Chapitre 16

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

16.1 Norme sur un espace vectoriel

16.1.1 Définitions

Définition 1

On appelle norme sur E, toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(1) positivité : $\forall x \in E, \quad N(x) \geqslant 0$,

(2) caractère défini : $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \implies x = 0$,

(3) homogénéité : $\forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,

(4) inégalité triangulaire : $\forall x \in E, \ \forall y \in E, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Remarques :

- Dans la troisième assertion, si l'on choisit $\lambda = 0$, on obtient $N(0) = 0$.
- Pour montrer qu'un vecteur de E est nul, il faut et il suffit de démontrer que sa norme est nulle.

Définition 2

On appelle espace vectoriel normé tout espace vectoriel muni d'une norme N.
On note parfois $N(x) = ||x||$.

Exemple 16.1. *Si $E = \mathbb{R}$, on peut considérer l'application N suivante.*

$$N : x \in \mathbb{R} \longmapsto N(x) = |x|$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une norme. Ainsi, $\mathbb{R}$, muni de la valeur absolue, est un espace vectoriel normé.

Définition 3

On appelle distance sur E, toute application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(1) $\forall (x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) \geqslant 0$,

(2) $\forall (x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = 0 \implies x = y$,

(3) $\forall (x,y) \in E \times E, \qquad d(x,y) = d(y,x)$,

(4) $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Proposition 1

On suppose que E est un espace vectoriel normé et on note $N(x) = ||x||$.
L'application suivante est une distance sur E.

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & ||x - y|| \end{array} \right.$$

On l'appelle **distance associée à N sur E.**

Preuve. On vérifie les quatre assertions qui définissent une distance.
Soient x, y et z des éléments de E. On a :

(1) $d(x, y) = ||x - y|| \geqslant 0$,
(2) $d(x, y) = 0 \implies ||x - y|| = 0 \implies x - y = 0 \implies x = y$,
(3) $d(x, y) = ||x - y|| = ||(-1).(y - x)|| = |-1|.||y - x|| = d(y, x)$,
(4) $d(x, z) = ||x - z|| = ||(x - y) + (y - z)|| \leqslant ||x - y|| + ||y - z|| = d(x, y) + d(y, z)$.

□

Exemple 16.2. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé. Démontrer que* $\forall (x, y) \in E, \ \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\|$.

16.1.2 Norme associée à un produit scalaire

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel d'un produit scalaire noté $\langle \ , \ \rangle$. On rappelle quelques énoncés vus dans les chapitres précédents.

Définition 4 (Produit scalaire)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

vérifiant les propriétés suivantes.

(1) φ est bilinéaire,
(2) φ est symétrique,
(3) φ est définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in E, \varphi(x, x) \geqslant 0$ et $\varphi(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Proposition 2

Soit $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $x \in E \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E, appelée **norme euclidienne associée au produit scalaire** $\langle \ , \ \rangle$.

Exemple 16.3. • *Sur* $\mathbb{R}^p$ *muni du produit scalaire usuel, l'application suivante est une norme :*

$$N : x = (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}.$$

• *Sur* $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire usuel, l'application suivante est une norme :*

$$N : M \longmapsto \sqrt{\langle M, M \rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(M^T M)}.$$

• *Sur* $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire usuel, l'application suivante est une norme :*

$$N : f \longmapsto \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}.$$

16.1.3 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$.

Proposition 3

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on pose $N_1(x) = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$.

Alors, l'application N_1 est une norme sur $\mathbb{K}^p$.

Preuve. (D1)

□

Proposition 4

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on pose $N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$.

Alors, l'application N_2 est une norme sur $\mathbb{K}^p$.

Preuve. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on reconnaît la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on adapte la preuve :

(1) et (2) : Pour tout $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, on a $N_2(z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |z_i|^2} \geqslant 0$. Et si $N_2(z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |z_i|^2} = 0$ (somme nulle de nombres positifs) alors pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|z_i| = 0$ et donc $z_i = 0$. On a bien $z = 0$.

(3) : Pour tout $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$N_2(\lambda z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |\lambda z_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |\lambda|^2.|z_i|^2} = \sqrt{|\lambda|^2} N_2(\lambda z) = |\lambda| N_2(\lambda z).$$

(4) : Soient $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ et $z' = (z'_1, \dots, z'_p) \in \mathbb{C}^p$. On montre que $N_2(z + z')^2 \leqslant (N_2(z) + N_2(z'))^2$.
D'une part, on a les égalités suivantes.

$$N_2(z + z')^2 = \sum_{i=1}^{p} |z_i + z'_i|^2 \ = \ \sum_{i=1}^{p} (z_i + z'_i)(\bar{z}_i + \bar{z'_i}) \ = \ \underbrace{\sum_{i=1}^{p} |z_i|^2}_{=N_2(z)^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} |z'_i|^2}_{=N_2(z')^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} (z_i \bar{z'_i} + \bar{z}_i z'_i)}_{=A(z,z') \in \mathbb{R}}$$

