Chapitre 15

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien dont on note $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire.

15.1 Isométries vectorielles

Définition 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une **isométrie vectorielle** (ou un **automorphisme orthogonal**) s'il conserve la norme :

$$\forall x \in E, \qquad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Proposition 1

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle alors c'est un automorphisme.

Preuve.

□

Exercice de colle (E1)

Montrer qu'une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.

Remarque : On appelle **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E. Ainsi, toute réflexion est un automorphisme orthogonal.

Définition 2

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles (ou des automorphismes orthogonaux) de E. On l'appelle **groupe orthogonal** de E.

On vérifie qu'il s'agit bien d'un *« groupe »*.

- La loi $\circ$ est une *loi de composition interne*, c'est-à-dire que $\mathcal{O}(E)$ est stable pour $\circ$.
  En effet, si $u, v \in \mathcal{O}(E)$ alors ils conservent la norme et donc $u \circ v$ la conserve aussi, ainsi $u \circ v \in \mathcal{O}(E)$.
- La loi $\circ$ est associative car pour toutes u, v, w on a $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$
- La loi $\circ$ possède un élément neutre dans $\mathcal{O}(E)$, c'est Id_E qui est bien dans $\mathcal{O}(E)$ et qui vérifie $u \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u = u$ pour toute $u \in \mathcal{O}(E)$.
- Enfin, si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors u est inversible (pour la loi $\circ$), et comme elle conserve la norme, avec $y = u^{-1}(x)$ on obtient

$$||u(y)|| = ||y|| \quad \Longrightarrow \quad ||x|| = ||u^{-1}(x)||.$$

  Et donc, $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Finalement, $\mathcal{O}(E)$ est bien un *groupe* pour la loi $\circ$ et c'est un *sous-groupe* de $(GL(E), \circ)$.

Proposition 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
u \in \mathcal{O}(E) &\overset{\text{définition}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x|| && \textbf{(1)}\\
&\Longleftrightarrow \forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle && \textbf{(2)}\\
&\Longleftrightarrow \text{L'image d'une b.o.n. donnée de } E \text{ par } u \text{ est une b.o.n. de } E && \textbf{(3)}\\
&\Longleftrightarrow \text{L'image de toute b.o.n. de } E \text{ par } u \text{ est une b.o.n. de } E && \textbf{(4)}
\end{aligned}$$

Preuve.
(1) $\Longleftrightarrow$ **(2)** :

(2) $\Longrightarrow$ **(4)** $\Longrightarrow$ **(3)** $\Longrightarrow$ **(1)** :

□

Proposition 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie vectorielle. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par u.

Preuve.(D3)

□

15.2 Matrices orthogonales

Définition 3

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle. On dit que M est orthogonale si $M^T.M = I_n$.

Proposition 4

- Toute matrice matrice orthogonale M est donc inversible et d'inverse M^T.
- L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est donc contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$, on l'appelle **groupe orthogonal**.

Preuve. Si $M^T.M = I_n$, alors M est inversible à gauche et comme M est une matrice carrée, elle est inversible avec $M^{-1} = M^T$.
Ainsi, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$. □

On vérifie que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un *groupe* pour la loi $\times$.

- La loi $\times$ est une *loi de composition interne* :

- La loi $\times$ est associative :

- La loi $\circ$ possède un élément neutre dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

- Tout élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ possède un inverse (symétrique) pour $\times$:

Finalement, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bien un *groupe* pour la loi $\times$ et c'est un *sous-groupe* de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
On a aussi les caractérisations suivantes.

