Proposition 4

Soit ω un réel **non nul**. Les solutions de $(\mathcal{E})$: $y'' - \omega^2 y = 0$ sont les (deux façons différentes de les décrire) :

- $y : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\,\mathrm{ch}(\omega t) + B\,\mathrm{sh}(\omega t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
- $y : t \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{\omega t} + De^{-\omega t}$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$

17.2.2 Recherche de solutions particulières

On s'intéresse ici à une équation différentielle du type suivant.

$$(\mathcal{E}) : \quad y'' + ay' + by = P(t)e^{\alpha t}$$

avec P polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.
L'équation caractéristique associée est

$$(EC) : \ r^2 + ar + b = 0.$$

- Si α n'est pas solution de (EC), on peut trouver une solution de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ où $Q(t)$ est un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P)$.
- Si α est solution de (EC), on ajoute au degré de Q autant que sa multiplicité.

Exemple 17.2. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_1) : y' = 2y + t + 1$.

$(EC) : r - 2 = 0$ Or $(\mathcal{E}_1) : y' - 2y = t + 1 = (t+1)e^{0.t}$ $0 \neq 2$.

On cherche une solution sous la forme : $y_p(t) = at + b$.

$y_p \in \mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_1) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \ y'(t) - 2y(t) = t + 1$

$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad a - 2(at + b) = t + 1$

$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad -2at + a - 2b = t + 1$

Il suffit de choisir $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $(-2a = 1$ et $a - 2b = 1)$ ie $\left(a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{3}{4}\right)$

D'où $\boxed{y_p : t \in \mathbb{R} \longrightarrow -\frac{t}{2} - \frac{3}{4}}$

Exemple 17.3. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_1) : y' + y = 2e^{-t}$.

$(E) : r - 1 = 0$ Or $(\mathcal{E}_2) : y' + y = 2e^{-t}$ ($\alpha = -1$ racine simple de (EC))
$= P(t)e^{-t}$

$\deg(P) = 0$ on cherche donc une solution sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{-t}$ avec $\deg(Q) = 1$.

On pose $y_p(t) = (at + \underbrace{\cancel{b}}_{\text{INUTILE}})e^{-t}$ alors $y_p'(t) = (-at + a - b)e^{-t}$

Solution de $\mathcal{H}_2 : y' + y = 0$

$y_p \in \mathrm{Sol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_2) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \ y'(t) + y(t) = 2e^{-t}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad (-\cancel{at} + a - \cancel{b})e^{-t} + (\cancel{at} + \cancel{b})e^{-t} = 2e^{-t}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \ ae^{-t} = 2e^{-t} \iff a = 2.$

On trouve $\boxed{y_p : t \in \mathbb{R} \longmapsto 2te^{-t}}$

<u>Rem</u> : si $y_0(t) = be^{-t}$
y_0 solution de $\mathcal{H}_2 : y' + y = 0$
Donc be^{-t} va disparaître dans $(\mathcal{E}_1)$. Il est inutile de le prendre.

Exemple 17.4. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_3)$: $y'' - 3y' + 2y = t^2 + 1$.

(EC) : $r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$ On cherche une solution sous la forme : $y_p(t) = (at^2+bt+c)e^{0t} = (at^2+bt+c)$.

$y_p \in Sol_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_3) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t^2+1$
$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 2a - 3(2at+b) + 2(at^2+bt+c) = t^2+1$.

Il suffit de choisir $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 2a = 1 \\ -6a + 2b = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 1 \end{cases}$.

On trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ et $c = \frac{9}{4}$. $\boxed{\text{D'où } y_p : t \longmapsto \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 9}$

Exemple 17.5. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_4)$: $y'' - 3y' + 2y = te^t$.

(EC) : $(r-2)(r-1) = 0$ $Sol_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_4^H) = Vect\{t \mapsto e^t, t \mapsto e^{2t}\}$. va disparaître

On cherche une solution sous la forme $y_p(t) = (at^2 + bt + \cancel{c})e^t$.

INUTILE

$y_p \in Sol_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_4) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = te^t$
$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ (at^2 + (b+4a)t + 2(b+a))\cancel{e^t} - 3(at^2 + (b+2a)t + b)\cancel{e^t} + 2(at^2+bt)\cancel{e^t} = t\cancel{e^t}$ $(e^t \neq 0)$
$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 0t^2 - 2at + 2a - b = t$.

Il suffit de choisir $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-2a = 1$ et $2a - b = 0$.

On trouve $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$ d'où $\boxed{y_p : t \longmapsto -(\frac{1}{2}t^2 + t)e^t}$

Remarque : Lorsque le second membre est de la forme $\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ et que $i\omega$ n'est pas solution de (EC), on cherchera une solution sous la forme

$$y_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Exemple 17.6. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_5)$: $y'' - y = \sin(t)$. $= \mathrm{Im}(e^{it})$. $\omega = 1$.

(EC) : $r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$ (i n'est pas racine).

On cherche une solution sous la forme $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$.

$y_p \in Sol_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_5) \iff \forall t \in \mathbb{R}\ \ y''(t) - y(t) = \sin(t)$
$\iff \forall t \in \mathbb{R}\ \ (-A\cos(t) - B\sin(t)) - (A\cos(t) + B\sin(t)) = \sin(t)$
$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ -2A\cos(t) - 2B\sin(t) = \sin(t)$.

Il suffit de choisir $A = 0$ et $B = -\frac{1}{2}$. $\boxed{y_p : t \longmapsto -\frac{1}{2}\sin(t)}$