D'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = N_2(z + \lambda z')^2 = N_2(z)^2 + \lambda A(z, z') + \lambda^2 N_2(z')^2 \geqslant 0$. C'est un polynôme à coefficients réels, de degré 2 (sauf si $z' = 0$, mais dans ce cas, il n'y a plus rien à démontrer) et de signe constant sur $\mathbb{R}$. Et donc son discriminant est négatif ou nul :

$$\Delta = A(z, z')^2 - 4N_2(z)^2 N_2(z')^2 \leqslant 0.$$

On a $A(z, z') \leqslant |A(z, z')| \leqslant 2N_2(z)N_2(z')$ donc $N_2(z+z')^2 \leqslant N_2(z)^2 + 2N_2(z)N_2(z') + N_2(z')^2 = (N_2(z) + N_2(z'))^2$, ce qu'on voulait démontrer. □

Proposition 5

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on pose $N_\infty(x) = \max\limits_{i \in \{1, \dots, p\}} |x_i|$.
Alors, l'application N_∞ est une norme sur $\mathbb{K}^p$.

Preuve. (D1)

□

16.1.4 Normes usuelles sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Proposition 6

Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, on pose $\mathcal{N}_1(f) = \|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)| dt$.
Alors, l'application $\mathcal{N}_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ appelée **norme de la convergence en moyenne**.

Preuve. (D2)

□

Rappels sur la borne supérieure

Proposition 7 (borne supérieure)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On appelle, si elle existe, borne supérieure de A, le plus petit de ses majorants. On la note $\sup(A)$.
- Si A est une partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$, alors A possède une borne supérieure.

Proposition 8

Soit A une non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure M de A est complètement définie par l'une des assertions suivantes (équivalentes entre elles) :

(1) Pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant M$, et il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = M$.

(2) Pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant M$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon \leqslant a$.

On pourra utiliser le lemme suivant sans le démontrer (la preuve est dans le chapitre *Suites et séries de fonctions*)

Lemme

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée de $\mathbb{R}$, et si λ est un réel **positif** alors :

$$\sup(\lambda.A) = \sup_{a\in A}(\lambda a) = \lambda \sup(A).$$

Proposition 9

Pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, on pose $\mathcal{N}_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Alors, l'application $\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ appelée **norme uniforme**.

Preuve. (D2)

□

16.1.5 Comparaison de normes

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux normes N et N'. On dit que

- La norme N **domine** la norme N', s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad N'(x) \leqslant kN(x).$$

- Les normes N et N' sont **équivalentes** si N domine N' et si N' domine N, autrement dit, s'il existe $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \qquad k_1 N(x) \leqslant N'(x) \leqslant k_2 N(x).$$

Exercice de colle (E1)

Soit $E = \mathbb{K}^n$, on note les normes N_1, N_2 et N_∞ les normes usuelles. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant nN_\infty(x).$$

Exercice de colle (E3)

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on note les normes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ les normes usuelles. Montrer que $\mathcal{N}_2$ domine $\mathcal{N}_1$, que $\mathcal{N}_\infty$ domine $\mathcal{N}_2$, mais que $\mathcal{N}_\infty$ n'est pas dominée par $\mathcal{N}_1$.

- $\mathcal{N}_2$ domine $\mathcal{N}_1$ et plus précisément, on a :

$$\forall f \in E, \quad \mathcal{N}_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}\, \mathcal{N}_2(f).$$

En effet : si $f \in E$ alors

- $\mathcal{N}_\infty$ domine $\mathcal{N}_2$ et plus précisément, on a :

$$\forall f \in E, \quad \mathcal{N}_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\, \mathcal{N}_\infty(f).$$

En effet :

Cependant, on peut voir qu'il n'y a aucune équivalence entre les normes $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$.
Par exemple, on montre par l'absurde que $\mathcal{N}_\infty$ n'est pas dominée par $\mathcal{N}_1$.

Supposons au contraire qu'il existe $k > 0$ tel que $\mathcal{N}_\infty \leqslant k\mathcal{N}_1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie par $f_n(t) = (t-a)^n$.

Calculons $\mathcal{N}_1(f_n)$:

Calculons $\mathcal{N}_\infty(f_n)$:

Obtenons une contradiction :

L'exemple précédent montre que toutes les normes d'un espace vectoriel ne sont pas équivalentes. On admettra cependant la proposition suivante.

Proposition 10

Sur un espace vectoriel E de **dimension finie** toutes les normes sont équivalentes.

16.1.6 Normes subordonnées (hors-programme)

Dans ce paragraphe, on se donne une norme $\| \ \|$ sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et à partir de cette norme, on en construit une sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appelée norme subordonnée à $\| \ \|$.

Exercice de colle (E3)

On considère l'application $\mathcal{N} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{N}(A) = \sup\limits_{\|X\| \leqslant 1} \|AX\|$.

