Chapitre 18

Fonctions numériques, fonctions vectorielles

18.1 Fonctions numériques (rappels)

Dans ce paragraphe, on rappelle des énoncés au programme de première année sans les démontrer. On en donne aussi quelques applications numériques. De nombreux points ne sont pas précisés (règles de dérivation, conséquence du signe de f' sur la monotonie de f, dérivées successives, dérivées de référence...). Il conviendra de compléter ce travail en revoyant le cours et les exercices vus en MPSI/PCSI.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, et I sera un intervalle de $\mathbb{R}$.

18.1.1 Limites

Définition 1 (Limite finie en un point)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, a un point ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Définition 2 (Limite finie en $+\infty$)

Soit $f : [\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

On a un énoncé analogue pour une limite finie en $-\infty$.

La notion de limite infinie (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$) est à travailler en autonomie.

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle de la limite)

- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et a un point ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence suivante.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \iff \quad \begin{cases} \text{Pour toute suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } I \\ \text{et convergeant vers } a, \text{ on a} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell \end{cases}$$

- Soit $f : [\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence suivante.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \iff \quad \begin{cases} \text{Pour toute suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } I \\ \text{et divergeant vers } +\infty, \text{ on a} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell \end{cases}$$

Cet énoncé est plus souvent utilisé dans sa forme contraposée (et seulement dans un sens).

Exercice de colle (E1)

On note E la fonction *partie entière* et on considère $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto E(x) + E(-x)$.
Démontrer que la fonction f n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en $+\infty$.

18.1.2 Continuité

On rappelle la définition de continuité d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application.

- Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ autrement dit si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

  Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors f est continue en x_0 si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

- On dit que f est continue sur I si f est continue en chaque point de I.
  Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors f est continue sur I si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

En combinant cette définition et la proposition 1, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $x_0 \in I$. On a l'équivalence suivante.

$$f \text{ est continue en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ à valeurs dans } I \\ \text{et convergeant vers } x_0, \text{ on a} \\ \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0) \end{cases}$$

Quelques énoncés liés à la continuité dans le cas où $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$ **:**

Proposition 3 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Si a et b sont deux points de I tels que $a \leqslant b$, alors on a l'implication

$$f(a)f(b) \leqslant 0 \implies \exists c \in [a, b],\ f(c) = 0.$$

Exercice de colle (E1)

Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice de colle (E2)

Soit $f : [0,1] \longmapsto [0,1]$ une application continue.
Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une plus petite solution, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [0,1],\ f(x) = x\}$ admet un minimum.

Proposition 4 (Image d'un intervalle par une application continue)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Si a et b sont deux points de I tels que $a \leqslant b$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur $[a,b]$.
On peut retenir cet énoncé sous la forme : *l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Proposition 5 (Théorème de la bijection monotone)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone.
- Si a et b sont deux points de I tels que $a \leqslant b$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte une et une seule fois par f sur $[a,b]$,
- La fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$,
- La bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et de même monotonie que f.

Proposition 6 (Image continue d'un segment)

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On a :
- la fonction f possède un maximum M et un minimum m sur $[a, b]$,
- $f([a, b]) = [m, M]$.
On peut retenir cet énoncé sous la forme : *l'image continue d'un segment de* $\mathbb{R}$ *est un segment.*

Exercice de colle (E2)

Montrer qu'une fonction $f :]0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ continue et admettant des limites finies en 0 et en $+\infty$ est bornée.

18.1.3 Dérivabilité

Définition 4

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application.

- Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe dans $\mathbb{R}$.
  Dans ce cas, on note cette limite $f'(x_0)$: c'est le nombre dérivé de f en x_0.
  Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors f est dérivable en x_0 si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et dans ce cas on a l'égalité : $f'(x_0) = \mathrm{Re}(f)'(x_0) + i\mathrm{Im}(f)'(x_0)$.
- On dit que f est dérivable I si f est dérivable en chaque point de I.
  Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f l'application $f' : x \in I \mapsto f'(x)$.
  Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. On a alors $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\mathrm{Im}(f)'$.