Proposition 5

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad & \overset{\text{définition}}{\iff} \quad P^T.P = I_n && \textbf{(1)} \\
& \iff \quad P.P^T = I_n && \textbf{(2)} \\
& \iff \quad P \text{ est inversible et } P^{-1} = P^T && \textbf{(3)} \\
& \iff \quad \text{les colonnes de } P \text{ forment une b.o.n. de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) && \textbf{(4)} \\
& \iff \quad \text{les lignes de } P \text{ forment une b.o.n. de } \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) && \textbf{(5)}
\end{aligned}$$

Preuve. On a de manière évidente : **(1)** $\iff$ **(2)** $\iff$ **(3)**.
Montrons l'équivalence **(1)** $\iff$ **(4)** : Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de P. Alors $C_1^T, \dots, C_n^T$ sont les lignes de P^T. Par définition du produit matriciel, on a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{les colonnes de } P \text{ forment une b.o.n. de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad & \iff \quad \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j} \\
& \iff \quad \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ C_i^T C_j = \delta_{i,j} \\
& \iff \quad P^T \times P = I_n
\end{aligned}$$

Enfin, en appliquant l'équivalence **(1)** $\iff$ **(4)** à la matrice $M = P^T$, on obtient facilement l'équivalence **(2)** $\iff$ **(5)**. □

On illustre le produit matriciel de la proposition précédente.

Proposition 6 (Interprétation des matrices orthogonales)

Soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E. On a les propositions suivantes.

1. Pour toute base $\mathcal{B}'$ de E :
$$\mathcal{B}' \text{ base orthonormée de } E \quad \Longleftrightarrow \quad P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$
2. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:
$$u \in \mathcal{O}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Preuve.

1.

2.

□

Proposition 7

1. Si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors $\det(u) = 1$ ou $\det(u) = -1$.
2. Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$.

Preuve.

□

Proposition 8

L'ensemble des matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on l'appelle groupe spécial orthogonal et on le note

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1\}.$$

On définit aussi le groupe des isométries vectorielles directes de E : $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E),\ \det(u) = 1\}$.

Exercice de colle (E3)

Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de P alors $|\lambda| = 1$.

15.2.1 Orientation

Définition 4

Orienter un espace vectoriel E c'est choisir une base (orthonormée) $\mathcal{B}$ dont on choisit qu'elle est directe.
Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. On dira que $\mathcal{B}'$ est directe si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et indirecte si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.

Exercice de colle (E2)

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On oriente E par la base $\mathcal{B}$.
Montrer que pour toute autre base orthonormée directe $\mathcal{B}'$, on a $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

On note usuellement $\mathrm{Det} = \det_{\mathcal{B}}$ l'application déterminant en base orthonormée directe, il ne dépend de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie.

15.3 Endomorphismes autoadjoints

15.3.1 Définitions et propriétés

Définition 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un **endomorphisme autoadjoint** (ou **symétrique**) si

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle.$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Exercice de colle (E1)

Une symétrie orthogonale est un endomorphisme autoadjoint.

Exemple 15.1. *On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel et on désigne par f l'application transposée. Il s'agit bien d'un endomorphisme de E et pour tout $(A,B) \in E^2$, on a*

$$\begin{aligned}
\langle A, f(B)\rangle &= \mathrm{tr}(A^T f(B)) &&= \mathrm{tr}(A^T B^T)\\
&= \mathrm{tr}\Big((A^T B^T)^T\Big) &&= \mathrm{tr}(BA)\\
&= \mathrm{tr}(AB) &&= \mathrm{tr}(f(A)^T.B) = \langle f(A), B\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\textit{L'application transposée est un endomorphisme autoadjoint de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

Exercice de colle (E2)

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante.

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff \begin{cases} p \circ p = p \\ \text{et} \\ p \text{ est un endomorphisme autoadjoint} \end{cases}$$

Proposition 9

Soit $\mathcal{B}$ une **base orthonormée** de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence suivante.

$$u \text{ est un endomorphisme autoadjoint} \iff M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est symétrique} \iff M^T = M.$$

Preuve.

□

Exercice de colle (E2)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par u alors $F^{\perp}$ l'est aussi.

15.3.2 Réduction des endomorphismes autoadjoint

Lemme

Les valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint (resp. d'une matrice symétrique réelle) sont réelles.

Preuve.(D2)

□

On a alors les propositions suivantes.