1. Justifier l'existence de $\mathcal{N}(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
3. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathcal{N}(AB) \leqslant \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.

On dit alors que $\mathcal{N}$ est une norme d'algèbre.

16.2 Premières notions de topologie

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé. On notera $\|x\|$ la norme d'un vecteur x de E.

16.2.1 Boules, sphères

Définition 6

Soit $a \in E$ et $r > 0$. On définit :

- Boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) < r\} = \{x \in E,\ ||x-a|| < r\}.$$

- Boule fermée de centre a et de rayon r :

$$\overline{B}(a,r) = B_f(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) \leqslant r\} = \{x \in E,\ ||x-a|| \leqslant r\}.$$

- Sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) = r\} = \{x \in E,\ ||x-a|| = r\}.$$

Exemple 16.4. *Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni successivement des normes N_1, N_2, N_∞, on pose $a = (0,0) = 0$.*

Cas où $N = N_1$:
on a $(x,y) \in \bar{B}(0,r) \Longleftrightarrow |x| + |y| \leqslant r$.

Cas où $N = N_2$:
on a $(x,y) \in \bar{B}(0,r) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

Cas où $N = N_\infty$:
on a $(x,y) \in \bar{B}(0,r) \Longleftrightarrow \max\{|x|,|y|\} \leqslant r$.

16.2.2 Parties bornées

Définition 7

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est **bornée**, s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \qquad ||x|| \leqslant M,$$

autrement dit tel que $A \subset \overline{B}(0, M)$.

Illustration graphique :

Remarque importante :

La définition de partie bornée dépend du choix de la norme sur E. Ainsi, une partie A peut être bornée pour une norme N et pas bornée pour une autre norme N'.

On a cependant de manière immédiate la proposition suivante.

Proposition 11

• Soient N et N' sont deux normes **équivalentes** d'un espace vectoriel E et A une partie de E alors :

$$A \text{ est une partie bornée de } (E, N) \iff A \text{ est une partie bornée de } (E, N')$$

• Si E est de dimension finie, le caractère borné d'une partie ne dépend pas de la norme choisie sur E.

Exercice de colle (E1)

Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule $B(a, r)$ est une partie bornée de E.

Soit $x \in B(a, r)$, on a donc $||a - x|| < r$. Ainsi, on a les majorations suivantes.

$$\begin{array}{rcl} ||x|| & = & ||(x-a) + a||, \\ & \leqslant & ||x - a|| + ||a||, \\ & \leqslant & r + ||a||. \end{array}$$

Ainsi, si l'on pose $M = r + ||a||$, on a bien :

$$\forall x \in B(a, r), \quad ||x|| \leqslant M.$$

Donc $B(a, r)$ est une partie bornée de E.

Définition 8

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On dit que la suite vectorielle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée si l'ensemble de ses valeurs est une partie bornée de E, autrement dit si :

$$\exists M > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\| \leqslant M.$$

Définition 9

Soient A un ensemble, E un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application de A dans E. On dit que f bornée si l'ensemble de ses valeurs est une partie bornée de E, autrement dit si :

$$\exists M > 0, \ \forall x \in A, \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

Exemple 16.5. *On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme 1.*
Montrer que la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (e^{-x^2} + \sin(y), \operatorname{Arctan}(x+y))$ est bornée.

Remarque : On note $\mathcal{B}(A,E)$ l'ensemble des applications $f : A \longrightarrow E$ qui sont bornées et pour tout $f \in \mathcal{B}(A,E)$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|.$$

Montrons qu'il s'agit d'une norme.

16.2.3 Parties convexes

Définition 10

Soient A une partie de E. On dit que A est **convexe** si :

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad [a,b] \subset A$$

c'est-à-dire :

$$\forall (a,b) \in A^2,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda a + (1-\lambda) b \in A.$$

Illustration graphique :

$$\begin{aligned} x \in (a,b) &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{bx} = \lambda \overrightarrow{ba} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x - b = \lambda(a-b) \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda a + b(1-\lambda) \end{aligned}$$

$$x \in [a,b] \iff \exists \lambda \in [0,1],\ x = \lambda a + b(1-\lambda)$$

Exercice de colle (E2)

Une boule fermée (ou ouverte) est une partie convexe.

16.3 Suites d'un espace vectoriel normé

16.3.1 Définitions

Définition 11

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad n \geqslant N \implies ||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon.$$

Le vecteur ℓ est appelé **vecteur limite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Exemple 16.6. *On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne usuelle et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n}\right).$$

On a alors $||u_n||^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4^n} \leqslant \frac{2}{n^2}$ dès que $n \geqslant 2$.
Ainsi $||u_n - (0,0)|| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0$. Par définition de cette limite, on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad n \geqslant N \implies \frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Les majorations précédentes donnent bien $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \ : \quad n \geqslant N \implies ||u_n - (0,0)|| \leqslant \varepsilon$.
C'est la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = (0,0)$.