Illustration graphique :

Rappel : On a l'implication qui suit.

$$f \text{ dérivable en } x_0 \text{ (resp sur } I) \implies f \text{ continue en } x_0 \text{ (resp sur } I).$$

Quelques énoncés liés à la dérivabilité sur un intervalle :

Proposition 7 (Dérivée de la bijection réciproque)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable et strictement monotone. Elle est donc une bijection de I sur $f(I)$. Soit $x_0 \in I$, on note $y_0 = f(x_0) \in f(I)$. On a alors l'équivalence suivante.

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } y_0 \iff f'(x_0) \neq 0,$$

et dans ce cas, on a l'égalité $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Globalement, si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exercice de colle (E1)

Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$.
2. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Proposition 8 (Dérivée et extremum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I.
Si f présente un extremum local en a et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

Proposition 9 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que l'on a :

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$,

alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice de colle (E2)

On considère le polynôme $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et on pose $P_n = U_n^{(n)}$.
Démontrer que P_n possède n racines distinctes et qu'elles appartiennent à $]-1, 1[$.

Proposition 10 (Égalité des accroissement finis)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que l'on a :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$

alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Illustrations graphiques :

Interprétation cinématique : Un point se déplace sur l'axe des abscisse entre les instants a et b. On note $x(t)$ sa position à l'instant t. La fonction x est continue et dérivable sur $[a,b]$. L'égalité des accroissements finis dit qu'il existe un instant $t_0 \in [a,b]$ tel que $x'(t_0) = \dfrac{x(b)-x(a)}{b-a}$, c'est-à-dire tel que la vitesse instantannée en t_0 est égale à la vitesse moyenne sur $[a,b]$.

Proposition 11 (Inégalité des accroissement finis)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que l'on a :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$,
- il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a,b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$,

alors on a l'encadrement $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.
On peut remplacer la troisième condition par $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant M$, la conclusion devient :

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leqslant M.$$

Interprétation cinématique : Avec les notations précédentes, l'inégalité des accroissements finis dit que si la vitesse instantannée d'un point mobile est comprise entre m et M alors sa vitesse moyenne également. Evidemment, si l'aiguille du compteur d'un véhicule ne dépasse pas 90 km/h lors d'un trajet, sa vitesse moyenne ne la dépassera pas non plus !

Proposition 12 (Théorème de la limite de la dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un élément de I. On suppose que l'on a :

- f est continue sur I,
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
- $f'_{|I \setminus \{a\}}$ admet une limite finie l en a,

alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$. Par conséquent, f' est continue en a.
Si on remplace la troisième condition par $f'_{|I \setminus \{a\}}$ tend vers $\pm\infty$ en a, on peut dire que le graphe de f admet une (demi-)tangente verticale en le point d'abscisse a.

Exemple 18.1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si x est non nul et $f(0) = 1$.*
On montre que f est dérivable en 0.

• *Par opérations sur les fonction continues, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on a $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0. Elle l'est donc bien sur $\mathbb{R}$.*

• *Par opérations sur les fonction dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

• *On détermine la limite de f' en 0 à l'aide de développements limités.*

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} =$$

Par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \quad .$

Remarque : cette rédaction est celle vue en première année. Avec le cours sur les séries entières, on peut directement démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On donne un exemple pour lequel le recours aux séries entières n'est pas possible.

Exercice de colle (E1)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice de colle (E3)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si x est non nul et $f(0) = 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

18.1.4 Dérivées successives

Définition 5

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction numérique.
• Si f est dérivable, sa fonction dérivée f' peut, elle aussi, être dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée de f' est appelée fonction dérivée seconde de f et on la note f'' ou $f^{(2)}$.
• Par récurrence, on définit de même les fonctions dérivées succesives de f sur I lorsqu'elles existent. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de $\vec{f}$ sur I.