Proposition 10 (Théorème Spectral)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Alors

- E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u,
- u est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

Preuve.

□

Proposition 11

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de M,
- M est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de u, ou encore qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$D = P^{-1}MP = \ P^T MP \text{ est diagonale.}$$

Exercice de colle (E2)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u répétées avec multiplicités et rangées dans l'ordre croissant. Démontrer que :

$$\forall x \in E, \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2.$$

15.3.3 Endomorphisme autoadjoint (ou matrice symétrique) positif (resp. défini positif)

Définition 6

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. On dit que :

- u est positif si pour tout $x \in E$, on a $\langle u(x), x \rangle \geqslant 0$.
- u est défini positif si **u est positif** et si :

$$\forall x \in E, \qquad \langle u(x), x \rangle = 0 \implies x = 0.$$

- On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphisme autoadjoints positifs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphisme autoadjoints définis positifs.

Définition 7

M une matrice symétrique réelle. On dit que

- M est positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T M X \geqslant 0$.
- M est définie positive si **M est positive** et si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad X^T M X = 0 \implies X = 0.$$

- On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Avec les notations précédentes, si $\mathcal{B}$ est une **base orthonormée** de E, si $M = \mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ et $X = \mathcal{M}_\mathcal{B}(x)$, alors on a :

$$\langle u(x), x \rangle = X^T M X$$

La proposition suivante en découle directement.

Proposition 12

Avec les notations précédentes, si $\mathcal{B}$ est une **base orthonormée** de E, si $u \in \mathcal{S}(E)$ et $M = \mathcal{M}_\mathcal{B}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$u \text{ est positif (resp. défini positif)} \iff M \text{ est positive (resp. définie positive)}$$

Exercice de colle (E1)

- Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que : $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$

Exercice de colle (E2)

- Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que : $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_*^+$
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_*^+$

Exemple 15.2. *Pour* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*, on pose* $q(X) = 7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 4xz - 2yz$.
Déterminer une matrice $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $q(X) = X^T AX$.
En déduire que si $X \neq 0$*, alors,* $q(X) > 0$.

15.4 Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension 2 ou 3, orienté par une une base orthonormée $\mathcal{B}$. On sait qu'en exprimant les vecteurs dans cette base, on est ramené à la structure euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On se placera donc très souvent sur $\mathbb{R}^2$ ou sur $\mathbb{R}^3$ orienté par sa base canonique.

15.4.1 Orientation

On admet les deux propositions suivantes.

Proposition 13

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et D une droite vectorielle de E.
Soit a un vecteur unitaire normal à D, alors il existe un unique vecteur e_1 de D tel que (e_1, a) soit une base orthonormée directe de E. Si on oriente D par le vecteur e_1, on a pour tout $u_1 \in D$ non nul :

$$(u_1, a) \text{ est une b.o.n. directe de } E \quad \Longleftrightarrow \quad (u_1) \text{ est une b.o.n. directe de } D$$

On dit qu'on a orienté D par le vecteur a.

Illustration graphique :

Proposition 14

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et P un plan vectoriel de E.
Soit a un vecteur unitaire normal à P, alors il existe une base (e_1, e_2) de P tel que (e_1, e_2, a) soit une base orthonormée directe de E. Si on oriente P par la base (e_1, e_2), pour toute base (u_1, u_2) de P, on a :

$$(u_1, u_2, a) \text{ est une b.o.n. directe de } E \quad \Longleftrightarrow \quad (u_1, u_2) \text{ est une b.o.n. directe de } P$$

On dit qu'on a orienté P par le vecteur a.

