Chapitre 17

Équation différentielles linéaires scalaires

17.1 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Définition 1

Soient $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des applications continues sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante.

$$(\mathcal{E}) : \quad ay' + by = c.$$

Une solution de $(\mathcal{E})$ est un couple (J, y) où $J \subset I$ est un intervalle et $y : J \to \mathbb{K}$ est dérivable et vérifie :

$$\forall t \in J, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

On dit aussi que y est une solution sur J de $(\mathcal{E})$. Les solutions sont parfois identifiées à leurs graphes et appelées courbes intégrales associées à $(\mathcal{E})$.
On dit que $(\mathcal{E})$ est homogène si $c = 0$ et on note $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

$$(\mathcal{E}_0) : \quad ay' + by = 0.$$

On dit que $(\mathcal{E})$ est à coefficients constants si a et b sont des fonctions constantes.

• **Cas où a ne s'annule pas sur I :** On peut alors diviser l'équation par a. Les fonctions $\alpha = \dfrac{b}{a}$ et $\beta = \dfrac{c}{a}$ sont alors continues sur I et on est ramené aux équations différentielles suivantes.

$$(\mathcal{E}) : \; y' + \alpha y = \beta \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{E}_0) : \; y' + \alpha y = 0.$$

• **Problème de Cauchy.** C'est un sytème de la forme

$$\begin{cases} y' + \alpha y = \beta, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \qquad \text{où } t_0 \in I \text{ et } y_0 \in \mathbb{K} \text{ sont donnés.}$$

Proposition 1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Si α et β sont continues sur I, alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + \alpha y = \beta, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.
Géométriquement : les courbes intégrales ne se coupent pas.

Illustration graphique :

• **Résolution de** $(\mathcal{E}_0)$.

Soit A une primitive de α sur I (elle existe bien car α est continue sur I). On a alors les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, \quad y'(t)+\alpha(t)y(t)=0 \quad &\iff \quad \forall t \in I, \quad e^{A(t)}y'(t)+A'(t)e^{A(t)}y(t)=0,\\
&\iff \quad \forall t \in I, \quad \left(e^{A(t)}y(t)\right)'=0,\\
&\iff \quad \exists C \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad e^{A(t)}y(t)=C,\\
&\iff \quad \exists C \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad y(t)=Ce^{-A(t)}.
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc les $y : t \in I \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante. L'ensemble des solutions est alors la droite vectorielle engendrée par $t \mapsto e^{-A(t)}$.

• **Résolution de** $(\mathcal{E})$.

Soit y_1 une solution particulière (le théorème de Cauchy-Lipschitz en donne l'existence). On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, \quad y'(t)+\alpha(t)y(t)=\beta(t) \quad &\iff \quad \forall t \in I, \quad y'(t)+\alpha(t)y(t)=\beta(t)=y_1'(t)+\alpha(t)y_1(t),\\
&\iff \quad \forall t \in I, \quad (y-y_1)'(t)+\alpha(t)(y-y_1)(t)=0.
\end{aligned}$$

Ainsi, y est une solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si $y-y_1$ est une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur I.

Les solutions sont donc les $y : t \in I \mapsto Ce^{-A(t)}+y_1(t)$ où C est une constante numérique. L'ensemble des solutions est alors une droite affine dirigée par $t \mapsto e^{-A(t)}$.

Remarque : pour trouver une solution particulière, on peut faire « varier la constante C » et chercher une solution sous la forme $y_1(t)=C(t)e^{-A(t)}$ où C est dérivable sur I.

• **Problèmes de raccordements :**

Si a s'annule un nombre fini de fois sur I, on détermine dans un premier temps les solutions sur les intervalles où a ne s'annule pas. On cherche ensuite les solutions définies sur I tout entier (il n'en existe pas toujours). On cherche alors à raccorder les fonctions trouvées en première étape, pour obtenir une fonction **continue, dérivable sur** I. On pourra pour cela soit revenir à la définition de continuité et de dérivabilité, soit utiliser un développement limité à l'ordre 1 en les points où a s'annule.

Remarques : Si a s'annule sur I,
- le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pas valable sur I mais seulement sur chacun des intervalles où a ne s'annule pas,
- bien que l'équation différentielle soit d'ordre 1, l'espace affine (espace vectoriel translaté d'un vecteur) des solutions sur I peut-être de n'importe quelle dimension, il peut même être vide.

Exemple 17.1. *Résoudre* $\mathcal{E}$: $ty'+(1-t)y=1$.

• **Résolution de l'équation homogène :**

• Rédaction 1 : Recherche d'une solution particulière et application du cours

• Rédaction 2 : Raisonnement par équivalences

- **Etude des raccords :**

17.2 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

17.2.1 Résolution de l'équation homogène

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle suivante.

$$(\mathcal{E}_{\mathbb{K}}) \quad : \quad y'' + ay' + by = 0$$

Dans la suite, on appelle **équation caractéristique** associée à $(\mathcal{E}_{\mathbb{K}})$, l'équation de degré 2 suivante :

$$(EC) : \quad r^2 + ar + b = 0,$$

et on note $\Delta = a^2 - 4b$ son discrimant.