Définition 6

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction numérique et $p \in \mathbb{N}^*$.
• On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f admet une dérivée à l'ordre k sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.
• On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f admet une dérivée à tout ordre sur I.

Proposition 13 (formule de Leiniz)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Alors la fonction $f.g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et l'on a

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}.$$

Exercice de colle (E1)

Calculer de deux façons la dérivée $n-$ième de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

On profite de ce chapitre pour revoir les différentes formules de Taylor rappelées dans le chapitre *Rappels et compléments sur l'intégration*.

Proposition 14 (Formule de Taylor avec reste intégrale)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Montrer que pour tout $(a,x) \in I^2$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Proposition 15 (Inégalité de Taylor-Lagrange - 1)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{K})$ et si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$ alors on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proposition 16 (Inégalité de Taylor-Lagrange - 2)

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I alors pour tout $(a,x) \in I^2$ on a :

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On peut utiliser ces propositions par exemple pour démontrer qu'une fonction est développable en série entière.

Proposition 17 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et a un élément de I. Alors $R_n(x) = \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

Exercice de colle (E1)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2}$.

18.1.5 Convexité

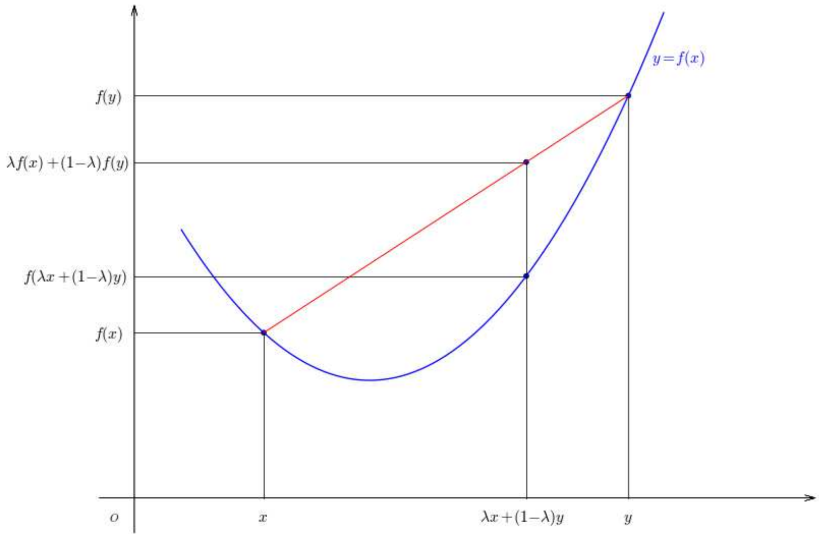
Définition 7

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est convexe si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation graphique : On remarque que lorsque λ parcourt $[0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y$ parcourt le segment $[x,y]$ (ou $[y,x]$ si $x > y$).

Ainsi, graphiquement, une fonction est convexe si son graphe est en dessous de ses sécantes (ou cordes).



Proposition 18 (Caractérisation des fonctions convexes)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On suppose que f est dérivable sur I. Alors :

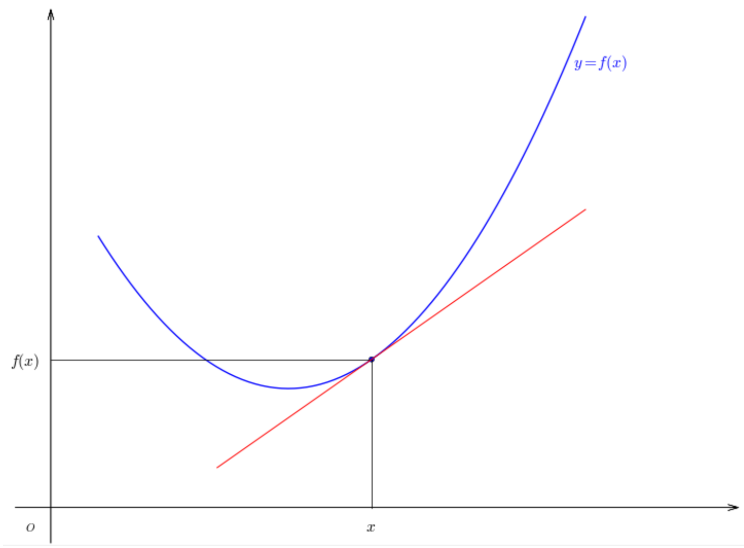
$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante}$$