Illustration graphique :

15.4.2 Déterminant dans une base orthonormée directe

Proposition 15

Soit E un espace euclidien orienté de dimension n et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E.
Alors pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$. On l'appelle **produit mixte** de $(u_1, \ldots, u_n)$.
On le note :

- $\operatorname{Det}(u_1, \ldots, u_n)$ dans le cas général,
- $\operatorname{Det}(u_1, u_2) = [u_1, u_2]$ en dimension 2, et dans $\mathbb{R}^2$, $\Big|[u_1, u_2]\Big|$ est l'aire du parallèlogramme formé par u_1 et u_2,
- $\operatorname{Det}(u_1, u_2, u_3) = [u_1, u_2, u_3]$ en dimension 3, et dans $\mathbb{R}^3$, $\Big|[u_1, u_2, u_3]\Big|$ est le volume du parallèlépipède formé par u_1, u_2 et u_3.

Preuve. (voir **(E2)** précédent)

□

15.4.3 Produit vectoriel

Proposition 16

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u_1, u_2 deux vecteurs de E.
Il existe un unique $v \in E$ tel que $\forall w \in E,\ [u_1, u_2, w] = \langle w, v \rangle$.
v s'appelle le produit vectoriel de u_1 et u_2, on le note $v = u_1 \wedge u_2$.

Preuve.

□

On admet que le produit vectoriel vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 17

1. $(u,v) \longmapsto u \wedge v$ est bilinéaire et antisymétrique ($v \wedge u = -u \wedge v$)
2. u, v colinéaires $\iff$ $u \wedge v = 0$
3. Si u et v sont orthogonaux alors $\|u \wedge v\| = \|u\|.\|v\|$
4. Si (u,v) et orthonormée alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de E
5. Si (i,j,k) est une base orthonormée directe de E alors

$$i \wedge j = k, \qquad j \wedge k = i \quad \text{et} \quad k \wedge i = j.$$

Illustration graphique :

On donne enfin l'expression analytique du produit vectoriel.

Proposition 18

Si $\mathcal{B} = (i,j,k)$ est une base orthonormée directe de E et si $u = (x,y,z)_{\mathcal{B}}$ et $v = (x',y',z')_{\mathcal{B}}$ sont deux vecteurs de E on a :

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} k.$$

Méthode de calcul :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \qquad\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

Exemple 15.3. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique, on considère $F =$Vect(u,v) avec $u = (1,2,1)$ et $v = (0,1,-1)$.*

- *Déterminer une équation de F.*

- *Soit $w = (x,y,z)$. Déterminer $d(w,F)$ et interpréter géométriquement.*

Exercice de colle (E1)

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

15.5 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

15.5.1 Description de $\mathcal{O}(2)$

Proposition 19

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes.

$$M \in \mathcal{O}(2) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \{1, -1\}, \quad M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$M \in \mathcal{SO}(2) \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Preuve.

- **(D1)** Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}(2)$, les relations sur les colonnes donnent :

$$a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0 \quad \text{et} \quad \det(M) = ad - bc = 1.$$

  Les deux premières égalités donnent l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a = \cos(\theta) \\ b = \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c = \cos(\alpha) \\ d = \sin(\alpha) \end{cases}$$

  Les deux dernières relations se traduisent alors par $\cos(\theta - \alpha) = 0$ et $\sin(\alpha - \theta) = 1$.
  On en déduit que $\alpha - \theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. En particulier, on obtient

$$c = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \quad \text{et} \quad d = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta),$$

  d'où l'écriture de M désirée. Fin de **(D1)**.
- Pour finir, si $M \in \mathcal{O}(2) \setminus \mathcal{SO}(2)$ alors $\det(M) = -1$.
  Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors P est une matrice orthogonale de déterminant -1. Donc MP est une matrice orthogonale de déterminant $(-1) \times (-1) = 1$. D'après ce qui précède, on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$MP = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

  On obtient alors $M = (MP)P^{-1} = (MP)^t P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
  Et donc on a $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

□

Proposition 20

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
L'application $\theta \longrightarrow R(\theta)$ vérifie :

$$\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \quad R(\theta + \varphi) = R(\theta)R(\varphi).$$

Preuve. Cela s'obtient facilement en effectuant le produit des matrices et en utilisant les formules trigonométriques. □

Remarque : Les éléments de $\mathcal{SO}(2)$ commutent deux à deux et l'on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad R(\theta)^{-1} = R(-\theta).$$

15.5.2 Rotations d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, E désigne un **espace euclidien orienté** de dimension 2, c'est-à-dire un plan euclidien muni d'une base dont on décide qu'elle est directe.

Définition 8

On appelle rotation vectorielle du plan E tout élément de $\mathcal{SO}(E)$ c'est-à-dire toute isométrie vectorielle directe.

Proposition 21

Si $f \in \mathcal{SO}(E)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormale **directe** $\mathcal{B}$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le réel θ est unique modulo 2π et est appelé **mesure de l'angle de la rotation** ou plus simplement **angle de la rotation**.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$, et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe.
Alors on sait que $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{SO}(2)$, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R(\theta)$.

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormale directe, on note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. La matrice P étant une matrice de passage de base orthonormale à une base orthonormale, on a $P \in \mathcal{O}(2)$. Comme on passe d'une base directe à une base directe, $\det(P) > 0$. On en déduit que $P \in \mathcal{SO}(2)$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = R(\alpha)$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}MP = R(-\alpha)R(\theta)R(\alpha) = R(-\alpha + \theta + \alpha) = R(\theta).$$

□

Proposition 22

Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$ est une rotation vectorielle, on note θ une mesure de son angle. Alors pour tout vecteur **unitaire** a :

1) $\cos(\theta) = (a|f(a))$

2) Pour tout base orthonormale directe $\mathcal{B}$ on a $\sin(\theta) = \det_{\mathcal{B}}(a, f(a))$.

Preuve. Soit a un vecteur unitaire, il existe une unique base orthonormale directe de la forme $\mathcal{B}_a = (a, b)$.
On obtient alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_a}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

En particulier, on a $f(a) = a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ et donc :

$$(a|f(a)) = \cos(\theta)(a|a) + \sin(\theta)(a|b) = \cos(\theta).$$

De plus, on obtient que

$$\det_{\mathcal{B}_a}(a, f(a)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{vmatrix} = \sin(\theta) = \det_{\mathcal{B}}(a, f(a)),$$

car ce déterminant ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie.

□

15.5.3 Isométries vectorielles indirectes d'un plan euclidien

Proposition 23

Les isométries indirectes du plan euclidien E sont les réflexions de E c'est-à-dire les symétries orthogonales par rapport à une droite.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormé directe de E. La matrice de f dans cette base est de la forme $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Alors le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(\lambda) = (\cos(\theta) - \lambda)(-\cos(\theta) - \lambda) - \sin^2(\theta) = \lambda^2 - 1.$$

La matrice A possède donc deux valeurs propres de multiplicité 1 : ce sont 1 et -1. De plus A est symétrique et $\mathcal{B}$ est orthonormée donc f est un endomorphisme symétrique. Par conséquent, ses sous-espaces propres sont deux-à-deux orthogonaux. Ainsi on a $E_1 \perp E_{-1}$ et donc f est la symétrie orthogonale par rapport à E_1. □

15.6 Isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3, c'est-à-dire muni d'une base dont on choisit qu'elle est directe.

On connaît déjà certaines isométries vectorielles : les symétries orthogonales. Si s est une symétrie orthogonale, on peut écrire sa matrice S dans une base orthonormée adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$. Quatre cas sont possibles, on précise pour chacun de ses cas, s'il s'agit d'une isométrie vectorielle directe ou indirecte.

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$s = \operatorname{Id}_E$ et $\det(s) = 1$ isométrie directe	$\det(s) = -1$ isométrie indirecte	$\det(s) = 1$ isométrie directe	$s = -\operatorname{Id}_E$ et $\det(s) = -1$ isométrie indirecte

L'objectif de ce paragraphe est de décrire toutes les isométries vectorielles directes d'un espace euclidien de dimension 3. Parmi elles, on compte donc déjà l'endomorphisme identité et les symétries orthonales par rapport à une droite.

Lemme

Toute isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension 3 admet au moins 1 ou -1 comme valeur propre.

Preuve. Soit s une isométrie vectorielle de E. Comme le polynôme caractéristique de s est de degré $3 = \dim(E)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il admet au moins une racine réelle (continuité et limites en $\pm\infty$). Donc s admet au moins une valeur propre réelle λ.

Et on a vu en exercice de colle **(E3)** que λ est nécessairement de module 1. Par conséquent, s admet au moins 1 ou -1 comme valeur propre.

□

Lemme

Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$ une isométrie vectorielle directe de l'espace E. Alors 1 est valeur propre de f et deux cas se présentent :

- $\dim(E_1(f)) = 3$, dans ce cas $f = \operatorname{Id}_E$

ou

- $m_1(f) = 1$ et $\dim(E_1(f)) = 1$, on dit dans ce cas que f est une **rotation vectorielle** d'axe $\Delta = E_1(f)$.

Preuve. Soit f in isométrie vectorielle directe telle que $f \neq \mathrm{Id}_E$.
D'après le lemme précédent, on sait que 1 et/ou -1 est valeur propre de f.

• Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de f, alors -1 l'est et donc il existe $e \in E$ non nul tel que $f(e) = -e$. C'est un vecteur propre associé à 1 donc $\Delta = \mathrm{Vect}(e)$ est une droite vectorielle stable par f. Comme $f \in \mathcal{O}(E)$, le plan $P = \Delta^\perp$ est aussi stable par f.
On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur P, il conserve aussi la norme, donc $\tilde{f}$ est une isométrie de P.
Et dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ adaptée à $E = \Delta \overset{\perp}{\oplus} P$, la matrice de f est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathcal{M}_{(e_2,e_3)}(\tilde{f})$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Un calcul de déterminant par blocs donne $\det(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = -1 = 1 \times \mathcal{M}_{(e_2,e_3)}(\tilde{f})$ donc $\det(\tilde{f}) = \mathcal{M}_{(e_2,e_3)}(\tilde{f}) = -1$. Ainsi, $\tilde{f}$ est une isométrie indirecte de P. D'après le paragraphe précédent, $\tilde{f}$ est une symétrie orthogonale et $\dim(E_1(\tilde{f})) = 1$. Et donc 1 est valeur propre de $\tilde{f}$, a fortiori 1 est valeur propre de f...

Contradiction

• Ainsi 1 est bien valeur propre de f, et donc il existe $e \in E$ non nul tel que $f(e) = e$. C'est un vecteur propre associé à 1 donc $\Delta = \mathrm{Vect}(e)$ est une droite vectorielle stable par f. Comme $f \in \mathcal{O}(E)$, le plan $P = \Delta^\perp$ est aussi stable par f.
On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur P, il conserve aussi la norme, donc $\tilde{f}$ est une isométrie de P.
Et dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ adaptée à $E = \Delta \overset{\perp}{\oplus} P$, la matrice de f est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathcal{M}_{(e_2,e_3)}(\tilde{f})$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Un calcul de déterminant par blocs donne $\det(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = 1 = 1 \times \mathcal{M}_{(e_2,e_3)}(\tilde{f})$ donc $\det(\tilde{f}) = \mathcal{M}_{(e_2,e_3)}(\tilde{f}) = 1$. Ainsi, $\tilde{f}$ est une isométrie directe de P , d'après le paragraphe précédent, $\tilde{f}$ est une rotation différente de l'identité (sinon, on aurait $f = \mathrm{Id}_E$), donc $\tilde{f}$ n'a aucune valeur propre réelle. Comme $\chi_f(X) = (X-1)\chi_{\tilde{f}}(X)$ on a bien $m_1(f) = 1$ et $\dim(E_1(f)) = 1$.
□

On reprend les notations de la preuve précédente. On rappelle qu'on peut orienter le plan P en choisissant un vecteur orthogonal unitaire $\vec{a}$: une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de P est directe (resp. indirecte) si la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{a})$ est directe (resp. indirecte).

