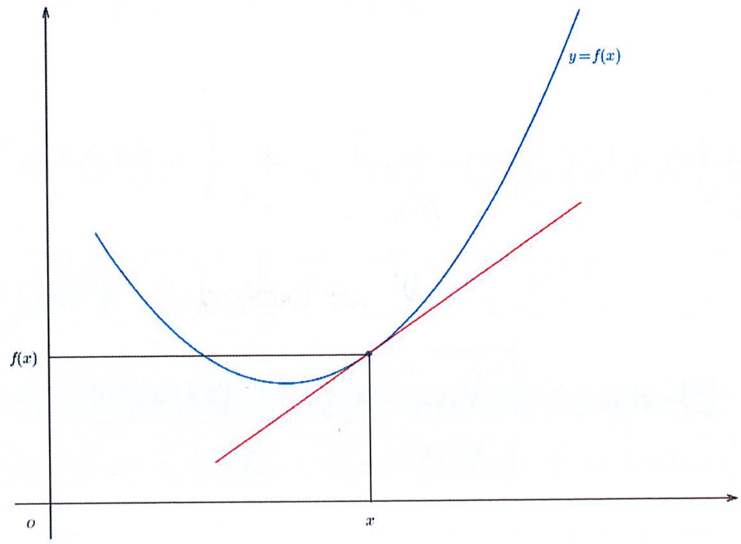
$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante}$$

- On suppose que f est deux fois dérivable sur I. Alors :

$$f \text{ est convexe} \iff f'' \text{ est positive}$$

Conséquence graphique : Le graphe d'une fonction convexe et dérivable est au dessus de ses tangentes.

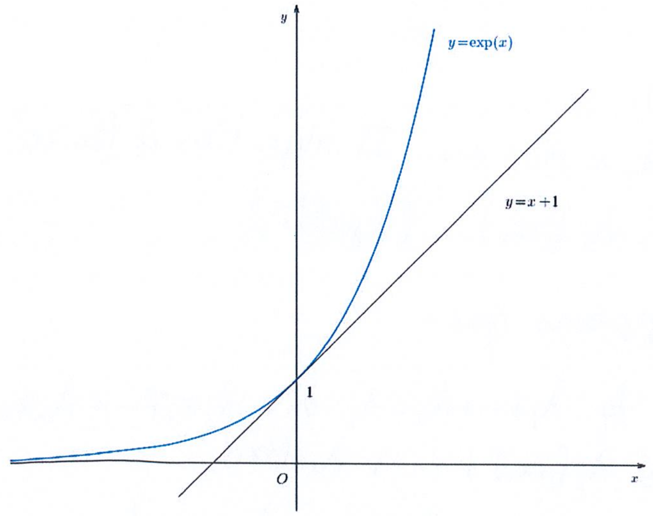
La convexité de certaines fonctions nous permet d'obtenir des inégalités utiles en analyse.



Des inégalités à connaître :

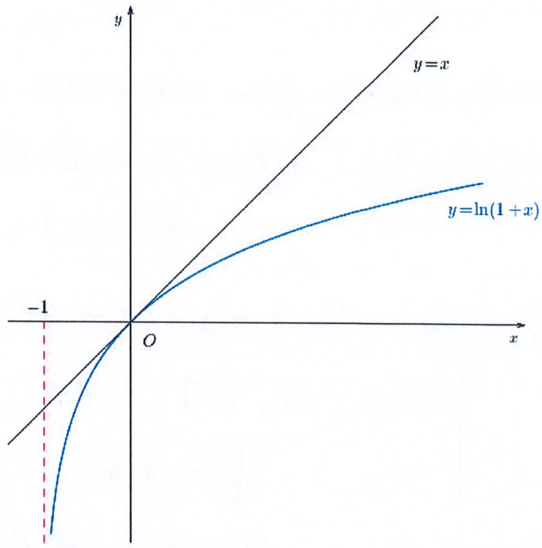
- la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$



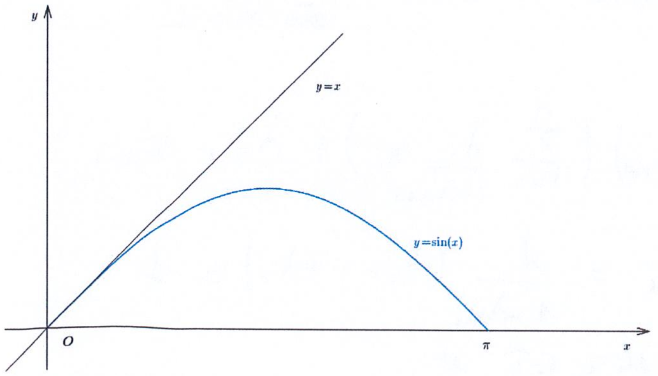
- la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ donc :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$



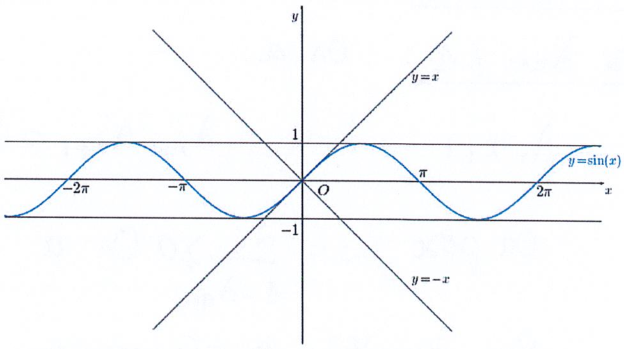
- la fonction sin est concave sur $[0,\pi]$ donc :

$$\forall x \in [0,\pi], \quad \sin(x) \leqslant x.$$



- On peut aussi montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$



Exercice de colle (E2)

Démontrer que pour tous $a, b \in]1,+\infty[$, on a $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

On considère la fonction $f : x \longmapsto -\ln(\ln(x))$.

f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x > 1$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x\ln(x)}$

Par opération, f' est croissante sur $]1,+\infty[$ (on peut aussi vérifier que $f'' \geqslant 0$)

Donc f est convexe : $\forall a,b \in]1,+\infty[$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

Avec $\lambda = \frac{1}{2}$: $-\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(-\ln(\ln(a)) + \left(-\ln(\ln(b))\right)\right)$

Donc $\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\ln(\ln(a)) + \ln(\ln(b))\right)$ et par croissance de l'exponentielle :

$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant e^{\frac{1}{2}\ln(\ln a) + \frac{1}{2}\ln(\ln b)} = \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$ ce qu'on voulait.

Exercice de colle (E3 - Inégalité de Jensen)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Démontrer que :

$$f(\underbrace{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}_{\in I}) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

On le montre par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n=1$: alors $\lambda_1 \in [0,1]$ et $\sum_{i=1}^{1} \lambda_i = \lambda_1 = 1$. Il n'y a rien à faire :

$f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1)$ (égalité).

Hérédité : Soit $n \geq 1$ un entier, supposons que :

$\forall x_1, \ldots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, on a $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in I$ et

$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$.

Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$.

si $\lambda_{n+1} = 1$: alors $\lambda_0 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1 \Rightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ On est ramené au cas où $n=1$.

si $\lambda_{n+1} \neq 1$: On a :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1-\lambda_{n+1}) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

On pose $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} \geq 0$. On a $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \dfrac{1}{1-\lambda_{n+1}} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = 1$.

Par hypothèse de récurrence : $\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \in I$ et :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i). \quad (*)$$

puisque I est un intervalle, I est convexe et : $(1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in I$.

Par convexité de f :

$$f\left((1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$\downarrow (*)$

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda_{n+1}) \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

ce qu'on voulait.