- On suppose que f est deux fois dérivable sur I. Alors :

$$f \text{ est convexe} \iff f'' \text{ est positive}$$

Conséquence graphique : Le graphe d'une fonction convexe et dérivable est au dessus de ses tangentes.

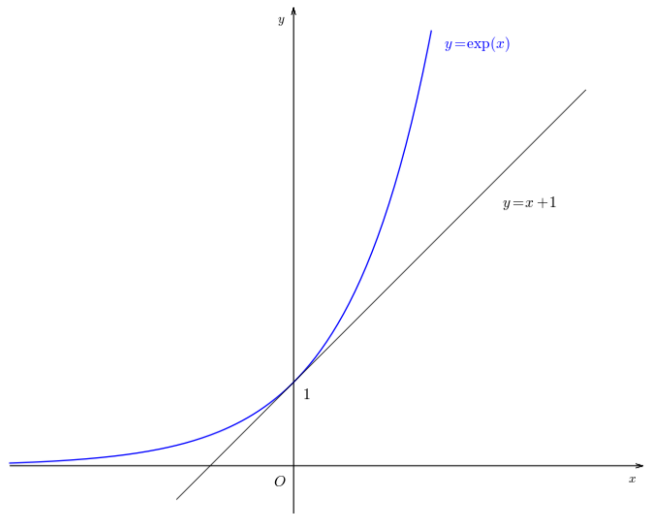
La convexité de certaines fonctions nous permet d'obtenir des inégalités utiles en analyse.



Des inégalités à connaître :

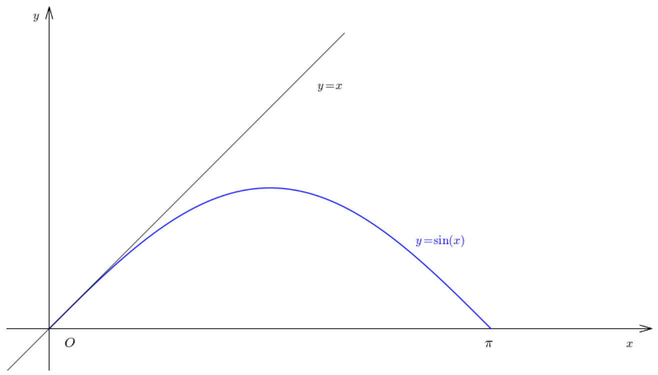
- la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$



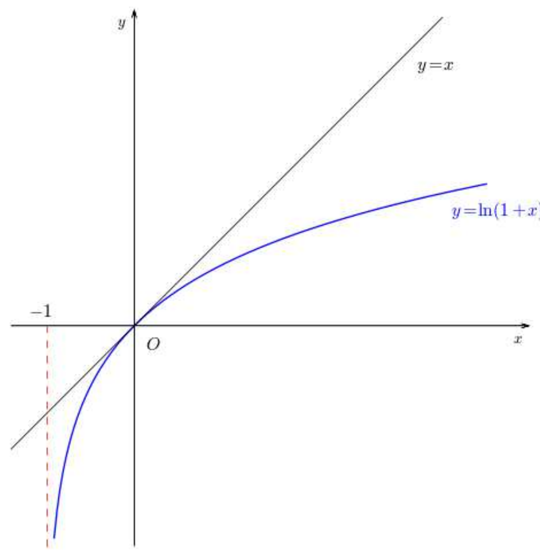
- la fonction sin est concave sur $[0, \pi]$ donc :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \sin(x) \leqslant x.$$