On remarque que, par définition de la limite, on a l'équivalence suivante.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} ||u_n - \ell|| = 0$$

Remarque importante :

La notion de convergence dépend du choix de la norme sur E. Ainsi, une suite peut être convergente pour une norme N et divergente pour une autre norme N'.

On a cependant de manière immédiate la proposition suivante.

Proposition 12

- Soient N et N' sont deux normes **équivalentes** d'un espace vectoriel E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ dans } (E,N) \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ dans } (E,N')$$

- Si E est de dimension finie, la nature d'une suite d'éléments de E ne dépend pas de la norme choisie sur E.

Proposition 13

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est unique.

Preuve.

□

Proposition 14

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Preuve.

□

On pourrait également démontrer les propositions suivantes.

Proposition 15

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors ses suites extraites aussi et elles ont même limite.

Proposition 16

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E.
Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ', alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, la suite $(\lambda u_n+\mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $\lambda\ell+\mu\ell'$.
Autrement dit, l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

Plus généralement, on admet aussi la proposition suivante.

Proposition 17

Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. Soient aussi $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergeant respectivement vers a et b.
Alors la suite vectorielle $(\alpha_n u_n+\beta_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $a\ell+b\ell'$.

Exemple 16.7. (E2) Méthode 1 - *On considère (et on la retrouvera ensuite !) la matrice* $A=\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$.
Calculer le polynôme caractéristique de A.

$\chi_A(\lambda)=$

En déduire, pour $n\in\mathbb{N}$, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de A et de I_2.

Déterminer alors si elle existe $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.

Exemple 16.8. Un exemple en dimension infinie
On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni des normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_\infty$.
On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E par : $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = t^n$.

- *Convergence pour la norme $\mathcal{N}_1$:*

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}_1(f_n - 0) = \int_0^1 |f_n(t) - 0|\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers la fonction nulle dans } (E, \mathcal{N}_1).}$

- *Convergence pour la norme $\mathcal{N}_\infty$:*

On remarque tout d'abord que la convergence pour la norme $\mathcal{N}_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est exactement la convergence **uniforme** *vue dans le chapitre Séries de fonctions.*

$$\begin{aligned} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } f \text{ dans } (E,\mathcal{N}_\infty) &\iff \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\iff (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,b] \end{aligned}$$

Ici, $[a,b] = [0,1]$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g définie par $g(1) = 1$ et $g(t) = 0$ si $t \in [0,1[$.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément, ce serait vers sa limite simple g. Et comme les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$, la limite uniforme g le serait aussi. Ce qui n'est évidemment pas le cas.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge dans } (E,\mathcal{N}_\infty).}$

16.3.2 En dimension finie, caractérisation à l'aide des suites coordonnées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Pour $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, on pose $\quad N_\mathcal{B}(x) = \max_{i\in\{1,\dots,p\}} |x_i| \quad$ et $\quad N'_\mathcal{B}(x) = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$.
On démontrerait facilement qu'il s'agit de deux normes sur E.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E, on peut écrire chacun des u_n dans la base $\mathcal{B}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i.$$

Les p suites numériques $(u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées **suites coordonnées** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Avec ces notations, on montre la proposition suivante.

Proposition 18

On a l'équivalence suivante.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \qquad \iff \qquad \forall i \in \{1,\dots,p\},\ (u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge .}$$

Et dans ce cas, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \ell_i e_i$ avec $\ell_i = \lim_{n\to+\infty} u_{n,i}$.

Preuve. Puisque E est de dimension finie, la nature de la suite ne dépend pas du choix de la norme.
- Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On choisit la norme $N_\mathcal{B}$ définie précédemment.

• Supposons que toutes les suites coordonnées $(u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. On choisit la norme $N'_{\mathcal{B}}$ définie précédemment.

□

Exemple 16.9. (E2) Méthode 2 - *On reprend la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice inversible P *de la forme* $P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \star & \star \end{pmatrix}$ *telle que* $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^n *(exprimer ses coefficients) et retrouver la valeur de* $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.

16.4 Parties ouvertes, parties fermées, parties denses

16.4.1 Points intérieurs, parties ouvertes

Définition 12

Soit A une partie de E et a un vecteur de A.
On dit que a est un point intérieur à A si :

$$\exists r > 0, \qquad B(a, r) \subset A$$

ou encore si

$$\exists r > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x - a\| < r \Longrightarrow x \in A.$$

Illustration graphique :

Exemple 16.10. *Soit $a \in A$ un point intérieur à A et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers a. Montrer qu'à partir d'un certain rang, u_n est dans A.*

Définition 13

Soit A une partie de E.
On appelle intérieur de A l'ensemble de ses points intérieurs.
On le note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A.