On définit alors la notion d'**angle** pour une rotation vectorielle.

Définition 9

Soit f une rotation de E d'axe Δ dirigé par le vecteur unitaire $\vec{a}$ et $P = \Delta^\perp$. Si le plan P est orienté par $\vec{a}$, la mesure θ de l'angle de la rotation $f|_P$ est appelée **mesure de l'angle de la rotation f lorsque l'axe est orienté par $\vec{a}$** ou plus simplement l'angle de la rotation.

Attention : La mesure de l'angle d'une rotation f de E dépend donc de l'orientation de E et de l'orientation de l'axe de cette rotation.

Illustration graphique :

Proposition 24

Soit f la rotation d'axe Δ orienté par le vecteur unitaire $\vec{a}$ et d'angle de mesure θ. Alors

• Pour toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de la forme $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{a})$, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Pour tout vecteur **unitaire** $\vec{x} \in E$ orthogonal à l'axe, on a :

$$f(x) = \cos(\theta)\vec{x} + \sin(\theta)(\vec{a} \wedge \vec{x}).$$

En particulier, on a :

$$(\vec{x}|f(\vec{x})) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \vec{x} \wedge f(\vec{x}) = \sin(\theta)\vec{a}.$$

• Le réel θ est défini modulo 2π par :

* $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos(\theta)$
* le signe de $\sin(\theta)$, qui est égal à celui de $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{a})$ pour tout vecteur $\vec{u}$ n'appartenant pas à l'axe et toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

Preuve.

• Le plan $P = \Delta^{\perp}$ étant orienté par son vecteur normal $\vec{a}$, $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base orthonormale directe de ce plan. Le résultat découle alors directement du fait que la matrice de $f|_P$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

• La base $(\vec{x}, \vec{a} \wedge \vec{x}, \vec{a})$ est une base orthonormale directe, donc $(\vec{x}, \vec{a} \wedge \vec{x})$ est une base orthonormale directe du plan P, ce qui entraine que $f(\vec{x}) = \cos(\theta)\vec{x} + \sin(\theta)(\vec{a} \wedge \vec{x})$. Les deux égalités en découlent immédiatement.

• L'égalité $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos(\theta)$ est claire par la première partie de la proposition. Donc pour caractériser θ, il suffit de connaître le signe de $\sin(\theta)$. Soit $\vec{u}$ un vecteur n'appartenant pas à Δ, on peut écrire $\vec{u} = \vec{u_1} + \gamma\vec{a}$ avec $\vec{u_1} \in \Delta^{\perp} \setminus \{0\}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. On pose $\vec{v} = \vec{a} \wedge \frac{\vec{u_1}}{||\vec{u_1}||}$, alors la base $\mathcal{B}_1 = (\frac{\vec{u_1}}{||\vec{u_1}||}, \vec{v}, \vec{a})$ est une base orthonormale directe de E. En utilisant la première partie de la proposition et la matrice f dans cette base, on a

$$f(\vec{u}) = f(\vec{u_1}) + \gamma f(\vec{a}) = ||\vec{u_1}|| \left(\cos(\theta)\frac{\vec{u_1}}{||\vec{u_1}||} + \sin(\theta)\vec{v}\right) + \gamma\vec{a}.$$

Pour toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$, on a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{a}) = \det_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}, f(\vec{u}), \vec{a}) = \begin{vmatrix} ||\vec{u_1}|| & ||\vec{u_1}||\cos(\theta) & 0 \\ 0 & ||\vec{u_1}||\sin(\theta) & 0 \\ \gamma & \gamma & 1 \end{vmatrix} = ||\vec{u_1}||^2 \sin(\theta).$$

Ceci achève la démonstration. □

Exercice de colle (E1)

On oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ par sa base canonique $\mathcal{B}$ orthonormée. Caractériser l'endomorphisme f de E défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$$F = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$