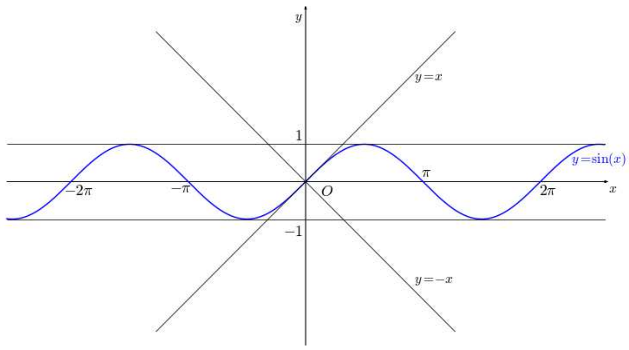
- la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ donc :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1 + x) \leqslant x.$$



- On peut aussi montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$



Exercice de colle (E2)

Démontrer que pour tous $a, b \in]1, +\infty[$, on a $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Exercice de colle (E3 - Inégalité de Jensen)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Démontrer que :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

18.2 Fonctions vectorielles

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle (on rappelle que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes).

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Si x, y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, la distance euclidienne de x à y est $d(x, y) = \|x - y\|$.

18.2.1 Limite d'une fonction vectorielle

Définition 8

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et a un point ou une extrémité de I. Soit $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\vec{f}(x)$ tend vers $\vec{\ell}$ quand x tend vers a si on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \implies \|\vec{f}(x) - \vec{\ell}\| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{\ell}$.

Illustration graphique :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\vec{f}(x)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et donc il s'écrit

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

On définit ainsi des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$. On les appelle **fonctions coordonnées** de $\vec{f}$. On note alors

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_n).$$

Proposition 19

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ et a un point ou une extrémité de I. On note $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$ et on se donne $\vec{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n)$. On a alors l'équivalence suivante.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \vec{f}(x) = \vec{\ell} \quad &\iff \quad \lim_{x \to a} ||\vec{f}(x) - \vec{\ell}|| = 0, \\ &\iff \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i. \end{aligned}$$

Et donc d'**une** limite dans $\mathbb{R}^n$, on peut se ramener à n limites dans $\mathbb{R}$.

Définition 9

- Soit $\vec{f} :]b, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. Soit $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^n$.
  On dit que $\vec{f}(x)$ tend vers $\vec{\ell}$ quand x tend vers $+\infty$ si on a

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in]b, +\infty[, \quad x \geqslant A \implies ||\vec{f}(x) - \vec{\ell}|| \leqslant \varepsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \vec{f}(x) = \vec{\ell}$.

- Soit $\vec{f} :]-\infty, b[\to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. Soit $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^n$.
  On dit que $\vec{f}(x)$ tend vers $\vec{\ell}$ quand x tend vers $-\infty$ si on a

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty, b[, \quad x \leqslant A \implies ||\vec{f}(x) - \vec{\ell}|| \leqslant \varepsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \vec{f}(x) = \vec{\ell}$.

Lorsque ces limites ont un sens, on a encore les équivalence suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} \vec{f}(x) = \vec{\ell} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad \lim_{x\to+\infty} f_i(x) = \ell_i.$$
$$\lim_{x\to-\infty} \vec{f}(x) = \vec{\ell} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad \lim_{x\to-\infty} f_i(x) = \ell_i.$$

18.2.2 Continuité

Définition 10

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} \vec{f}(x) = \vec{f}(x_0)$ autrement dit si l'on a
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \implies ||\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0)|| \leqslant \varepsilon.$$
- On dit que f est continue sur I si f est continue en chaque point de I.

En écrivant les fonctions coordonnées de $\vec{f}$, on a la proposition suivante.