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

- $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ alors (EC) : $r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = 0$ possède une solution double $r_0 \in \mathbb{C}$, et les solutions (complexes) de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto (At + B)e^{r_0 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) = \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ate^{r_0 t} + Be^{r_0 t} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{C} \Big\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \Big\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto te^{r_0 t},\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_0 t} \Big\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$ alors l'équation $z^2 = \Delta$ possède deux solutions distinctes $+\delta$ et $-\delta$ dans $\mathbb{C}$ (ce sont les *racines carrées* de Δ, mais attention la notation $\sqrt{\ }$ est exclusivement réservée aux réels positifs). L'équation $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = 0$ possède alors deux solutions (complexes) distinctes :

$$r_1 = \frac{-a + \delta}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a - \delta}{2}.$$

Les solutions (complexes) de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_\mathbb{C}) = \left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{C} \right\} = \text{Vect}_\mathbb{C}\left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_1 t},\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_2 t} \right\}.$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

On peut toujours étudier les fonctions **complexes** solutions et utiliser le premier cas. Mais si l'on cherche les fonctions **réelles** solutions, trois cas seront à distinguer.

- $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = 0$ possède une solution double $r_0 \in \mathbb{R}$, et les solutions réelles de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto (At + B)e^{r_0 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_\mathbb{R}) = \left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ate^{r_0 t} + Be^{r_0 t} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_\mathbb{R}\left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto te^{r_0 t},\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_0 t} \right\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = 0$ possède alors deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et les solutions réelles de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_\mathbb{R}) = \left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}_\mathbb{R}\left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_1 t},\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{r_2 t} \right\}.$$

- $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ alors $(EC) : r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = 0$ possède deux racines complexes distinctes et conjuguées $z = \alpha \pm i\theta$.
Les solutions complexes de $(\mathcal{E}_\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{(\alpha + i\theta)t} + Be^{(\alpha - i\theta)t} = e^{\alpha t}(Ae^{i\theta t} + Be^{-i\theta t})$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
Les solutions réelles de $(\mathcal{E}_\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ sont les $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha t}(C\cos(\theta t) + D\sin(\theta t)$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\text{ol}(\mathcal{E}_\mathbb{R}) &= \left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{\alpha t}\cos(\theta t) + Be^{\alpha t}\sin(\theta t) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}_\mathbb{R}\left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\theta t),\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha t}\sin(\theta t) \right\} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a la proposition suivante.

Proposition 2

Pour tous $a, b \in \mathbb{K}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_\mathbb{K}) : \quad y'' + ay' + by = 0$$

est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2.

On retiendra enfin le résultat particulier suivant, utile dans d'autres disciplines scientifiques.

Proposition 3

Soit ω un réel **non nul**. Les solutions de $(\mathcal{E}) : \ y'' + \omega^2 y = 0$ sont les (trois façons différentes de les décrire) :

- $y : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
- $y : t \in \mathbb{R} \longmapsto C\cos(\omega t + \varphi)$ avec $(C, \varphi) \in \mathbb{R}^2$
- $y : t \in \mathbb{R} \longmapsto D\sin(\omega t + \psi)$ avec $(D, \psi) \in \mathbb{R}^2$

Proposition 4

Soit ω un réel **non nul**. Les solutions de $(\mathcal{E})$: $y'' - \omega^2 y = 0$ sont les (deux façons différentes de les décrire) :

- $y : t \in \mathbb{R} \longmapsto A\,\mathrm{ch}(\omega t) + B\,\mathrm{sh}(\omega t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
- $y : t \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{\omega t} + De^{-\omega t}$ avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$

17.2.2 Recherche de solutions particulières

On s'intéresse ici à une équation différentielle du type suivant.

$$(\mathcal{E}) : \quad y'' + ay' + by = P(t)e^{\alpha t}$$

avec P polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.
L'équation caractéristique associée est

$$(EC) : \; r^2 + ar + b = 0.$$

- Si α n'est pas solution de (EC), on peut trouver une solution de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ où $Q(t)$ est un polynôme tel que $\deg(Q) = \deg(P)$.
- Si α est solution de (EC), on ajoute au degré de Q autant que sa multiplicité.

Exemple 17.2. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_1) : y' = 2y + t + 1$.

Exemple 17.3. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_1) : y' + y = 2e^{-t}$.

Exemple 17.4. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_3) : y'' - 3y' + 2y = t^2 + 1$.

Exemple 17.5. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_4) : y'' - 3y' + 2y = te^t$.

