# Chapitre 11

# Séries entières

## 11.1 Définitions et premières propriétés

### 11.1.1 Séries entières

**Définition 1**

On appelle **série entière** à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute fonction $f$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad (z \in \mathbb{K})$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On note : $f = \sum a_n z^n$ (abus de notations).

**Exemple 11.1. La série géométrique :** $f = \sum z^n$ *est une série entière* $(a_n = 1)$.

$$\begin{aligned} z \in D_f \quad &\iff \quad \sum z^n \text{ converge} \\ &\iff \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

*Ainsi,* $D_f = \{z \in \mathbb{K},\ |z| < 1\}$ *et pour tout* $z \in D_f$, *on a* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

**Remarque 1 :** Les séries entières sont des séries de fonctions particulières $f = \sum f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$. Les résultats du chapitre précédent s'appliquent donc, y compris si nécéssaire, quand la variable $z$ est complexe.

$$D_f = \{z \in \mathbb{K},\ \sum a_n z^n \text{ converge }\}.$$

Par définition $\sum f_n$ converge donc simplement sur $D_f$.

**Remarque 2 :**

- Si $f = \sum f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$, les $a_n$ sont appelés **coefficients** de la série entière $f$.
- On peut définir $\sum a_n z^n$ si $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est définie à partir d'un certain rang. On note dans ce cas $\sum_{n\geqslant n_0} a_n z^n$.
- Les fonctions polynomiales sont des séries entières particulières, les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang et elles sont définies sur $\mathbb{K}$ tout entier.

$$\forall z \in \mathbb{K}, \qquad P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

- En $z = 0$, $0^n$ vaut 0 si $n \geqslant 1$ et donc la série $\sum a_n 0^n$ converge toujours. Ainsi $f = \sum a_n z^n$ est toujours définie en 0 et on a :

$$f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0 0^0 = a_0.$$

### 11.1.2 Rayon de convergence

**Proposition 1 (Lemme d'Abel)**

Soit $f = \sum a_n z^n$ une série entière.
On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que la suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{K}, \qquad \Big(|z| < \rho\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\sum a_n z^n \text{ converge absolument}\Big).$$

**Preuve. (D2)**

□

**Conséquence :** Si $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge simplement sur $B(0, \rho)$.

**Définition 2**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On note

$$E = \{\rho \in \mathbb{R}^+,\ (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \subset \mathbb{R}^+.$$

Alors $E$ possède une borne supérieure (éventuellement égale à $+\infty$ si $E$ n'est pas majoré).
On l'appelle **rayon de convergence** de la série entière.

$$R = \sup(E) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

**Exemple 11.2.** *On reprend la série géométrique $f = \sum z^n$.*
- *si $\rho > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho^n = +\infty$ et donc $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Et donc si $\rho > 1$ alors $\rho \notin E$.*
- *Si $\rho \leqslant 1$ alors $|\rho^n| \leqslant 1$ et donc $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Et donc si $\rho \leqslant 1$ alors $\rho \in E$.*

*Finalement, $E = [0, 1]$ et le rayon de convergence de $\sum z^n$ est* $\boxed{R = \sup(E) = 1.}$

**Exemple 11.3.** *On considère la série entière $f = \sum \dfrac{z^n}{n!}$.*
*Pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{\rho^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc la suite $\left(\dfrac{\rho^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
*Ainsi $E = [0, +\infty[$ et le le rayon de convergence de $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est* $\boxed{R = +\infty.}$

**Proposition 2**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note $R = R\left(\sum a_n z^n\right)$ (notation au programme) le rayon de convergence.