Proposition 20

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ et x_0 un point de I. On note $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$. On a alors les équivalences suivantes.

$$\vec{f} \text{ est continue en } x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad f_i \text{ est continue en } x_0.$$
$$\vec{f} \text{ est continue sur } I \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad f_i \text{ est continue sur } I.$$

Ainsi, de l'étude de la continuité d'une fonction vectorielle, on est ramené à celle de la continuité de n fonctions numériques.

Espace vectoriel des fonctions continues :

On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 21

L'ensemble $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.
Ainsi, si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont continues sur I et si λ, μ sont réels, alors la fonction $\lambda\vec{f} + \mu\vec{g}$ est continue sur I.

18.2.3 Dérivabilité

Dérivabilité en un point des fonctions vectorielles :

Définition 11

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et x_0 un élément de I. On dit que $\vec{f}$ est dérivable en x_0 si

$$\frac{1}{x - x_0}(\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0))$$

admet une limite dans $\mathbb{R}^n$ quand x tend vers x_0.
Dans ce cas, on appelle vecteur dérivée de $\vec{f}$ en x_0 cette limite et on la note que $\vec{f}$ est dérivable en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0}(\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0)) = \vec{f}'(x_0) = \frac{d\vec{f}}{dx}(x_0) = D\vec{f}(x_0).$$

Proposition 22 (Développement limité d'ordre 1)

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et x_0 un élément de I.
Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1, autrement dit, s'il existe $\overrightarrow{\alpha_0}, \overrightarrow{\alpha_1}$ et une fonction $\overrightarrow{\varepsilon}$ définie au voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0 telle que :

$$\forall x \in \mathcal{V}_0, \quad \vec{f}(x) = \overrightarrow{\alpha_0} + (x - x_0)\overrightarrow{\alpha_1} + (x - x_0)\overrightarrow{\varepsilon}(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \overrightarrow{\varepsilon}(x) = 0$.

Dans ce cas, on a nécessairement $\overrightarrow{\alpha_0} = \vec{f}(x_0)$ et $\overrightarrow{\alpha_1} = \vec{f}'(x_0)$ et donc :

$$\vec{f}(x) = \vec{f}(x_0) + (x - x_0)\vec{f}'(x_0) + (x - x_0)\overrightarrow{\varepsilon}(x).$$

Preuve. Si $\vec{f}$ est dérivable en x_0 :

Si $\vec{f}(x) = \overrightarrow{\alpha_0} + (x - x_0)\overrightarrow{\alpha_1} + (x - x_0)\overrightarrow{\varepsilon}(x)$, au voisinage de 0 avec $\lim\limits_{x \to x_0} \overrightarrow{\varepsilon}(x) = 0$.

$\square$

En conséquence, comme pour les fonctions numériques, on a encore la proposition suivante.

Proposition 23

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et x_0 un élément de I. On a l'implication suivante.

$$\vec{f} \text{ dérivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{f} \text{ continue en } x_0.$$

Dérivabilité sur un intervalle et fonction dérivée :

Définition 12

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. On dit que $\vec{f}$ est dérivable sur I, si $\vec{f}$ est dérivable en chacun des points de I. Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de $\vec{f}$ l'application $\vec{f}'$ suivante.

$$\vec{f}' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ x & \longmapsto & \vec{f}'(x). \end{cases}$$

Lien avec les fonctions coordonnées :
Comme pour la continuité, on peut ramener l'étude de la dérivabilité d'une fonction vectorielle à celle de n fonctions numériques via la proposition suivante.

Proposition 24

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ et x_0 un point de I. On note $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$. On a alors les équivalences suivantes.

$$\vec{f} \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f_i \text{ est dérivable en } x_0.$$

$$\vec{f} \text{ est dérivable sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f_i \text{ est dérivable sur } I.$$

Et dans ce cas, on a pour tout $x \in I$, $f'(x) = (f_1'(x), \dots, f_n'(x))$.

Exemple 18.2. *Etudier la dérivabilité de la fonction $\vec{f}$ définie par :* $\vec{f}(x) = \left(\dfrac{\text{ch}(x)-1}{x^2}, \ln(1+x), \sqrt{1-x}\right)$.
Déterminer sa fonction dérivée.

Interprétation cinématique :
Lorsque la variable $x = t$ désigne le temps, l'application

$$t \in I \longmapsto M(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

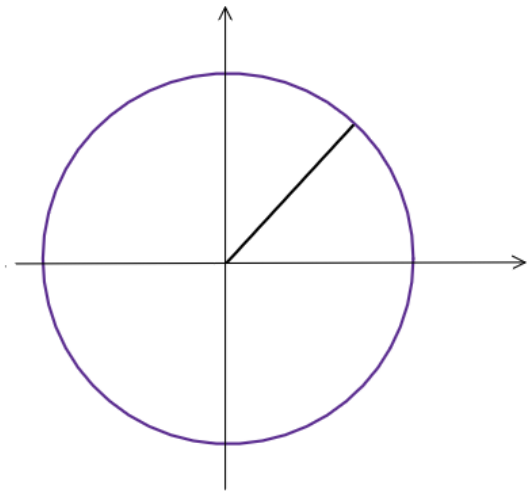
représente la position d'un point mobile $M(t)$ au cours du temps. Et dans le cas où cette application est dérivable, la fonction dérivée représente le vecteur vitesse :

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{v(t)} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Par exemple, dans le cas où $n = 2$, on considère :

$$t \longmapsto M(t) = (R\cos(t), R\sin(t)).$$

Elle est 2π périodique et donc à l'instant $t+2\pi$ le point M retrouve la position occupée à l'instant t.
Le vecteur vitesse à l'instant t est $\overrightarrow{v(t)} = (-R\sin(t), R\cos(t))$.



18.2.4 Opérations sur les dérivées

En étudiant la dérivée des fonctions coordonnées, on peut démontrer les propositions ci-dessous.

Linéarité de la dérivation :

Proposition 25

Soit $\vec{f}, \vec{g} : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles dérivables sur I et λ, μ des constantes réelles.
Alors la fonction vectorielle $\lambda\vec{f} + \mu\vec{g}$ est dérivable sur I et on a l'égalité suivante.

$$(\lambda\vec{f} + \mu\vec{g})' = \lambda\vec{f}\,' + \mu\vec{g}\,'.$$

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et dérivables sur I. Puisqu'une fonction dérivable est continue, on a l'inclusion

$$\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n).$$

Plus précisément, la proposition précédente a pour conséquence l'assertion suivante.

$$\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n).$$

Dérivée d'une composée :

Proposition 26

Soient $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle dérivable sur I.
Alors la fonction vectorielle $L \circ \vec{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dérivable sur I et on a l'égalité suivante.

$$\forall t \in I, \qquad (L \circ \vec{f})'(t) = L \circ (\vec{f}\,')(t).$$

Si A est la matrice de L dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, et si $X(t)$ est le vecteur colonne formé des coordonnées de $\vec{f}(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'égalité précédente s'écrit :

$$\forall t \in I, \qquad (A.X)'(t) = A.X'(t).$$

Preuve.

□

On étend aussi l'énoncé suivant vu en première année, aux fonctions vectorielles. Pour le démontrer, il suffit de raisonner coordonnée par coordonnée.

Proposition 27

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, φ une application dérivable de J dans I et $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle dérivable sur I. Alors la fonction vectorielle $\vec{f} \circ \varphi$ est dérivable sur J et on a l'égalité suivante.

$$\forall t \in J, \qquad (\vec{f} \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t).(\vec{f}\,' \circ \varphi)(t).$$

Composée d'une application bilinéaire et d'applications dérivables :

Proposition 28

Soit $B : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire, $\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\vec{g} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On définit l'application $B(\vec{f}, \vec{g})$ par

$$\forall t \in I, \qquad B(\vec{f}, \vec{g})(t) = B(\vec{f}(t), \vec{g}(t)).$$

- Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont dérivables en $x_0 \in I$, alors $B(\vec{f}, \vec{g})$ l'est aussi et on a
$$\Big(B(\vec{f}, \vec{g})\Big)'(x_0) = B(\vec{f}\,', \vec{g})(x_0) + B(\vec{f}, \vec{g}\,')(x_0).$$
- Si $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont dérivables sur I, alors $B(\vec{f}, \vec{g})$ l'est aussi et on a
$$\Big(B(\vec{f}, \vec{g})\Big)' = B(\vec{f}\,', \vec{g}) + B(\vec{f}, \vec{g}\,').$$

Application 1 : Si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables alors fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.

Application 2 : Si $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\vec{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont dérivables alors $\lambda.\vec{f}$ est dérivable et $(\lambda.\vec{f})' = \lambda'.\vec{f} + \lambda.\vec{f}\,'$.

Application 3 : On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel.
Si $\vec{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\vec{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont dérivables, alors $\left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle$ est dérivable et $\left(\left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle\right)' = \left\langle \vec{f}\,', \vec{g} \right\rangle + \left\langle \vec{f}, \vec{g}\,' \right\rangle$.

Application 4 : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne, on note Det le déterminant dans la base canonique.
Si $\vec{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\vec{g} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont dérivables, alors $\mathrm{Det}(\vec{f}, \vec{g})$ est dérivable et $\left(\mathrm{Det}(\vec{f}, \vec{g})\right)' = \mathrm{Det}(\vec{f}\,', \vec{g}) + \mathrm{Det}(\vec{f}, \vec{g}\,')$.

18.2.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 13

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.
• Si $\vec{f}$ est dérivable, sa fonction dérivée $\vec{f}'$ peut, elle aussi, être dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée de $\vec{f}'$ est appelée fonction dérivée seconde de $\vec{f}$ et on la note $\vec{f}''$, $\vec{f}^{(2)}$, $\dfrac{d^2\vec{f}}{dx^2}$ ou encore $D^2\vec{f}$.
• Par récurrence, on définit de même les fonctions dérivées succesives de $\vec{f}$ sur I lorsqu'elles existent. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\vec{f}^{(k)}$, $\dfrac{d^k\vec{f}}{dx^k}$ ou encore $D^k\vec{f}$ la dérivée k-ième de $\vec{f}$ sur I.

Définition 14

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et $p \in \mathbb{N}^*$.
• On dit que $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si $\vec{f}$ admet une dérivée à l'ordre k sur I et si $\vec{f}^{(k)}$ est continue sur I.
• On dit que $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si $\vec{f}$ admet une dérivée à tout ordre sur I.

Proposition 29

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. On a alors les équivalences suivantes.

$$\vec{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad f_i \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I.$$

$$\vec{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad f_i \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I.$$

Et dans ce cas, on a $\vec{f}^{(k)} = (f_1^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)})$.

On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ celui des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut montrer que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$.

On peut aussi écrire les formules de Leibniz pour la composée d'une application bilinéaire et d'applications de classe $\mathcal{C}^n$. La démonstration est identique à celle des fonctions numériques.

- Soient $\vec{u} : I \to \mathbb{R}^m$ une fonction vectorielle et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique toutes deux de classe $\mathcal{C}^n$. Alors la fonction vectorielle $\lambda.\vec{u}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et l'on a
$$(\lambda.\vec{u})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{(k)}.\vec{u}^{(n-k)}.$$
- Soient $\vec{u}, \vec{v} : I \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^n$. Alors la fonction numérique $\vec{u}.\vec{v}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et l'on a
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle \vec{u}^{(k)}, \vec{v}^{(n-k)} \rangle.$$
- Soient $\vec{u}, \vec{v} : I \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^n$. Alors la fonction $\mathrm{Det}(u, v)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et l'on a
$$(\mathrm{Det}(u, v))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Det}(\vec{u}^{(k)}, \vec{v}^{(n-k)}).$$