Remarque : Lorsque le second membre est de la forme $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ et que $i\omega$ n'est pas solution de (EC), on cherchera une solution sous la forme

$$y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Exemple 17.6. *Chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_5) : y'' - y = \sin(t)$.

17.3 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 (cas général)

17.3.1 Structure des solutions

Définition 2

Soient $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des applications continues sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante.

$$(\mathcal{E}) : \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t).$$

Une solution de $(\mathcal{E})$ est un couple (J, y) où $J \subset I$ est un intervalle et $y : J \to \mathbb{K}$ est deux fois dérivable et vérifie :

$$\forall t \in J, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t).$$

On dit aussi que y est une solution sur J de $(\mathcal{E})$. Les solutions sont parfois identifiées à leurs graphes et appelées courbes intégrales associées à $(\mathcal{E})$.
On dit que $(\mathcal{E})$ est homogène si $d = 0$ et on note $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

$$(\mathcal{E}_0) : \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0.$$

On dit que $(\mathcal{E})$ est à coefficients constants si a, b et c sont des fonctions constantes.

Proposition 5 (Théorème de Cauchy Lipschitz linéaire)

Si a, b, c, d sont **continues** sur I et si a **ne s'annule pas sur** I alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I.
Géométriquement : les courbes intégrales ne peuvent pas se couper avec une même tangente.

Soit $J \subset I$ un intervalle, on note $\mathcal{S}\mathrm{ol}_J(\mathcal{E})$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur J et $\mathcal{S}\mathrm{ol}_J(\mathcal{E}_0)$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur J. Sous les **mêmes hypothèses que dans le théorème de Cauchy-Lipschitz**, on a la proposition suivante qui précise la structure des ensembles solutions.

Proposition 6 (Théorème de structure des solutions)

L'ensemble $\mathcal{S}\mathrm{ol}_J(\mathcal{E}_0)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 2 et pour tout $t_0 \in J$, l'application

$$\theta_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}\mathrm{ol}_J(\mathcal{E}_0) & \longrightarrow & \mathbb{K} \times \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Et donc $\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_J(\mathcal{E}_0) \text{ est un espace vectoriel de dimension 2.}}$

La solution générale de $(\mathcal{E})$ est somme d'une solution particulière et de la solution générale de $(\mathcal{E}_0)$.

Preuve. On montre d'abord que $\mathcal{S}\mathrm{ol}_J(\mathcal{E}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(J, \mathbb{K})$.

□

Exercice de colle (E1)

Trouver les fonctions puissances solutions de $(\mathcal{E}_0) : x^2y'' + xy' - y = 0$.
En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}) : x^2y'' + xy' - y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

17.3.2 Recherche de solutions développables en série entière

Exercice de colle (E2)

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $xy'' + 2y' - xy = 0$.
Trouver les solutions f de $(\mathcal{E})$ développables en série entière au voisinage de 0 et telles que $f(0) = 1$, puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

17.3.3 Résolution par la méthode de Lagrange (variation de la constante)

En dehors du cas où a, b, c sont constantes, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Cependant, dans le cas particulier suivant, on peut se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1, que l'on sait résoudre.

Soit $(\mathcal{E}) :\ ay'' + by' + cy = d$ où $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ sont continues et où a ne s'annule pas sur I.
On suppose que :
on dispose d'une solution particulière y_1 de $(\mathcal{E}_0) :\ ay'' + by' + cy = 0$, qui **ne s'annule pas sur I.**

On a donc :

$$\forall t \in I : \qquad \begin{array}{l} * \ \ y_1(t) \neq 0, \\ * \ \ a(t)y_1''(t) + b(t)y_1'(t) + c(t)y_1(t) = 0. \end{array}$$

De plus, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto cy_1(t)$ est aussi solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur I. Pour résoudre $(\mathcal{E})$, on « fait varier cette constante ». Soit $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I. On pose $z = \dfrac{y}{y_1}$, c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \qquad y(t) = z(t)y_1(t).$$

Alors z est aussi deux fois dérivable sur I et on a les égalités suivantes. $\begin{array}{l} y = zy_1, \\ y' = z'y_1 + zy_1', \\ y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''. \end{array}$

$$\begin{array}{lll} \text{Ainsi : } y \text{ solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } I & \iff & a(z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'') + b(z'y_1 + zy_1') + c(zy_1) = d, \\ & \iff & ay_1z'' + (2ay_1' + by_1)z' + \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0}z = d, \\ & \iff & ay_1(z')' + (2ay_1' + by_1)z' = d. \end{array}$$

En posant $Z = z'$, on est donc amené à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante.

$$(\mathcal{E}_1) : \quad ay_1Z' + (2ay_1' + by_1)Z = d.$$

Exemple 17.7. *Résoudre sur* $I =]0, +\infty[$ *ou* $]-\infty, 0[$ *l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{E}) :\ ty'' - y' + (1-t)y = 2e^{-t}.$$

On pourra d'abord trouver une solution particulière simple.