• Si $R \neq +\infty$ : Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > R$, on a :

- $a_n z^n$ ne tend pas vers 0,
- $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée,
- $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

• Si $R \neq 0$ : Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$, on a :

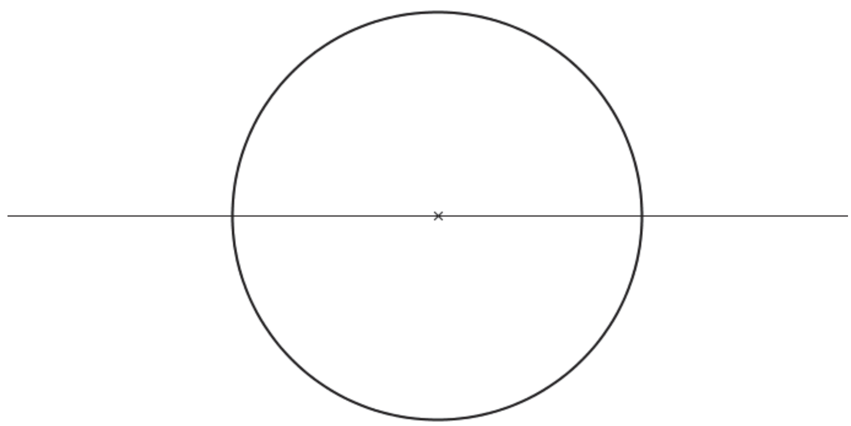
- $a_n z^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée,
- $\sum a_n z^n$ converge absolument.

**Preuve.**
Si $R \neq +\infty$ : Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > R$.

Si $R > 0$ : Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$.

$\square$

Illustration graphique :



**Définition 3**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note $R = R\left(\sum a_n z^n\right)$ le rayon de convergence. On appelle :
• Disque (ouvert) de convergence : $D = D(0, R) = \{z \in \mathbb{K},\ |z| < R\}$,
• Cercle d'incertitude : $\mathcal{C}(O, R) = \{z \in \mathbb{K},\ |z| = R\}$.

Sur le cercle d'incertitude, tous les cas de figure sont possibles.

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer de plusieurs méthodes le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n}$.

### 11.1.3 Calcul pratique du rayon de convergence

<u>En utilisant la définition :</u>

**Exemple 11.4.** *Déterminer le rayon de convergence de* $\sum z^{n^2}$.

**Exemple 11.5.** *Déterminer le rayon de convergence de* $\sum 2^{\sqrt{n}} z^n$.

Utilisation de la règle de D'Alembert : On rappelle l'énoncé suivant démontré dans le chapitre *Séries numériques*.

**Proposition 3 (Règle de D'Alembert pour les séries numériques)**

Soit $\sum u_n$ une série à termes **strictement positifs**. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

On a alors :

- si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge (et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$)
- si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge (et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$)
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{2^n}{n} z^{2n}$.

**Proposition 4 (Règle de D'Alembert pour les séries entières)**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que :

- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant N_0,\ a_n \neq 0$,
- il existe $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$.

Alors $R = R\left(\sum a_n z^n\right) = \dfrac{1}{\ell}$, avec pour convention $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$.

**Preuve.**

□

**Exercice de colle (E1)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$.

**Remarque importante :** on ne pouvait pas appliquer ce théorème à la série entière $\sum \dfrac{2^n}{n} z^{2n}$ car ses coefficients $a_{2p+1}$ d'indices impairs sont tous nuls.

En utilisant les théorèmes de comparaison :

**Proposition 5**

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note $R_a = R(\sum a_n z^n)$ et $R_b = R(\sum b_n z^n)$ les rayons de convergence respectifs.

- Si pour $n$ assez grand on a $|a_n| \leqslant |b_n|$ (ce qui est le cas quand $|a_n| = \underset{n\to+\infty}{o}(|b_n|)$ ) alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| = \underset{n\to+\infty}{O}(|b_n|)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

**Preuve.**

□

**Exemple 11.6.** *Déterminer le rayon de convergence de* $\sum \frac{\sin(n)}{n!} z^n$.

L'exercice suivant figure explicitement dans le programme de PSI.