Remarque : On a toujours $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Définition 14

Soit U une partie de E.
On dit que U est une partie ouverte de E si chacun de ses points lui est intérieur, autrement dit si :

$$\forall a \in U, \quad \exists r > 0, \qquad B(a, r) \subset U$$

ou encore si $\overset{\circ}{U} = U$.

Exemple 16.11. *Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.*

Exercice de colle (E2)

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé et $a \in E$. Montrer que pour tout $r > 0$, la boule $B(a, r)$ est une partie ouverte de E.

Proposition 19

- E et $\emptyset$ sont des parties ouvertes de E.
- Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Preuve.

□

Attention : Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Ainsi, par exemple

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} \quad \text{qui n'est pas ouvert.}$$

16.4.2 Points adhérents, parties fermées

Définition 15

Soit A une partie de E et a un vecteur de E. On dit que a est un point adhérent à A si :

$$\forall r > 0, \qquad B(a,r) \cap A \neq \emptyset$$

ou encore si

$$\forall r > 0, \quad \exists x \in A, \qquad \|x - a\| < r.$$

Illustration graphique :

Proposition 20 (Caractérisation séquentielle)

Soit A une partie de E et a un vecteur de E. Alors a est un point adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

Preuve.

□

Définition 16

Soit A une partie de E.
On appelle adhérence de A l'ensemble de ses points adhérents.
On la note $\overline{A}$.

Remarque : On a toujours $A \subset \overline{A}$.

Définition 17

Soit F une partie de E.
On dit que F est une partie fermée de E si tous les points de E adhérents à F sont dans F, autrement dit si :

$$\forall a \in E, \quad \Big(\forall r > 0, \qquad B(a, r) \cap F \neq \emptyset\Big) \quad \Longrightarrow \quad a \in F,$$

ou encore si $F = \overline{F}$.

Exemple 16.12. *Les intervalles fermés sont des parties fermées. On admet aussi que les produits de parties fermées sont des parties fermées. Ainsi, par exemple, $[a, b] \times [c, d]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 16.13. *On pourrait aussi montrer que les boules fermées et les sphères sont des parties fermées.*

La caractérisation séquentielle des points adhérents s'écrit aussi pour les parties fermées.

Proposition 21

Soit F une partie de E. Alors

F est une partie fermée $\overset{\text{définition}}{\Longleftrightarrow}$ F contient tous ses points adhérents

$\Longleftrightarrow$ toute suite d'éléments de F qui converge dans E a sa limite dans F

Proposition 22

- E et $\emptyset$ sont des parties fermés de E.
- Une réunion finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Preuve. • E et $\emptyset$ sont des parties fermés de E, il n'y a rien à démontrer.

• Soient $F_1, \ldots, F_p$ des parties fermées de E. Montrons que $F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$ est une partie fermée de E.
Soit $a \in E$ un point adhérent à F, montrons que $a \in F$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers a.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists i_n \in \{1, \ldots, p\}, \quad a_n \in F_{i_n}.$$

Et comme il y a un nombre fini de parties F_i, l'une d'entre elles au moins contient une infinité des termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ou encore :

$$\exists i \in \{1, \ldots, p\}, \ \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante}, \quad \text{tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{\varphi(n)} \in F_i.$$

Ainsi, la suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F_i, et elle converge vers a car c'est une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme F_i est une partie fermée, $a \in F_i \subset F$, ce qu'on voulait.
• Soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille de parties fermées de E. Montrons que $G = \bigcap_{i\in I} F_i$ est une partie fermée de E.
Soit $a \in E$ un point adhérent à G, montrons que $a \in G$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G qui converge vers a.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall i \in I, \quad a_n \in F_i.$$

Et comme F_i est fermée, $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in F_i$. Ceci est valable pour tout $i \in I$, donc $a \in G = \bigcap_{i\in I} F_i$, ce qu'on voulait. □

On termine ce paragraphe par la proposition suivante, qui donne le lien entre les parties ouvertes et les parties fermées.

Proposition 23

Soit A une partie de E. On note $\complement(A)$ le complémentaire de A dans E, c'est-à-dire :

$$\complement(A) = E \setminus A = \{x \in E,\ x \notin A\}.$$

Alors, on a l'équivalence suivante.

$$A \text{ est une partie fermée de } E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \complement(A) \text{ est une partie ouverte de } E$$

Preuve.

$\boxed{\Longrightarrow}$

$\boxed{\Longleftarrow}$

□

16.4.3 Frontière d'une partie

Définition 18

Soit A une partie de E.
On appelle frontière de A l'ensemble de ses points qui lui sont adhérents mais pas intérieurs, c'est-à-dire :

$$Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Exemple 16.14. *La frontière de* $[0,1[$ *est* $\{0;1\}$, *la frontière d'une boule fermée* $\overline{B}(a,R)$ *est la sphère* $S(a,R)$.