**Exercice de colle (E1)**

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

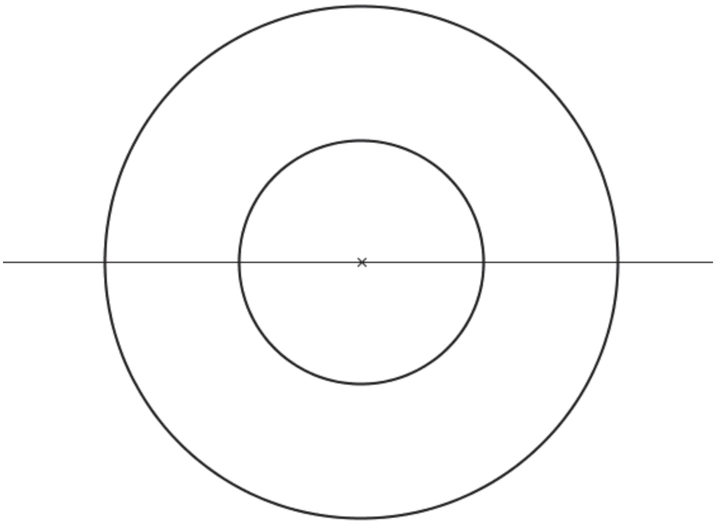
### 11.1.4 Opération sur les séries entières

Somme :

**Proposition 6**

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note $R_a$ et $R_b$ les rayons de convergence respectifs. On note $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.
- On a $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a \neq R_b$, on a $R = \min(R_a, R_b)$.

**Preuve.**



□

**Remarque :** De manière évidente, si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

**Exemple 11.7.** *Avec les notations de la proposition précédente, trouver un exemple pour lequel* $R > \min(R_a, R_b)$.

Produit de Cauchy :
On rappelle la proposition suivante.

**Proposition 7**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Leur produit de Cauchy est la série $\sum w_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors $\sum w_n$ converge absolument et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

On l'applique en particulier aux séries entières.

**Proposition 8**

Soient $f = \sum a_n z^n$ et $g = \sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note $R_a$ et $R_b$ les rayons de convergence respectifs. La série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy de $f$ et de $g$, son rayon de convergence vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et

$$\forall z \in B(0, \min(R_a, R_b)), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

**Preuve.**

□

**Remarque :** Il n'y a pas, comme pour les sommes de séries entières, d'hypothèse sous laquelle on aurait $R = \min(R_a, R_b)$.

**Exemple 11.8.** *On pose* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 1 - z$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
*Ainsi* $R_a = +\infty$ *(polynôme) et* $R_b = 1$ *(série géométrique). On détermine la série entière définie par leur produit de Cauchy.*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 1 - 1 = 0 \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

*On a donc* $\sum c_n z^n = 1$ *(constante) et donc* $R = +\infty$.

*On remarque que sur* $]-1,1[$*, d'après ce qui précède on a* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1$*, c'est-à-dire :*

$$\forall z \in ]-1,1[ \qquad (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1,$$

*on le savait déjà !*

**Application aux séries exponentielles :** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
On verra que cette définition coïncide avec celle donnée en première année :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \qquad e^z \;=\; e^x \;\times\; e^{iy}.$$

Par un produit de Cauchy, on a démontré dans le chapitre « Séries numériques », que

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z').$$

## 11.2 Séries entières de la variable réelle

Dans ce paragraphe, mis à part ce qui concerne la continuité, on considère des séries entières fonctions d'une la variable réelle (souvent notée $x$ ou $t$).

$$f: \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Si le rayon de convergence est $R > 0$ alors le disque de convergence est $]-R, R[$ et le cercle d'incertitude est $\{-R, R\}$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_f = \left\{t \in \mathbb{R},\ \sum a_n t^n \text{ converge}\right\} = ]-R, R[, ]-R, R], [-R, R[ \text{ ou } [-R, R].$$

**Exemple 11.9.** • *Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est* $]-1,1[$.

• *Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est* $]-1,1]$.

• *Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est* $[-1,1]$.

### 11.2.1 Convergence normale

**Proposition 9**

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière dont on note $R > 0$ le rayon de convergence.
• Pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$ tel que $\rho < R$ la série $\sum a_n t^n$ converge normalement sur $[-\rho, \rho]$.
• La série $\sum a_n t^n$ converge donc normalement **sur tout segment** de $]-R, R[$.

**Preuve.**

□

**Remarque :** Avec les notations précédentes, et par un raisonnement similaire, on peut montrer que si $\sum |a_n R^n|$ converge alors la série $\sum a_n t^n$ converge normalement sur $[-R, R]$.

### 11.2.2 Continuité

**Proposition 10**

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière dont on note $R > 0$ le rayon de convergence. Alors l'application $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est continue sur $]-R, R[$.

**Preuve.**

□

Pour étudier la continuité en $\pm R$ on pourra :

• Etudier la convergence normale sur $[-R, R]$ par exemple en utilisant la remarque précédente.

• Etudier la convergence uniforme sur $[0, R]$ (ou $[-R, 0]$) par exemple en utilisant le théorème des séries alternées.

**Exemple 11.10.** *Démontrer que l'application* $f : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$ *est continue sur son ensemble de définition.*

### 11.2.3 Continuité par rapport à la variable complexe

En considérant $z = x + iy$ comme un élément de $\mathbb{R}^2$, on peut considérer l'application $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ comme une fonction de deux variables $x, y$ réelles. On admet le résultat suivant.

**Proposition 11**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe dont on note $R > 0$ le rayon de convergence.

Alors l'application $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur la boule ouverte $B(0, R)$.

### 11.2.4 Dérivation et intégration terme à terme

**Lemme**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note $R$ le rayon de convergence. On définit :

- $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ : « série intégrée terme à terme »
- $\sum n a_n z^{n-1}$ : « série dérivée terme à terme »

Ces deux séries ont aussi pour rayon de convergence $R$.

**Preuve.**

□

**Proposition 12**

Soit $f = \sum a_n t^n$ une série entière dont on note $R > 0$ le rayon de convergence.

• On peut « prendre les primitives » $f$ terme à terme sur $]-R, R[$ :

$$\forall t \in ]-R, R[, \quad \int f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

et le rayon de convergence est conservé.

• La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et on peut dériver $f$ terme à terme sur $]-R, R[$ :

$$\forall t \in ]-R, R[, \quad f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

et le rayon de convergence est conservé.

**Preuve.**

□

**Première conséquence : quelques développements en séries entière**

On part des séries géométriques :

$$\forall t \in ]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \qquad (R=1)$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \qquad (R=1)$$

En intégrant terme à terme ces séries entières, on trouve qu'il existe des constantes réelles $C_1$ et $C_2$ telles que pour tout $t \in ]-1,1[$, on ait :

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C_1 \qquad \text{et} \qquad \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + C_2$$

En $t = 0$, on trouve $C_1 = C_2 = 0$ et donc :

$$\forall t \in ]-1,1[, \qquad \ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad (R = 1)$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \qquad (R = 1)$$

**Exercice de colle (E2)**

Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

En posant $t = u^2$, on a $|t| < 1 \iff |u| < 1$.

Et donc $\forall u \in ]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1}{1+u^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^{2n} \qquad (R=1)$.

En intégrant terme à terme cette série entière, on trouve qu'il existe une constante réelle $C$ telle que pour tout $u \in ]-1,1[$, on ait :

$$\operatorname{Arctan}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} + C$$

En $u = 0$, on obtient $C = 0$ et donc :

$$\forall t \in ]-1,1[, \qquad \operatorname{Arctan}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad (R=1)$$

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $f = \sum n^2 t^n$.

### 11.2.5 Dérivées successives

**Proposition 13**

Soit $f = \sum a_n t^n$ une série entière dont on note $R > 0$ le rayon de convergence.
• La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, on peut dériver terme à terme et le rayon de convergence est conservé.
• Les coefficients $a_n$ sont uniquement déterminés par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Preuve.**

$\square$

**Exercice de colle (E1)**

Prolonger la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ par continuité et montrer que la fonction prolongée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

### 11.2.6 Fonction développable en série entière

**Définition 4**

Soit $r > 0$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $]-r, r[\subset I$.
On dit que $f$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ telle que

$$\forall t \in ]-r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad (R \geqslant r)$$

**Exemple 11.11.** *La fonction* $f : t \in ]-1, +\infty[\longmapsto \ln(1+t)$ *est développable en série entière sur* $]-1, 1[$ *puisque*

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad f(t) = \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}.$$

Le paragraphe précédent a alors pour conséquence la proposition suivante.