Intuitivement : Nous considèrerons le plus souvent des ensembles simples. Ainsi, on pourra souvent imaginer que :

- L'adhérence d'une partie A est A auquel on ajoute son « bord »(c'est-à-dire la frontière).
- L'intérieur d'une partie A est A auquel on enlève le « bord ».
- Une partie A est ouverte, si elle ne contient aucun point de son « bord », c'est-à-dire si $A = \mathring{A}$.
- Une partie A est fermée, si elle contient tous les points de son bord, c'est-à-dire si $A = \overline{A}$.
- Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Illustration graphique :

Néanmoins, la frontière d'une partie n'est aps toujours aussi intuitive. En témoigne le paragraphe suivant.

16.4.4 Partie dense

Définition 19

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est dense dans E si l'une des trois propositions équivalentes suivantes est vérifiée.

(1) $\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A, \quad \|x - a\| < \varepsilon$

(2) $\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0, \quad A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$

(3) Tout élément x de E est limite d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A

(4) $\overline{A} = E$

L'équivalence entre ces 4 propositions est assez naturelle quand on connaît la définition et les caractérisations de valeur d'adhérence.

Exercice de colle (E2)

On munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle (la valeur absolue). Montrer que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice de colle (E3)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

16.4.5 Invariance par normes équivalentes

On admettra la proposition suivante.

Proposition 24

• Soient N et N' sont deux normes **équivalentes** d'un espace vectoriel E et A une partie de A. On a :

$$A \text{ est une partie ouverte de } (E,N) \iff A \text{ est une partie ouverte de } (E,N')$$

$$A \text{ est une partie fermée de } (E,N) \iff A \text{ est une partie fermée de } (E,N')$$

$$A \text{ est une partie dense dans } (E,N) \iff A \text{ est une partie dense dans } (E,N')$$

• Si E est de dimension finie, la notion de partie ouverte, fermée ou dense ne dépend pas de la norme choisie sur E.

16.5 Etude locale d'une application

Dans les paragraphes suivants, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de normes notées toutes deux $||.||$.

16.5.1 Définitions

Définition 20

Soit A une partie de E et $f : A \longrightarrow F$. On se donne $a \in E$ un point **adhérent** à A. On dit que f admet une limite $b \in F$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \qquad ||x-a||_E \leqslant \delta \implies ||f(x)-b||_F \leqslant \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Remarque importante : Là encore, cette définition dépend du choix des normes sur E et F.

Illustration graphique :

Remarque : Comme pour les fonctions numériques, on peut démontrer que si f admet une limite en a, alors cette limite est **unique**.

Quand $E=\mathbb{R}$, on peut aussi s'intéresser au comportement d'une fonction au voisinage de $\pm\infty$.

Définition 21

- Soit $f:]\alpha,+\infty[\longrightarrow F$ une fonction et soit $b\in F$. On dit que f tend vers b en $+\infty$ si on a
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in]\alpha,+\infty[,\qquad x>M\implies ||f(x)-b||_F<\varepsilon.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$.
- Soit $f:]-\infty,\alpha[\longrightarrow F$ une fonction fonction et soit $b\in F$. On dit que f tend vers b en $-\infty$ si on a
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in]-\infty,\alpha[,\qquad x<M\implies ||f(x)-b||_F<\varepsilon.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$.

Quand $F=\mathbb{R}$, on peut aussi définir la notion de limite infinie.

Définition 22

Soit $f:A\subset E\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction et soit $a\in E$ un point adhérent à A.

- On dit que f tend vers $+\infty$ en a si on a
$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A,\qquad ||x-a||_E\leqslant\delta\implies f(x)\geqslant M.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$.
- On dit que f tend vers $-\infty$ en a si on a
$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A,\qquad ||x-a||_E\leqslant\delta\implies f(x)\leqslant M.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

16.5.2 Propriétés

Comme pour les fonctions numériques, on peut démontrer les propriétés suivantes.

Proposition 25

- Soient $f,g:A\subset E\longrightarrow F$ et $a\in E$ un point adhérent à A. On suppose que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\in F$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c\in F$. Alors pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, la fonction $\lambda f+\mu g$ admet une limite en a et
$$\lim_{x\to a}(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda b+\mu c.$$
- Soient $f:A\subset E\longrightarrow F$, $\lambda:A\subset E\longrightarrow\mathbb{K}$ et $a\in E$ un point adhérent à A. On suppose que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\in F$ et $\lim\limits_{x\to a}\lambda(x)=\alpha\in\mathbb{K}$. Alors la fonction λf admet une limite en a et
$$\lim_{x\to a}(\lambda f)(x)=\alpha b.$$
- Soient $f:A\subset E\longrightarrow B\subset F$ et $g:B\subset F\longrightarrow G$.
Soit $a\in E$ un point adhérent à A. On suppose que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\in F$. Alors
  - $\hookrightarrow$ b est un point adhérent à B
  - $\hookrightarrow$ si $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c\in G$ alors $\lim\limits_{x\to a}g\circ f(x)=c$.

Si F est de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de F. Si $f : A \subset E \longrightarrow F$, on peut définir ses applications coordonnées $(f_1, \dots, f_n)$ par

$$\forall x \in A, \qquad f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_n(x)e_n.$$

Avec ces notations, on a la proposition suivante.

Proposition 26

Si $a \in E$ est un point adhérent à A et si $b = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$ on a l'équivalence suivante.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i.$$

Et donc d'**une** limite dans F, on peut se ramener à n limites dans $\mathbb{K}$.

Exemple 16.15. *Soit f à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}, \sqrt{1-x}, e^{x \ln(x)} - 1\right)$.*
Donner l'ensemble de définition de f et préciser ses fonctions coordonnées.
Déterminer la limite éventuelle de f en 0.

16.6 Continuité

16.6.1 Définitions

Définition 23

Soit A une partie de E et $f : A \subset E \longrightarrow F$. On se donne $a \in E$ un point **adhérent** à A.

- Si $a \in A$, on dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Si $a \notin A$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = b$, on peut prolonger la fonction f par continuité en a en posant $f(a) = b$.

On dira que f est continue sur A si elle l'est un tout point de A.

Exemple 16.16. *Prolonger la fonction f par continuité en* 0.

Définition 24

Si $A \subset E$, on note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions $f : A \longrightarrow F$ continues sur A.

16.6.2 Propriétés

Toutes les propriétés données pour les limites s'adaptent à la continuité.

Proposition 27

• Soient $f, g : A \subset E \longrightarrow F$ et $a \in A$. On suppose que f et g sont continues en a.
Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

• Soient $f : A \subset E \longrightarrow F$, $\lambda : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in A$. On suppose que λ et f sont continues en a.
Alors la fonction $\lambda.f$ est continue en a.

• Soient $f : A \subset E \longrightarrow B \subset F$ et $g : B \subset F \longrightarrow G$. Soit $a \in A$ et $b = f(a) \in B$.
Si f est continue en a et si g est continue en b alors $g \circ f$ est continue en a.

En conséquence, on a la proposition suivante.

Proposition 28

L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ muni des lois $(+, .)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Si F est de dimension finie et si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F, on peut encore caractériser la continuité d'une application $f : A \subset E \to F$ à l'aide de ses fonctions coordonnées $(f_1, \ldots, f_n)$.

Proposition 29

Soit $a \in A$. On a l'équivalence suivante.

$$f \text{ est continue en } a \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ f_i \text{ est continue en } a.$$

16.6.3 Caractérisation séquentielle

On généralise ici un énoncé déjà démontré en première année (MPSI).

Proposition 30

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $a \in E$ un point adhérent à A.

- On a l'équivalence suivante.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d' éléments de } A, \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = b. \end{array} \right.$$

- Si $a \in A$, on a l'équivalence suivante (il suffit de prendre $b = f(a)$).

$$f \text{ est continue en } a \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d' éléments de } A, \\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a). \end{array} \right.$$

Preuve. On montre le premier point seulement.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $f(x)$ ne tende pas vers b lorsque x tend vers a.
On construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d' éléments de A, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et telle que $f(x_n)$ ne tende pas vers b.

□

16.6.4 Propriétés topologiques

On admet la proposition suivante.

Proposition 31

Soit $f : E \longrightarrow F$.

- Si f est continue, alors l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.
- Si f est continue, alors l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

Remarque : La réciproque est vraie aussi mais elle n'est pas au programme de PSI.

Conséquence : L'intérêt de cette proposition est de démontrer, de manière assez simple, que certaines parties de E sont ouvertes ou fermées. Ainsi, si par exemple, $F = \mathbb{R}$, on sait que

$$]-\infty,\alpha[\text{ et }]\alpha,+\infty[\text{ sont des ouverts de } \mathbb{R}.$$

$$]-\infty,\alpha],\ \{\alpha\} \text{ et } [\alpha,+\infty[\text{ sont des fermés de } \mathbb{R}.$$

Si $f : E \to \mathbb{R}$, on a donc

$$\left.\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,\alpha[) &= \{x\in E,\ f(x)<\alpha\} \\ f^{-1}(]\alpha,+\infty[) &= \{x\in E,\ f(x)>\alpha\} \end{aligned}\right\} \quad \text{sont des ouverts de } E.$$

$$\left.\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty,\alpha]) &= \{x\in E,\ f(x)\leqslant\alpha\} \\ f^{-1}(\{\alpha\}) &= \{x\in E,\ f(x)=\alpha\} \\ f^{-1}([\alpha,+\infty[) &= \{x\in E,\ f(x)\geqslant\alpha\} \end{aligned}\right\} \quad \text{sont des fermés de } E.$$

Exemple 16.17. *Soit* $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y \geqslant 0\}$.
Représenter U *et montrer que c'est une partie fermée de* $\mathbb{R}^2$.

La proposition du théorème suivant est hors-programme.

Proposition 32 (Théorème des bornes atteintes (E de dimension finie))

Soit $f : A \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ où E est un espace vectoriel normé de dimension finie.
Si $A \in E$ une partie non vide, fermée et bornée de E (on dit alors que A est une « partie compacte ») et si f est continue sur A alors f est bornée et elle atteint ses bornes.

Remarque : cet énoncé sera utilisé essentiellement dans le chapitre « Fonctions de plusieurs variables ».

Exemple 16.18. *Soit* $f : \overline{B}(0,R) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = 4x^2 + 3xy$.
Démontrer que f *est bornée et qu'il existe* $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \overline{B}(0,R)$ *tels que*

$$f(x_1,y_1) = \max\{f(x,y),\ (x,y) \in \overline{B}(0,R)\} \quad \textit{et} \quad f(x_2,y_2) = \min\{f(x,y),\ (x,y) \in \overline{B}(0,R)\}.$$

16.6.5 Applications lipschitziennes

Définition 25

Soient E et F des espaces vectoriels normés, $f : A \subset E \longrightarrow F$ une application et $k > 0$ un réel.
On dit que f est k-lipschitzienne si pour tout $(x, y) \in A^2$ on a

$$||f(x) - f(y)||_F \leqslant k||x - y||_F.$$

Exemple 16.19. *Soit E un espace vectoriel normé dont on note N la norme.*
L'application $x \longmapsto N(x)$ est 1-lipschitzienne.

En effet, pour tout $x, y \in E$, l'inégalité triangulaire donne

$$N(x) = N(x - y + y) \leqslant N(x - y) + N(y) \quad \text{et donc} \quad N(x) - N(y) \leqslant N(x - y).$$

De même $N(y) - N(x) \leqslant N(x - y)$ et par conséquent $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) = 1.N(x - y)$ ce qui montre le résultat annoncé.

Exemple 16.20. *L'application $\ln$ est $\dfrac{1}{2}$−lipschitzienne sur $[2, +\infty[$.*

Proposition 33

La composée de deux applications respectivement k-lipschitzienne et k'-lipschitzienne, est une application kk'-lipschitzienne.

Preuve.

□

Proposition 34

Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$. Si f est lipschitzienne sur A alors elle est continue sur A.
Mais la réciproque est fausse.

Preuve.

□

Exemple 16.21. *L'application* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $[0,1]$*. Montrer que pourtant, elle n'est pas lipschitzienne.*

16.6.6 Applications linéaires

Proposition 35

Soient E et F deux espaces vectoriels normés avec E **de dimension finie**. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application **linéaire**. Alors f est lipschitzienne et donc elle est continue.

Preuve.

□

Exemple 16.22. (E2) Méthode 3 - *On reprend la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & -1/2 \end{pmatrix}$.

On a vu que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Justifier que l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto PMP^{-1}$ *est continue.*

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$ *et retrouver la valeur de* $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.

16.6.7 Applications multilinéaires et polynomiales sur $\mathbb{K}^n$

Proposition 36

Soit $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une application polynomiale. Elle s'écrit :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad f(x) = \sum_{0 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant N} a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}.$$

Alors, par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{K}^n$.

On montrerait enfin la proposition suivante.

Proposition 37

Soient E et F deux espaces vectoriels normés avec E **de dimension finie**. Soit $f : (E)^p \longrightarrow F$ une application p-linéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ses variables.
Alors f est continue.

Exemple 16.23. *Il faut savoir justifier rapidement que l'application* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \det(M)$ *est continue.*

• *Soit par : L'application* det *est polynomiale en les coefficients de* M *(c'est-à-dire ses coordonnées dans la base canonique) donc elle est continue.*

• *Ou bien par : Si* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on note* $C_1(M), \ldots, C_n(M)$ *ses colonnes.*
L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto (C_1(M), \ldots, C_n(M)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ *est linéaire donc continue* ($\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de dimension finie).*
L'application $(C_1, \ldots, C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_n)$ *est* n*-linéaire donc continue* ($\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n$ *de dimension finie), où* $\mathcal{B}$ *est la base canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
En composant les deux, on obtient bien que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \det(M)$ *est continue.*

Exemple 16.24. *Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien, l'application* $(u, v) \in E^2 \longmapsto \langle u, v\rangle$ *est bilinéaire donc continue sur* E^2.

Exemple 16.25. *L'application* $\varphi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $\varphi(A, B) = AB$ *est bilinéaire donc continue.*

L'application $A \longmapsto (A, A)$ *est linéaire donc continue (dimension finie), et par composition, l'application :*

$$A \longmapsto (A, A) \overset{\varphi}{\longmapsto} A^2$$

est aussi continue.
Par une récurrence simple, $A \longmapsto A^n$ *est continue, et par linéarité, pour tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$*, l'application* $A \longmapsto P(A)$ *est aussi continue.*