**Proposition 14**

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $\quad \forall t \in ]-r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et les coefficients $a_n$ sont **uniquement** déterminés par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

### 11.2.7 Série de Taylor associée à une fonction

**Définition 5**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $I$ est un intervalle ouvert contenant 0.
Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$, on appelle série de Taylor associée à $f$ (en 0) la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière, il faut :

- S'assurer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0,
- Montrer que la série de Taylor $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ a un rayon de convergence $R > 0$,
- Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour $t \in ]-r, r[$ on ait $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$.

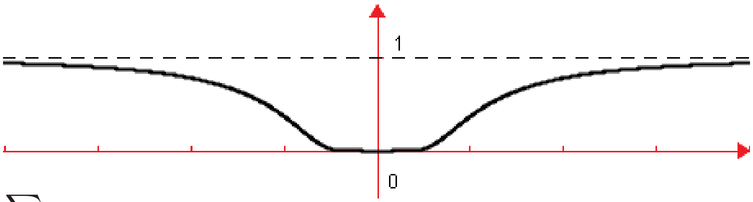
**Remarque :** le dernier point est important. Il se peut que la série de Taylor converge mais que sa somme soit distincte de $f$.

**Exemple 11.12.** *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} \text{ si } t \neq 0 \\ \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

*En raisonnant par récurrence et en appliquant le théorème de la limite de la dérivée, on montrerait que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$




*Ainsi, la série de Taylor associée à $f$ est $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum 0 = 0$.*
*Elle converge évidemment sur $\mathbb{R}$ (simplement), mais sa somme ne coïncide avec $f(t)$ qu'en $t = 0$.*

### 11.2.8 Développements en série entière de référence

**Proposition 15**

La fonction exponentielle (définie comme unique solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (R = +\infty)$$

**Preuve.**

□

En écrivant $\operatorname{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\operatorname{sh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, on obtient :

$$\begin{array}{lrcll} \forall t \in \mathbb{R}, & \operatorname{ch}(t) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} & (R = +\infty) \\ & \operatorname{sh}(t) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} & (R = +\infty) \end{array}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange, puisque les dérivées successives de sin et de cos sont bornées sur $\mathbb{R}$, on montrerait les égalités suivantes.

$$\begin{array}{lrcll} \forall t \in \mathbb{R}, & \cos(t) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} & (R = +\infty) \\ & \sin(t) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} & (R = +\infty) \end{array}$$

**Conséquence :** On peut maintenant vérifier que la définition de $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ coïncide bien avec celle vue en première année.

• Si $z = x \in \mathbb{R}$, on vient de démontrer que $\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

• Si $z = iy \in i\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= \cos(y) + i\sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (i^2)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} i(i^2)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \end{aligned}$$

• Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a vu par produit de Cauchy que $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$ et donc le résultat est vrai :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \qquad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(x)\Big(\cos(y) + i\sin(y)\Big).$$

Pour finir, on donne les développements en série entière suivants.

$$\begin{array}{lrcl} \forall \alpha \in \mathbb{R}, & (1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots \\ & & = & 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \end{array}$$

Avec : $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ (polynôme).

**Exercice de colle (E2)**

Démontrer la formule du binôme négatif : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in ]-1,1[,\quad \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}} = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}.$

**Remarque :** La difficulté est parfois de la reconnaître quand on part de la somme...

## 11.3 Tableaux récapitulatifs

• **Développements en série entière de référence valables sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ :**

| | |
|---|---|
| $\forall z \in \mathbb{K}$ avec $\lvert z\rvert < 1,\quad \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ | $R = 1$ |
| $\forall z \in \mathbb{K}$ avec $\lvert z\rvert < 1,\quad \dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$ | $R = 1$ |
| $\forall z \in \mathbb{K},\quad \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ | $R = +\infty$ |

• **Développements en série entière de référence valables uniquement sur $\mathbb{R}$ :**

| | |
|---|---|
| $\forall x \in ]-1,1[,\quad \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $R = 1$ |
| $\forall x \in ]-1,1[,\quad \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $R = 1$ |
| $\forall x \in ]-1,1[,\quad \mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ | $R = 1$ |
| $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $R = +\infty$ |
| $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $R = +\infty$ |
| $\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $R = +\infty$ |
| $\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $R = +\infty$ |
| $\forall x \in \mathbb{R},\quad (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ | $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ |