PSI 2024-2025
Lycée Châtelet

Exercices de Mathématiques

PSI

Volume 1

S. Dion

Table des matières

Feuille 1

Complexes

Extraits de rapports de jury :

- **Mines Telecom 2021 :** *Le cours de première année est souvent très mal connu, par exemple celui sur les nombres complexes et la trigonométrie.*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Les calculs sur les complexes peuvent également poser problème, notamment la recherche du nombre de racines cubiques d'un complexe non nul, ou encore la méconnaissance de l'expression des racines $n-$ièmes de l'unité.*

Exercice 1 (❄)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

1. $A_n(x,y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x+ky)$
2. $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}$
3. $D_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k$ lorsque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (❄❄)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b \in]0, \pi[$.
Écrire sous la forme exponentielle les complexes suivants.

$$z_1 = 4ie^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2 = \sin(\alpha) + i\cos(\alpha)$$

$$z_3 = -2e^{-i\frac{\pi}{6}} \qquad z_4 = z_1 z_3$$

$$z_5 = e^{ia} + e^{ib} \qquad z_6 = \frac{1+e^{ia}}{1-e^{ib}}$$

Exercice 3 (❄)

Déterminer le module et l'argument de $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)$ (on discutera suivant les valeurs de $\varphi \in \mathbb{R}$).

Exercice 4 (❄)

1. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq 1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.
2. Soient z et z' deux nombres complexes distincts, et tels que $|z| = |z'| = r$.
   Démontrer que $\dfrac{r^2 - zz'}{z - z'}$ est réel.

Exercice 5 (❄)

Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que les points d'affixes $1, z, iz$ soient alignés.

Exercice 6 (❄)

Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z + \bar{z} = |z|$.

Exercice 7 (❄)

Soient A, B, C, D des points du plan dont on note a, b, c, d les affixes complexes. Que dire du quadrilatère $ABCD$ lorsque $a + c = b + d$ et $a + ib = c + id$?

Exercice 8 (❄)

Déterminer les complexes z qui vérifient $z^3 = i/\bar{z}$.

Exercice 9 (❄❄)

Déterminer les complexes z non nuls tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z - 1$ aient le même module.

Exercice 10 (❄)

Soit z un nombre complexe différent de 1. Démontrer l'équivalence suivante :

$$|z| = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 11 (❄❄)

Pour $z \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $Z = \dfrac{1}{2}\left(z^2 - \dfrac{1}{z^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble des z tels que Z est réel.
2. Déterminer l'ensemble des z tels que Z est imaginaire pur.

Exercice 12 (❄)

On note $\alpha = e^{2i\pi/7}$ et on pose $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$, et $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués puis que $\mathcal{R}\mathrm{e}(S) > 0$.
2. Calculer $S+T, ST, S$ et T.

Exercice 13 (❄)

Résoudre l'équation $(\mathcal{E}):\ e^z = 2 - 2\sqrt{3}i$.

Exercice 14 (❄)

Résoudre le système suivant d'inconnue $(z,z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^z + e^{z'} & = & 2 \\ e^{z+z'} & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 15 (❄)

1. Déterminer les racines carrées de $1 + 2\sqrt{2}i$.
2. En déduire les solutions de l'équation :

$$2z^2 + 2iz - 1 - i\sqrt{2} = 0.$$

Exercice 16 (❄)

Resoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + z - (1+3i) = 0$.

Exercice 17 (❄)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé (O, e_1, e_2). Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie :

1. $\mathrm{Arg}(z-i) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
2. $\mathrm{Arg}(z-i) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [\pi]$
3. $|z-1| = |z+2i|$
4. $|(3+4i)z - i| = 2$

Exercice 18 (❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (z + \omega^k)^n = n(z^n + 1).$$

Exercice 19 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$.
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 20 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$(\mathcal{E}):\ 1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0.$$

Exercice 21 (CCINP PC 2021 et 2022 - ❄)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathcal{E}_1):\ z^n = e^{i\pi/3}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(\mathcal{E}_2):\ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

Exercice 22 (IMT PSI 2019 - ❄)

Soit $n \geq 2$ un entier, on pose $z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

1. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |z^k - 1| = 2\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Exercice 23 (CCINP PC 2021 - ❄❄)

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.
Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k$.
2. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (x - z_k) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.
3. En déduire la valeur de $C_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 24 (TPE PC 2019 - ❄❄)

En factorisant $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 25 (Nav. PSI 2018, Mines-P. PC 2022 - ❄❄)

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$.
2. On suppose que n est impair. On note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
   Calculer $p = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \omega_k}{1 + \omega_k}$.
3. Exprimer p en fonction de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Feuille 2

Polynômes

Extraits de rapports de jury :

- **CCINP 2022 PSI :** *Les calculs sur les polynômes, en particulier leur factorisation (en utilisant à bon escient la division euclidienne) sont souvent maladroits.*
- **Centrale 2021 PSI :** *Le jury remarque que certains candidats sont parfois bloqués par la méconnaissance de résultats élémentaires de première année voire de terminale. Quelques exemples : un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle, l'expression des racines $n-$ième de l'unité...*
- **Oral ex-ENSAM 2018 :** La factorisation de polynômes est devenue très compliquée pour beaucoup de candidats.
- **Oral Mines-Ponts 2017 :** La recherche des racines d'un trinôme comme $3X^2 - 1$ ne nécessite pas le calcul du discriminant, surtout si cela conduit à donner un résultat non simplifié et/ou faux.
- **Oral Mines-Ponts 2017 :** La division euclidienne de polynômes est souvent mal utilisée, en particulier les hypothèses vérifiées par le reste sont parfois passées sous silence.

Exercice 26 (CCINP PC 2023)

Le polynôme $P(X) = X^4 + 4$ est-il irréductible sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 (CCINP PC 2023 - ❄)

Soit $P(X) = X^3 - (2+i)X^2 + 3X + i - 2$. Montrer qu'il possède une racine réelle et le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 28 (CCINP PC 2023 - ❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

1. Montrer que $(X-1)^3$ divise P_n.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^3$.

Exercice 29 (❄)

1. Décomposer $X^4 + 1$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Quels sont les polynômes de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$ qui divisent $X^4 + 1$?

Exercice 30 (❄)

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si $P^2 - Q^2$ est un polynôme constant non nul, alors P et Q sont aussi des polynômes constants.

Exercice 31 (CCINP PC 2022 - ❄)

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$(X^2 - X)P''(X) = 6P(X).$$

Exercice 32 (ENSAM PT 2014 - ❄)

On note a_1, a_2, a_3 les racines de $P(X) = X^3 + X^2 + 1$.

1. Calculer le déterminant de $\mathcal{S} = \begin{cases} x + a_1 y + a_1^2 z = a_1^4 \\ x + a_2 y + a_2^2 z = a_2^4 \\ x + a_3 y + a_3^2 z = a_3^4 \end{cases}$
2. Montrer qu'il est non nul.
3. Effectuer la division euclidienne de X^4 par $P(X)$ et trouver une solution particulière de $\mathcal{S}$. Conclure.

Exercice 33 (CCINP PC 2019 - ❄)

Soit $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ est racine de P et déterminer sa multiplicité.

Exercice 34 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 35 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$.

Exercice 36 (Centrale PSI 2017 - ❄)

Soit $P(X) = X^3 - X + 1$.

1. Montrer que P possède 3 racines distinctes b_1, b_2, b_3 éventuellement complexes.
2. Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1+b_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b_2 \end{vmatrix}$.

Exercice 37 (✻)

Soit $n \geq 2$ un entier et $P_n(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$.

1. Calculer $P_n(X) - P_n'(X)$.
2. Montrer que les racines complexes de P_n sont simples.

Exercice 38 (Mines-Ponts PSI 2023 - ✻✻)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k)$ est premier. Montrer que P est constant.

Exercice 39 (CCINP PSI 2022 - ✻✻)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et :

$$\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto (X-a)(P'(X) - P(a)) - 2(P(X) - P(a)).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-a)^k$ divise $\varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
   Trouver le plus grand entier k qui vérifie cette condition.
3. Déterminer le noyau et l'image de φ.

Exercice 40 (Centrale PC 2022 - ✻✻)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
2. Calculer T_n lorsque $n \in [\![0,3]\!]$.
3. Calculer le degré et le coefficient dominant de T_n.
4. Montrer que $(X^2-1)T_n''(X) + XT_n'(X) - n^2T_n(X) = 0$.
5. Expliciter les coefficients de T_n.

Exercice 41 (ENSAM PSI 2017 - ✻✻)

On veut montrer que π est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $q^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$.
2. Soient, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$Q_n(X) = \frac{X^n(bX-a)^n}{n!} \text{ et } I_n = \int_0^\pi Q_n(x)\sin(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}}.$$
   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. Etablir la relation $Q_n' = (2bX-a)Q_{n-1}$. Puis à l'aide de cette relation et de la formule de Leibniz, exprimer les dérivées successives de Q_n en fonction de celles de Q_{n-1}.
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $Q_n^{(k)}(0) \in \mathbb{N}$ et $Q_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $I_n \in \mathbb{N}$ et conclure.

Exercice 42 (EIVP PSI 2016 - ✻✻✻)

Soit $P(X) = Q(X) + iR(X) \in \mathbb{C}[X]$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
On suppose que toutes les racines de P ont une partie réelle négative.
Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, comparer $|P(z)|$ et $|\overline{P}(z)|$.
Montrer alors que Q et R sont scindés sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43 (Centrale PC 2021 - ✻✻)

On considère S l'ensemble des polynômes unitaires de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et dont les racines complexes sont de module inférieur ou égal à 1.

1. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + X^3 \in S$. Exprimer les relations entre les a_i et les racines z_1, z_2 et z_3 de P.
2. Montrer que S est un ensemble fini.
3. Montrer que, si $P \in S$, ses racines non nulles sont de module 1.
4. Déterminer tous les polynômes appartenant à S.

Exercice 44 (Mines-Télécom MP 2016 - ✻✻✻)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur n pour que $P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ ait une racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 45 (Mines-P. PC et MP 2021 - ✻✻✻)

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ distincts.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :
$$(P(X^p))^q = (P(X^q))^p.$$

Exercice 46 (Mines-Ponts PC 2019 - ✻✻✻)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [-1, 1]$.
On note $P(X) = X^{n+1} - aX^n + aX - 1$.
Montrer que les racines de P sont de module 1.

Exercice 47 (Centrale PSI 2022 - ✻✻)

1. Soit $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Exhiber une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u n'a que des coefficients égaux à 0 ou 1.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$P - P' = Q.$$
   (b) Montrer que, si Q est à valeurs positives, il en est de même pour P.
   (c) Montrer que, si Q est à coefficients positifs, il en est de même pour P.

Exercice 48 (Centrale PC 2019 - ✻✻✻)

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme R_n tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ R_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$$
et donner une expression de R_n.

Exercice 49 (Mines-Ponts PC 2021 - ✻✻✻)

On note U l'ensemble des complexes de modules 1.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) \subset U$.

Exercice 50 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄❄)

Soit $P \in \mathbb{Q}_n[X]$. Montrer l'équivalence entre les propriétés :

(i) $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$

(ii) $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k) \in \mathbb{Z}$

(iii) $\exists m \in \mathbb{Z},\ \forall k \in [\![m, m+n]\!],\ P(k) \in \mathbb{Z}$

Ind : on pourra introduire les polynômes :

$$H_k(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

Exercice 51 (Centrale PSI et Mines-P. PC 2021 - ❄❄)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

1. Soit ω une racine de P.
   ontrer que ω^2 est aussi racine de P.
2. Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P
4. Déterminer tous les polynômes solution.

Feuille 3

Suites numériques

Extraits de rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *L'analyse asymptotique demeure très problématique : les équivalents et les développements limités sont souvent grossièrement faux ou n'ont pas sens : des fonctions équivalentes à zéro, des limites qui dépendent encore de la variable. La notion d'équivalent ne vient pas toujours à l'idée, et elle est souvent mal appliquée : pour certains candidats des suites ou des fonctions pour lesquelles l'intégrale ou la suite ont le même comportement sont équivalentes*
  Un nombre non négligeable de candidats pense qu'une suite positive qui converge vers zéro est décroissante.
- **CCINP 2019 :** *La manipulation des équivalents pose des difficultés (addition d'équivalents, constantes multiplicatives négligées).*
- **CCP 2018 :** *On notera que les ≪ croissances comparées ≫ sont trop souvent mal utilisées et qu'il ne suffit pas d'avoir une exponentielle ou un logarithme pour pouvoir l'appliquer.*
- **Centrale 2022 :** *La maitrise des développements limités est loin d'être acquise pour tous les candidats. Rappelons que pour donner le développement limité d'une composée $f \circ g$ de deux applications, on commence par celui de g. Peu d'étudiants utilisent des développements limités au sens fort (avec des grands O), c'est dommage car ils sont suivant les situations plus ou autant économiques que ceux avec un petit o, pire certains ignorent la définition d'un grand O ou en donnent une sans recours à la valeur absolue. Rappelons enfin que si une suite de terme général u_n tend vers ℓ, on a $u_n = \ell + o(1)$.*
  Le calcul asymptotique, l'appréciation des ordres de grandeur n'est pas toujours maitrisé, en tout cas pas avec la virtuosité attendue chez ceux qui se destinent à une profession scientifique.

  Il est à noter des confusions fréquentes sur le vocabulaire : majorée, majorée en valeur absolue, bornée. Du reste les candidats omettent souvent les valeurs absolues, pourtant nécessaires lorsqu'il s'agit de montrer la convergence d'intégrales ou de séries. Dans $\mathbb{C}$ l'omission du module conduit à des inégalités entre complexes.
- **Centrale 2018 :** *Pour bien préparer ces épreuves, il faut tout d'abord travailler son cours puis les techniques usuelles. Un candidat qui connait son cours et sait comment aborder les problèmes usuels est assuré d'avoir une note convenable.*

  Il faut faire preuve de rigueur quand on applique un théorème : il faut en citer et en vérifier toutes les hypothèses. Au niveau des raisonnements, il faut bien distinguer les hypothèses, le résultat à montrer et indiquer la méthode employée pour y arriver.

  D'une manière générale, les candidats n'illustrent pas assez leur propos par des dessins, des figures ou des schémas, certains demandent même la permission de faire une figure. Le jury encourage et apprécie le recours spontané à des illustrations graphiques.
- **Mines Telecom 2022 :** *Les équivalents et les développements limités sont mal maitrisés chez certains candidats, de même que l'intégration par parties.*

  On observe aussi souvent une confusion entre le passage à la limite dans les inégalités et le théorème d'encadrement, aussi bien pour les fonctions que pour les suites : dans le premier cas l'existence de la limite est dans les hypothèses et le résultat est la valeur de la limite, dans le second cas l'existence de la limite est dans la conclusion, avec, en plus, sa valeur.
- **Mines-Ponts 2019 :** *Le jury remarque que les candidats hésitent de plus en plus à se lancer dans un petit calcul (en analyse notamment) alors que celui-ci peut les faire avancer. Une grande partie des candidats a du mal à établir des majorations ou dominations simples, indispensables pour l'utilisation de nombreux théorèmes d'analyse.*

  Les calculs d'équivalents, développements limités (même à l'ordre 3) sont souvent trop approximatifs. Trop de candidats ne ressentent pas le besoin de supprimer les termes négligeables devant le reste dans un développement limité ou asymptotique. Les formules de Taylor sont mal sues.

  Les hypothèses de récurrence doivent être spontanément écrites avec soin. L'examinateur de devrait pas avoir à insister auprès du candidat pour obtenir une hypothèse de récurrence écrite in extenso avec les bons quantificateurs. Plus généralement, un usage éclairé des quantificateurs peut s'avérer déterminant pour certains problèmes. Leur absence conduit certains candidats à passer complètement à côté d'un exercice.

  Le schéma d'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas bien maîtrisé par certains candidats.

Exercice 52 (Vrai ou faux- ❄)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques ne s'annulant pas. L'affirmation suivante est-elle correcte ? Justifier.

$$\ll \text{Si } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ alors } e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n} \gg$$

Comment la modifier pour qu'elle soit correcte ?

Exercice 53 (Limite - ❄)

Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$.

Exercice 54 (Limite - ❄)

Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$.

Exercice 55 (Limite - ❄)

Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

Exercice 56 (Limite - ❄)

Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)^{\ln(x)}$.

Exercice 57 (Limite - ❄)

Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{1/x}$.

Exercice 58 (Limite - ❄)

Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{1/x^2}$.

Exercice 59 (IMT PSI 2018 - ❄)

Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

Exercice 60 (Limite - ❄)

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Exercice 61 (ENSEA 2021 (Andy D.)- ❄❄)

Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{p}\right)^{1/n}\right)^n$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,p}$.

Exercice 62 (Limites - ❄❄)

Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^{x^x}-1\right),\quad \lim_{x\to 0^+}\left(x^{x^x-1}\right) \text{ et } \lim_{x\to 0^+} x^{x^{x-1}}$$

Exercice 63 (Divergence - ❄❄)

1. Démontrer que la suite $(e^{in\pi/6})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Démontrer que la fonction f définie par $f(x)=\cos(x)$ diverge en $+\infty$.
3. Démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 64 (Équivalents - ❄)

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en les points indiqués.

1. $x\mathrm{ch}(x)-\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} ?$
2. $x\sqrt{1+x}-2\mathrm{ch}(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} ?$

Exercice 65 (Équivalents - ❄)

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en les points indiqués.

1. $\ln(n^2)-\sin(n)-\ln(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$
2. $2\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}-\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$
3. $E(n\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$

Exercice 66 (Équivalents - ❄❄)

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en les points indiqués.

1. $e^x + x^{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} ?$
2. $\sqrt[x+1]{x+1}-\sqrt[x]{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} ?$

Exercice 67 (Équivalent - ❄❄)

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 68 (St Cyr PC 2018 - ❄)

Donner le développement limité à l'ordre 5 de en 0 de

$$f(x)=\ln(\cos(x)).$$

Exercice 69 (CCP PSI 2017 - ❄)

Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ quand $n\to+\infty$.

Exercice 70 (Récurrence - ❄)

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 71 (Récurrence - ❄)

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\quad \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} > \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 72 (Récurrence - ❄)

Démontrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, 4^n-1 est un multiple de 3.

Exercice 73 (Suite récurrente d'ordre 2 - ❄)

Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}+3u_{n+1}-4u_n=0.$$

Exercice 74 (Suite récurrente d'ordre 2 - ❄)

Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0, u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0.$$

Exercice 75 (Suites récurrentes d'ordre 2 - ❄)

Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1, u_1 = -2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

Exercice 76 (Suites récurrentes d'ordre 2 - ❄)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + (a^2 - 1)u_n.$$

Quelles sont celles qui convergent ?

Exercice 77 (Suite récurrente - ❄)

Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0, u_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}.$$

Exercice 78 (Suite récurrente - ❄)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} - u_n = a.$$

Exercice 79 (Suites arithmético-géométriques - ❄)

Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2.$$

Exercice 80 (Nature - ❄❄)

Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(\frac{n^2\pi + 1}{n}\right) \text{ et } v_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n}).$$

Exercice 81 (Suites adjacentes - ❄)

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $0 \leq a_0 \leq b_0$ et

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}.$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Déterminer un réel λ tel que la suite $(\lambda a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit stationnaire.
3. En déduire la limite des deux suites.
4. Calculer a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et de a_n. Retrouver sa limite.

Exercice 82 (Mines-Télécom PSI 2017 - ❄)

Pour $n \geq 2$ entier, on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln(n) \text{ et } b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 2}$ et $(b_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes.

Exercice 83 (Suites à croissance contrôlée (E1) - ❄)

Soit $L > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe vérifiant

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L.$$

1. On suppose que $L < 1$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Est-ce encore vrai pour $L = 1$?
3. Application : soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$.

Exercice 84 (Mines-Ponts 2018 MP - ❄❄)

Montrer que si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante telles que $u = v + w$.

Exercice 85 (Suite récurrente - ❄)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}.$$

1. Etudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x+2}$ et tracer son graphe.
   On précisera les valeurs prises par f en 0 et en 1.
2. Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe dans $[0, 1]$. On note L ce point fixe.
3. Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la majoration
$$|u_{n+1} - L| \leq \frac{2}{3}|u_n - L|.$$
5. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Déterminer enfin, en entier N à partir duquel u_n est une approximation de L à 10^{-5} près.

Exercice 86 (Suite récurrente - ❄)

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

Exercice 87 (Suite récurrente - ❄)

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Exercice 88 (Suite récurrente - ❄)

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}.$$

Exercice 89 (Suite récurrente - ❄)

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \geq 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n).$$

Exercice 90 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,+\infty[$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n}-1}{u_n}\right).$$

Exercice 91 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 92 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄❄)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une application $1-$lipschitzienne.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [a,b]$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)).$$

Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers un points fixe de f.

Exercice 93 (EIVP PSI 2017 - ❄❄)

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}\mathrm{d}x$.
   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et en déduire un équivalent de nI_n en $+\infty$.
3. Trouver $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $I_n = a+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 94 (Suite définie implicitement - ❄)

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un unique réel strictement positif, noté u_n, tel que
   $$(u_n)^n\ln(u_n) = 1.$$
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_n > 1$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante.
4. En déduire qu'elle converge et que sa limite est 1.

Exercice 95 (Saint-Cyr 2021 (Louis-Victor G.)- ❄❄)

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ il existe un unique réel $x\in[0,1]$ solution de :
   $$x + x^2 + \cdots + x^n = 1.$$
   On note u_n cette solution.
2. Écrire une fonction python permettant de trouver la valeur de u_n avec une précision $p>0$.
3. Conjecturer avec python une limite éventuelle pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. En déduire qu'elle converge puis déterminer sa limite.

Exercice 96 (Suite définie implicitement - ❄❄)

1. Démontrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique réel solution de l'équation
   $$x - e^{-x} = n.$$
   On note x_n cette solution.
2. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $x_n \geq n$. En déduire la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
4. Déterminer un équivalent de $y_n = x_n - n$.
5. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 97 (CCINP 2018 (Clémence H.), IMT 2021 - ❄❄)

1. Démontrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel dans $[1,+\infty[$ solution de l'équation
   $$x - \ln(x) = n.$$
   On note u_n cette solution.
2. Déterminer si elle existe la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer un équivalent de u_n.
4. Déterminer un équivalent de $v_n = u_n - n$.
   En déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 98 (Suite définie implicitement - ❄❄)

Soit $n\geq 3$ un entier. On considère l'équation (E_n) définie par $x^n = e^x$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation (E_n) possède deux solutions strictement positives notées u_n et v_n telles que :
   $$1 < u_n < n < v_n.$$
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante et convergente, et déterminer sa limite.
   Trouver aussi un équivalent en $+\infty$ de $u_n - 1$.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).
   Montrer aussi que, pour n assez grand, $v_n \leq n^2$ et montrer que :
   $$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Exercice 99 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

1. Montrer que pour tout $n\geq 3$, $e^x = nx$ admet deux solutions x_n et y_n avec $0\leq x_n < y_n$.
2. Étudier la monotonie des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'elles admettent une limite à déterminer.
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ puis trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$.
4. Soit $\varepsilon > 0$.
   Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1+\varepsilon)\ln(n)$.
   En déduire un équivalent de y_n.

Exercice 100 (Suite définie implicitement - ❄❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x + x^2 - nx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet un minimum μ_n atteint en un point noté x_n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3. Déterminer des équivalents simples de x_n et de μ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 101 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \longmapsto x^{3n} - 3nx + 1$.

1. Montrer que, pour tout n, f_n admet une unique racine dans $]1, 2[$. On note x_n cette racine.
2. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $x_n = 1 + a\dfrac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.
3. Trouver $b \in \mathbb{R}$ tel que $x_n = 1 + a\dfrac{\ln(n)}{n} + b\dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 102 (Mines - Ponts PSI 2015 - ❄❄❄)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et l'unicité d'un réel u_n vérifiant $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.
Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en donner un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 103 (Centrale PSI 2016 - ❄❄❄)

1. Montrer que pour $n \geq 3$, $P_n(X) = X^n - nX + 1$ admet une unique racine x_n dans $]0, 1[$.
2. Trouver un équivalent de x_n de la forme $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Trouver un équivalent simple de $x_n - a_n$.

Exercice 104 (ICNA PSI 2017 - ❄❄)

Soit f continue et bijective de $[0, 1]$ dans lui-même, telle que f^{-1} soit continue et telle que :

$$\forall x \in [0, 1],\ f(2x - f(x)) = x.$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
   La fonction f est-elle croissante ou décroissante ?
2. On suppose qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $x_1 = f(x_0) \neq 0$.
   En considérant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f(x_{n-1}) = x_n$, obtenir une contradiction.
   En déduire f.

Exercice 105 (CCINP PC 2021 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan .
2. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ a une unique solution x_n dans l'intervalle I_n et que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.
3. On pose $y_n = x_n - n\pi$.
   (a) Montrer que $y_n = \text{Arctan}(x_n)$ et donner la limite de y_n.
   (b) Montrer que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n - \dfrac{\pi}{2}$ et déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que $y_n - \dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{n}$.
4. Montrer que $\tan\left(y_n - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n\pi}\right) = \dfrac{x_n \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) - 1}{x_n + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right)}$.
5. Trouver a, b, c, d réels tels que :

$$x_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Feuille 4

Séries numériques

Extraits de rapports de jury :

- **CCP 2018 :** *Les questions de positivité sont presque toujours ignorées dans les critères de comparaison/équivalence des séries et des intégrales généralisées.*
- **Centrale 2022 :** *Signalons que dans l'étude des séries on ne doit pas écrire la somme avant d'avoir justifié sa convergence et que les théorèmes de comparaison au programme, demandent que l'on compare les termes généraux, non pas les sommes partielles et encore moins les séries elle-mêmes ou leur sommes. Signalons que la règle de d'Alembert ne fournit pas une condition nécessaire et suffisante de convergence absolue.*
- **Mines-Ponts 2018 :** *Concernant la convergence des séries, certains candidats font un usage abusif de majorations et d'équivalents pour des séries à termes non positifs, et tous ne pensent pas à examiner la convergence absolue. En revanche, le critère spécial des séries alternées est généralement bien connu, ainsi que les majorations de la somme partielle et du reste qui l'accompagnent.*
- **Mines-Ponts 2017 :** *De façon générale, l'étude des séries semi-convergentes qui ne vérifient pas le critère précédent est assez mal faite. L'utilisation d'un développement limité devrait plus souvent être envisagée.*
  Les séries de Bertrand sont hors programme. À la place, les candidats doivent utiliser les relations de comparaisons.
- **Navale 2019 :** *Les hypothèses d'étude de la convergence d'une série numérique ou d'une intégrale généralisée doivent être vérifiées, la condition de signe sur le terme général est trop souvent oubliée.*

Exercice 106 (Nature et somme - ❄)

Démontrer la convergence de la série numérique suivante et calculer sa somme.
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

Exercice 107 (Nature et somme - ❄)

Démontrer la convergence de la série numérique suivante et calculer sa somme.
$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$$

Exercice 108 (Nature et somme - ❄)

Démontrer la convergence de la série numérique suivante et calculer sa somme.
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+2n-1}{n!}$$

Exercice 109 (Nature et somme - ❄)

Démontrer la convergence de la série numérique suivante et calculer sa somme.
$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Exercice 110 (Nature et somme - ❄)

Démontrer la convergence de la série numérique suivante et calculer sa somme.
$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$$

Exercice 111 (EIVP PC 2017, TPE PC 2019 - ❄❄)

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$.
On pourra utiliser $\tan(a-b)$.

Exercice 112 (Nature et somme - ❄❄)

Démontrer la convergence de la série numérique suivante et calculer sa somme.
$$\sum_{n\geq 0} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

Exercice 113 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\displaystyle\sum \frac{n^2+n-1}{n+1}$.

Exercice 114 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{n^2+2n-1}{n\sqrt{n+1}}$.

Exercice 115 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum (-1)^n \operatorname{Arctan}(n)$.

Exercice 116 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{n^2+n}{2^n+1}$.

Exercice 117 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{n}{\ln^2(n)}$.

Exercice 118 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum n e^{-n/2}$.

Exercice 119 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{\ln^5(n)-1}{n!+n^2}$.

Exercice 120 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \ln(\cos(1/n))$.

Exercice 121 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{\operatorname{Arctan}(n)}{n^\alpha}$.

Exercice 122 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{1+n+\ln(n)n^2}{2+n^4}$.

Exercice 123 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{n(1+i)^n}{3^n}$.

Exercice 124 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{1}{n-i}$.

Exercice 125 (Nature - Série de Bertrand - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{\ln(n+1)+1}{2n+1}$.

Exercice 126 (Nature - Série de Bertrand - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{2\ln(n)-1}{n^2+n\ln(n)-1}$.

Exercice 127 (Nature - Série de Bertrand - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+\ln(n)}{n^2+1}\right)$.

Exercice 128 (Nature - Série de Bertrand - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{\ln(n)-3\sqrt{n}}{2+n^3}$.

Exercice 129 (Nature - Série de Bertrand - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{2n}{n^2\ln(n)+3}$.

Exercice 130 (Nature - Série de Bertrand - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{\sqrt{n}\ln^2(n+1)+1}{n^2+2}$.

Exercice 131 (Nature - Série de Bertrand - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{n^3}{\ln(n!)}$.

Exercice 132 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{n^{n^2}}{2^{n!}}$.

Exercice 133 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$.

Exercice 134 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{n}{e^{an}}$.

Exercice 135 (Nature - ❄)

Déterminer la nature des séries numériques $\sum \dfrac{n^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 136 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n}$.

Exercice 137 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum n^2 e^{-\ln^2(n)}$.

Exercice 138 (Nature - ❄)

Pour $n \geq 2$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Montrer que le terme général de la série $\sum a_n$ est équivalent à un terme d'une série convergente et que pourtant la série $\sum a_n$ diverge.

Cela contredit-il le théorème vu en cours ? Expliquer pourquoi.

Exercice 139 (CCP PSI 2018 - ❄)

Montrer que la série $\sum \Big(\ln(2n+(-1)^n) - \ln(2n) \Big)$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 140 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice 141 (IMT PSI 2022 - ❄)

Pour $n \geq 2$ entier, on pose $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}$.

Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 142 (Nature - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \frac{1}{(n!)^{1/n}}$.

Exercice 143 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \left(n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}\right)$.

Exercice 144 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de $\sum \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}\right)^{\alpha}$.

Exercice 145 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^n$.

Exercice 146 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

Exercice 147 (St Cyr PSI 2017 - ❄)

Nature de la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 148 (Navale PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄)

Nature de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}$.

Exercice 149 (Série alternée - ❄)

Déterminer la nature de $\sum (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$.

Exercice 150 (CCP PSI 2017 - ❄)

Étudier la nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right)$ pour $\alpha > 0$.

Exercice 151 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right)$.

Exercice 152 (Centrale PSI 2017 - ❄)

Étudier la nature de la série $\sum \exp\left((-1)^n \frac{\ln(n)}{n}\right) - 1$.

Exercice 153 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \frac{(-1)^n + 1/n}{\ln(n)}$.

Exercice 154 (Série alternée - ❄❄)

Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n - \ln(n)}$.

Exercice 155 (Série alternée - ❄❄)

Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n) + (-1)^n}$.

Exercice 156 (IMT PSI 2019 - ❄❄)

Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$.

Exercice 157 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$.

Exercice 158 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln(n)\sqrt{n}}$.

Exercice 159 (Série alternée - ❄❄)

Déterminer la nature de $\sum \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 160 (Série alternée - ❄❄)

Déterminer la nature de $\sum (-1)^n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e}\right)^{\alpha}$.

Exercice 161 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\sum \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2n} \ln(k)$.

Exercice 162 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de $\sum \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - ash\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 163 (Nature - ❄❄)

Déterminer la nature de $\sum \sin\left(\frac{n^2+an+b}{n}\pi\right)$.

Exercice 164 (ENSEA PSI 2016 - ❄❄❄)

Soit $\alpha \in]0,1[$.
Déterminer la nature de $\sum \Big((n+(-1)^n)^\alpha - n^\alpha\Big)$.

Exercice 165 (Centrale PSI 2016 - ❄❄❄)

Déterminer la nature de $\sum (-1)^n \dfrac{\cos(\ln(n))}{n}$.

Exercice 166 (CCINP PC 2023 - ❄❄)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{p}(u_{2i-1}+u_{2i}) = \sum_{i=1}^{2p} u_i.$$
2. Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
3. On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}}\right).$$
En déduire que :
$$R_n = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}}\right).$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$.
   (a) Montrer que g_n est convexe.
   (b) Avec
$$\forall x \geq 1,\ g_n(2x) - g_n(2x-1) \leq g_n(2x+1) - g_n(2x).$$
5. Montrer que $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
En déduire la nature de $\sum R_n$.

Exercice 167 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄)

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

1. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\sqrt{n}$.
2. Montrer que $S_n + S_{n+1}$ admet une limite finie et que celle-ci est positive.

Exercice 168 (ENSEA - ❄❄❄)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $c(n)$ le nombre de chiffres dans son écriture décimale.
Montrer la convergence de la série $\sum \dfrac{c(n)}{n(n+1)}$ puis calculer sa somme.

Exercice 169 (Nature - ❄)

Soient a, b des constantes réelles. Déterminer la nature de la série numérique $\sum \Big(\sqrt{n+2} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n}\Big)$.

Exercice 170 (Mines-Ponts 2018 (Sylvain R.) - ❄)

Soient a, b des constantes réelles. Déterminer la nature de la série numérique $\sum \Big(\ln(n+2) + a\ln(n+1) + b\ln(n)\Big)$.

Exercice 171 (IMT MP 2018 - ❄)

1. Énoncer et illustrer par un dessin l'inégalité des accroissements finis.
2. Démontrer que si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors elle est lipschtzienne.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
et en déduire un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 172 (CCINP PSI 2021 (Lorine B.) - ❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{a_n}{2}$.
2. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. La réciproque est-elle vraie ?
On pourra considérer $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 173 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

1. Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On admet le théorème de Cesàro.
Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 174 (ENSEA PSI 2023 (Baptiste G.) - ❄)

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_{n+1} - x_n$.
Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum y_n$ ont même nature.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$
Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
3. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 175 (Centrale PSI 2017 - ❄❄)

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + (-1)^n}$.

Exercice 176 (Centrale PC 2021 - ❄❄)

Soit t un réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + xt\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution réelle positive, que l'on notera $u_n(t)$.
2. Montrer que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. Étudier les séries $\sum u_n(t)$ et $\sum (-1)^n u_n(t)$.

Exercice 177 (Mines-Ponts 2022 (Hugo V.) - ❄❄)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction à valeurs strictement positives.

1. Donner une condition nécessiare portant sur f pour que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{f(n)}$ converge.
   Est-ce une condition suffisante ?
2. On suppose, en plus de la condition nécessaire trouvée à la question précédente, que f est croissante « à partir d'un certain rang ».
   Pour tout $n \geq 1$, justifer l'existence de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)}$.
   Préciser le signe et la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
3. On suppose de plus que pour tout $k \geq 1$, on a :
$$\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+2)} \geq \frac{2}{f(k+1)}.$$
   Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 178 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Quelle est la limite de la suite de terme général nu_n ?
2. Donner la nature de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 179 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1.$$

1. Montrer que lorsque $a = 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2. Montrer que ce résultat persiste pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$.
   Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice 180 (ENTPE - ❄)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

Exercice 181 (IMT PC 2018 - ❄)

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n)$.

1. Montrer que $\dfrac{a_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
2. Existence et calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n!}$.

Exercice 182 (❄❄)

Soit $a \in \mathbb{R}^+$.

Déterminer la nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dbinom{2n}{n} a^n$.

Exercice 183 (Avec une intégrale - ❄❄)

Dans cet exercice, on admet que $\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^a \Big(\ln(t)\Big)^n dt$.

1. Démontrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. Pour $n \geq 1$, déterminer en fonction de n et a, une relation liant $u_n$et u_{n-1}.
3. Calculer alors la somme de la série $\sum u_n$.

Exercice 184 (St Cyr PSI 2013 - ❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$.

1. Etudier la monotonie et la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $a_n + a_{n+2}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$. En déduire un équivalent de a_n.
4. Quelle est la nature de $\sum a_n$ et de $\sum (-1)^n a_n$?

Exercice 185 (Comparaisons - ❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Étudier la nature des séries suivantes :
$$\sum_{n\geq 0} {a_n}^2,\quad \sum_{n\geq 0} \sqrt{a_n a_{n+1}},\quad \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} a_n a_{2n}.$$

Exercice 186 (ENSEA PSI 2023 (Baptiste G.) - ❄)

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_{n+1} - x_n$.
   Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum y_n$ ont même nature.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$
   Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
3. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 187 (CCINP PSI 2019 - ❄❄)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$.

1. Calculer $u_1 + u_2$. Généraliser.
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ lorsque $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 188 (TPE/EIVP 2018 (Axel C.B.) - ❄❄)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \max(u_n, v_n)$ et $z_n = \min(u_n, v_n)$.

1. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes.
   (a) $\sum w_n$ converge.
   (b) $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge ou si $\sum v_n$ converge, alors $\sum z_n$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 189 (Comparaisons - ❄❄)

1. Déterminer un équivalent de $u_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$.
2. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 190 (Une somme de série - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

1. Déterminer un équivalent de $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   De manière analogue, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$.
   En déduire la nature de $\sum u_n$. Pouvait-on obtenir ce résultat autrement ?
2. On pose $v = \dfrac{u_n}{n+1}$. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :
$$(2k+4)v_{k+1} = (2k+1)v_k.$$
3. En sommant ces égalités, exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n et de v_{n+1}.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}$.

Exercice 191 (Terme général récurrent - ❄)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ donné et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que cette suite converge et en donner sa limite.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et en donner la somme.
3. Montrer que les séries de terme général respectif u_n et $\ln(u_{n+1}/u_n)$ divergent.

Exercice 192 (Centrale-Supélec PC 2014 - ❄❄)

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,\pi]$ et $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$ tend vers 0.
2. Montrer que $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n^2$.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 193 (CCP PSI 2018 - ❄)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et par $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.
3. Déterminer la nature de $\sum u_n^2$ (ou pourra s'intéresser à $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$).

Exercice 194 (TPE PSI 2017 - ❄❄)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer les équivalents suivants.
$$u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} 6(u_n - u_{n+1}) \quad \text{et} \quad u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 6\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right).$$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de $\sum u_n^p$.

Exercice 195 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^n + x\sqrt{n} = 1$ admet une unique solution x_n dans $[0,1]$.
2. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général x_n.

Exercice 196 (Produit de Cauchy - ❄)

En utilisant un produit de Cauchy, montrer que :
$$\forall x \in]-3,3[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^n} = \frac{9}{(3-x)^2}.$$

Exercice 197 (Produit de Cauchy - ❄)

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(n-k)!}$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 198 (Produit de Cauchy divergent - ❄❄)

On considère deux séries numériques identiques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\qquad u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Justifier la convergence de ces séries. Sont-elles absolument convergentes ?
2. Démontrer que leur produit de Cauchy est une série numérique grossièrement divergente.

Exercice 199 (Comportement de restes partiels - ❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge.
2. On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \dfrac{25}{24} u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 10^{-3} près.

Exercice 200 (Comportement de restes partiels - ❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
En comparant à des intégrales, déterminer un équivalent de R_n.

Exercice 201 (Centrale PSI 2017 - ❄)

Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } B_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 202 (IMT PC 2019 - ❄❄)

Soient $\alpha \geq 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

Déterminer la nature de $\sum \dfrac{1}{S_n}$.

Exercice 203 (Série de restes partiels - ❄)

1. Justifier la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ le reste partiel d'ordre n associé à cette série convergente.
2. Démontrer que $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. A l'aide du théorème des séries alternées, démontrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Que vaut $R_n - R_{n+1}$?
5. Déterminer un équivalent de R_n.
6. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} R_n$.

Exercice 204 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄)

Trouver un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 205 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.
2. Montrer que la série de terme général $V_n = \dfrac{(-1)^n}{n} U_n$ est convergente.
3. Soit $W_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.
   Quelle est la nature de la série de terme général W_n ?
4. Déterminer la limite de $X_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

Exercice 206 (Série alternée - ❄❄)

On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
2. Démontrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(a_n + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \ell.$$

3. Montrer que ℓ est strictement positif.
4. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

Exercice 207 (Nature - ❄❄)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 208 (Théorème du point fixe)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **contractante**, c'est-à-dire vérifiant :

$$\exists k \in]0, 1[, \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in [a, b] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   On pourra étudier la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.
3. Montrer enfin qu'il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 209 (Navale PSI 2017 - ❄❄)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est contractante (c'est-à-dire a-lipschitzienne avec $a \in [0, 1[$).
Montrer que f admet un unique point fixe.
Que dire pour $a = 1$?

C'est l'execice prédédent sans question intermédiaire.

Exercice 210 (Règle de Cauchy - ❄❄)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictements positifs telle que :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \ell.$$

Montrer que :

1. si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Application : Déterminer la nature de $\sum \frac{n^{\ln(n)}}{\ln^n(n)}$.

Exercice 211 (ENSAM PSI 2017 - ❄❄)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes strictement positifs.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{u_k}$.

1. Prouver l'inégalité : $\frac{n(n+1)}{2} \leq \sqrt{n^2\alpha_n \sum_{k=1}^{n} u_k}$.
2. Montrer que $n \leq 2\left(\alpha_n - \alpha_{n+1} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)\sum_{k=1}^{n} u_k$.
3. En déduire que la convergence de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ entraîne celle de la série de terme général $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} u_k}$.

Exercice 212 (CCP 2017 - ❄❄)

On pose pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$.

On rappelle que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Montrer que la série de terme général a_n est convergente.
2. On pose pour tout $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} H_{2n} - H_n = \ln(2)$.
3. Trouver a, b et c tels que pour tout $n \geq 1$,
$$a_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 213 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄)

Soit f une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On considère une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante, convergeant vers 1 et,pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto r_n.f(x)$.

1. Montrer que f (resp. f_n) admet un unique point fixe I (resp. I_n).
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 214 (Comparaison Séries/Intégrales - ❄❄)

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \ln^2(k)\right)^{-1}.$$

Exercice 215 (❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. En déduire un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ en $\underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Exercice 216 (Comparaison Séries/Intégrales - ❄❄)

Déterminer un développement asymptotique de

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k} \text{ en } \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Exercice 217 (Centrale - ❄❄❄)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k u_k = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

Exercice 218 (CCP MP - ❄❄)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à termes strictement positifs.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge.

   Quelle est la nature de $\sum \frac{a_n}{S_n}$?
2. On suppose que $\sum a_n$ diverge.

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$.

   En déduire la nature de $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$.
3. On suppose toujours que $\sum a_n$ diverge.

   Quelle est la nature de $\sum \frac{a_n}{S_n}$?

Exercice 219 (❄❄)

1. Soit $\sum u_n$ une série convergente. On note S_n et R_n sa somme et son reste partiel d'ordre n. Montrer l'équivalence suivante.
$$\sum u_n S_n \text{ converge} \iff \sum u_n R_n \text{ converge} .$$
2. Application : déterminer la nature de la série
$$\sum_{n\in\mathbb{N}*}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

Exercice 220 (Mines-Ponts - ❄❄)

Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes strictement positifs.
On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a_{n+1}}{S_n}$.

Exercice 221 (Mines-Ponts PC 2015 - ❄❄❄)

On définit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_0 > 0$ et $U_{n+1} = U_n + \frac{A_n}{U_n}$, où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive donnée.
Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que si elle converge alors la série $\sum A_n$ converge.

Exercice 222 (Équivalent - ❄❄)

1. Justifier que pour $x > 0$, $\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-n^2 x}$ est convergente.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 223 (Produit infini - ❄❄)

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs convergente.
On définit la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 - u_k).$$

1. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $\quad n \geq n_0 \implies u_n < 1$.
2. Démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que si elle admet une limite nulle, alors au moins l'un des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut 1.

Exercice 224 (IMT 2022 (Raphaël D.) - ❄❄❄)

Soit $p \geq 2$ un entier. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ n'est pas un multiple de } p \\[2ex] -\dfrac{p-1}{n} & \text{si } n \text{ est pas un multiple } p \end{cases}$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 225 (Centrale PC 2018 - ❄❄❄)

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même.
Quelle est la nature de $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$, $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ et $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 226 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄)

1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2-1}$ converge et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 227 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_k}{x^k} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum f(n)$ converge.
2. On pose $p_n = \prod_{k=0}^{n} f(k)$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum p_n$ converge.

Exercice 228 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec :

$$u_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Exercice 229 (Centrale PSI 2017 - ❄❄❄)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+)$.

1. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$.
   (i) Donner un exemple d'une telle fonction.
   (ii) Étudier la suite $\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence et limite).
   (iii) Établir la convergence de $\sum f(n)$.
2. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha$ avec $\alpha < 0$.
   (i) Donner un exemple d'une telle fonction.
   (ii) Étudier la nature de $\sum f(n)$.
   (iii) Pour $\beta \in \mathbb{R}$, étudier la nature de $\sum n^\beta f(n)$.

Feuille 5

Révisions sur l'intégration

Extraits de rapports de jury :

- **CCP 2017 :** *Les techniques de primitivation de fractions rationnelles du type* $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ *ne sont pas maitrisées en général.*
- **Centrale 2022 PSI :** *La recherche de primitives usuelles ne relève pas toujours de calculs naturels pour les étudiants.*
  La formule de Taylor avec reste intégral mieux connue que les autres années pose néanmoins encore pour certains des difficultés. Il serait sage de comprendre l'efficacité de cette formule pour obtenir des résultats globaux (par exemple des inégalités).
- **Centrale 2021 PSI :** *Le théorème fondamental de l'analyse est souvent mal utilisé, quand il n'est pas complètement hors-sujet notamment dans le cadre d'une intégrale à paramètres. Rares sont les candidats qui savent dériver correctement une application de la forme* $x \longmapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$, *on a souvent droit à* $x \longmapsto f(b(x)) - f(a(x))$ *comme réponse, y compris lorsque* a *est constante !*
- **Centrale 2019 :** *Il faut faire preuve de rigueur lors de l'application d'un théorème : il faut en citer et en vérifier toutes les hypothèses. Au niveau des raisonnements, il faut bien distinguer les hypothèses, le résultat à démontrer et indiquer la méthode employée pour y arriver.*

Exercice 230 (Intégration « à vue »- ❆)

Déterminer les primitives suivantes.

$$\int xe^{2x^2+1}dx \qquad \int \sin(2x+1)dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx \qquad \int \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)dx$$

$$\int \tan(x)dx \qquad \int e^x\cos(e^x)dx$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad \int \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^5(x)}dx$$

Exercice 231 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{Arctan}^2(x)dx$.

Exercice 232 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})dx$.

Exercice 233 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2(x)dx$.

Exercice 234 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$.

Exercice 235 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{12}{x^3-8}dx$.

Exercice 236 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x(\tan^2(x)+\tan^4(x))dx$.

Exercice 237 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(1+t)dt$.

Exercice 238 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❆❆)

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^3(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 239 (Calcul avec partie entière - ❆)

Soient n, p deux entiers tels que $0 \leq n < p$.

Après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_n^p E(x)dx$.

Exercice 240 (Intégrale avec max - ❄)

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \max(x,t)dt$.

Exercice 241 (Fonction à dérivée périodique - ❄)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que f' soit T-périodique. On suppose que $f(T) \neq 0$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(nT)-f((n-1)T) = f(T)-f(0)$.
2. En déduire que f n'est pas périodique.

Exercice 242 (Limite d'intégrales - ❄)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \cos(nt)f(t)dt$.

Exercice 243 (Limite d'intégrales - ❄)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\cos(t)}{1+\sqrt{t}}dt$.

Exercice 244 (Limite d'intégrales - ❄)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Exercice 245 (EIVP PSI 2016 - ❄❄)

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 246 (Limite d'intégrales - ❄)

1. Montrer que pour tout $x \in [0,\pi/2]$ on a :
$$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}.$$
2. En déduire la limite suivante : $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_{a^2}^{3a^2} \frac{1-\cos(ax)}{x^2}dx$.

Exercice 247 (IMT PC 2018 - ❄)

Pour $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{\cos(t)}{t}dt$.

Exercice 248 (Limite d'intégrales - ❄)

1. Démontrer que pour tout $t \in [0,\pi/2]$, on a
$$t-\frac{t^3}{3!} \leq \sin(t) \leq t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}.$$
2. En déduire la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{4x} \frac{\sin(t)-t}{t^4}dt$.

Exercice 249 (Navale PSI 2023 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Exercice 250 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄❄)

Déterminer un équivalent lorsque x tend vers 0^+ de :
$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{Arcsin}(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 251 (Formules de Taylor - ❄)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)}{h^3}$.

On pourra utiliser une formule de Taylor.

Exercice 252 (Techniques de calcul - ❄)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))dx$.

Exercice 253 (Mines-Télécom PSI 2017 - ❄❄)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$.

Exercice 254 (TPE PSI 2017 - ❄)

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2}\mathrm{e}^{-n/k}$.

Exercice 255 (ENTPE-EIVP PC 2015)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^n (n+k)\right)^{1/n}$.

Exercice 256 (IMT PSI 2022 et 2023 - ❄)

Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant :

(i) une comparaison série-intégrale,
(ii) les sommes de Riemann.

Exercice 257 (Limite de somme - ❄❄)

Déterminer la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 258 (CCP MP - ❄❄)

Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 259 (Intégrale à paramètre - ❄❄)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable strictement croissante et bijective telle que $f(0) = 0$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x).$$

La fonction F est-elle dérivable ? En déduire une égalité.
Donner une interprétation géométrique du résultat.

Exercice 260 (St Cyr MP 2018 - ❄)

Donner les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \ln^2(t)dt$$

et les limites aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 261 (Centrale PSI 2021 (Clément G.) - ❄❄)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $f(0) = 0$ et telle que pour tout $x \geq 0$ on ait $0 \leq f'(x) \leq 1$.
Montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \geq \int_0^x f^3(t)dt.$$

Exercice 262 (Intégrale à paramètre - ❄❄)

On considère la fonction H définie par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}dt$.

1. Démontrer que $H(x)$ est bien défini si $x > 0$.
2. Montrer que H est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $H'(x)$.
3. Démontrer que pour $x > 1$ on a :
$$e^x \ln(x) \leq H(x) \leq e^{x^2} \ln(x).$$
4. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{x}$.

Exercice 263 (Cesaro pour les intégrales - ❄❄❄)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = a.$$

Exercice 264 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄❄)

Soit $f : [0, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{f(1) - f(0)}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication : on pourra s'inspirer de la démonstration de la majoration de l'erreur commise dans la méthode des rectangles (cours d'info).

Exercice 265 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $I = [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < 1$. .

1. Justifier que $|z - e^{it}|$ ne s'annule pas sur I et que $f : t \longmapsto \dfrac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2}$ est continue sur I.
2. (a) Montrer que $t \longmapsto 1$, $t \longmapsto e^{it}$ et $t \longmapsto e^{-it}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.
   (b) Montrer l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que
   $$\forall t \in I,\ f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}}.$$
   On donnera explicitement α et β.
3. Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$.

Exercice 266 (Mines-Ponts MP 2023 - ❄❄❄)

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_1^x t^t dt$.

Feuille 6

Intégrales impropres

Extraits de rapports de jury :

- **CCINP 2022 :** *La manipulation d'équivalents, très utile pour les convergences d'intégrales ou de séries, ne vient pas toujours à l'esprit des candidats et trahit trop souvent la mauvaise compréhension de la notion : il ne suffit pas que deux suites ou fonctions aient le même comportement vis-à-vis de la convergence de l'intégrale ou la série étudiée pour être équivalentes.*

  Les comparaisons séries intégrales, et en particulier les conditions sous lesquelles on peut les mettre en œuvre, sont rarement bien maîtrisées.

- **Mines Telecom 2022 :** *Les théorèmes importants sur les intégrales dépendantes d'un paramètre sont en général bien connus, mais des difficultés techniques restent souvent insurmontables au niveau de la vérification des hypothèses. Par exemple la convergence d'une intégrale qui résulte d'un prolongement par continuité de la fonction intégrée peut donner lieu à des complications étonnantes, on retrouve là une lacune du cours de première année, à laquelle on peut ajouter des difficultés dans l'utilisation des équivalents et des développements limités.*

- **Navale 2021 PSI :** *Les hypothèses d'étude de la convergence d'une série numérique ou d'une intégrale généralisée doivent être vérifiées, la condition de signe sur le terme général est trop souvent oubliée. La continuité d'une fonction que l'on souhaite intégrer est régulièrement oubliée, l'étude de l'intégrabilité ne se résume pas à une étude aux bornes !*

- **Centrale 2022 PSI :** *Pour étudier une intégrale impropre, les étudiants ne regardent souvent que les bornes sans se demander au préalable sur quel domaine la fonction est continue ou continue par morceaux. L'étude d'une borne est souvent délicate lorsqu'elle n'est ni 0 ni $+\infty$.*

- **Centrale 2018 :** *La bête noire demeure l'expression t^x selon que la variable soit x ou t. Rappelons que $t \longmapsto t^2$ et $t \longmapsto \sqrt{t}$ sont des exemples de ces fonctions quand t est la variable, alors que $x \longmapsto 2^x$ est un exemple d'une telle fonction quand x est la variable. Il faut savoir tracer, sans hésiter, les courbes représentatives de ces fonctions.*

  Pour étudier une intégrale impropre, les candidats ne regardent souvent que les bornes (même si c'est inutile) sans d'abord se demander où la fonction est continue. En analyse, il est essentiel de comprendre la différence entre deux exercices : démontrer qu'une limite existe et démontrer qu'une limite existe et vaut ℓ. Rappelons que l'on ne peut écrire les symboles $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\displaystyle\int_a^{+\infty}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}$ qu'après avoir justifié leur existence (sauf exceptions précisées dans le programme : intégration par parties, changement de variables).

- **Mines-Ponts 2021 PSI :** *Les candidats doivent savoir que $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ n'est pas la seule fonction de comparaison pour décider de la convergence d'une intégrale en $+\infty$: il est parfois plus commode d'utiliser des majorants de la forme $\exp(-\lambda t)$ où $\lambda > 0$.*
- **Mines-Ponts 2019 :** *Il est plus judicieux de raisonner en termes de fonction intégrable et pas d'intégrale convergente lors de l'emploi de théorème de comparaison, surtout lorsque la fonction n'est pas clairement positive. Et là encore, l'utilisation de valeurs absolues n'est pas toujours naturelle lorsque les fonctions ne sont pas positives.*
- **Mines-Ponts 2018 :** *La différence entre fonction intégrable et fonction dont l'intégrale converge n'est pas claire pour tous les candidats.*

  Pour la convergence des intégrales généralisées, comme pour celle des séries, certains candidats invoquent à tort des majorations ou des équivalents sans avoir vérifié que les fonctions sont de signe positif. Et là encore, l'utilisation de valeurs absolues n'est pas toujours naturelle.

Exercice 267 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+2x+2)}$.

Exercice 268 (Nature et calcul - ❆)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\ln(1-x^2)dx$.

Exercice 269 (Nature et calcul - ❄)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos(2x)}}dx$.

Exercice 270 (Nature et calcul - ❄)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}dx$.

Exercice 271 (Nature et calcul - ❄)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\sqrt{x}}dx$.

Exercice 272 (Nature et calcul - ❄)

Nature et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}dx$.

Exercice 273 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Décomposer en éléments simples $\dfrac{2X+1}{X(X+1)^2}$.
2. Justifier l'existence et calculer $I = \displaystyle\int_0^1 tE\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 274 (CCP PC 2017 - ❄❄)

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u-\lfloor u\rfloor}{u^2}\mathrm{d}u = 1 - \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)$.

Exercice 275 (ENTPE-EIVP PC 2015 - ❄)

Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-\mathrm{Arctan}(x)}{x(1+x^2)\mathrm{Arctan}(x)}dx$.

Exercice 276 (CCP PC 2010 - ❄)

Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$.

Exercice 277 (CCINP PC 2019 - ❄)

Montrer l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ puis calculer I.

Exercice 278 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄)

Soit $y \in \mathbb{R}$. Calculer $g(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$.

Exercice 279 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\mathrm{e}^{-x}dx$.

Exercice 280 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

Exercice 281 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(t)-\cos(t)}dt$.

Exercice 282 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$.

Exercice 283 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{1+t^2}dt$.

Exercice 284 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)+1}{t^2+2}dt$.

Exercice 285 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}dx$.

Exercice 286 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\ln^2(x)}dx$.

Exercice 287 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$.

Exercice 288 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2-1}\right)dx$.

Exercice 289 (CCP PSI 2018 - ❄)

Déterminer la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_e^4 \frac{dt}{\ln(\ln(t))}$.

Exercice 290 (IMT PC 2018, PSI 2021 (Clément G.) - ❄❄)

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}\right)dx$ converge-t-elle pour tout $a \in \mathbb{R}$?

Exercice 291 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x+1-\sqrt{x^2+2x})dx$.

Exercice 292 (Nature d'intégrale - ❄)

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \cos(x^2)$.

1. Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Exercice 293 (ENTPE-EIVP PSI 2014 - ❄)

Discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) - \ln(1-e^{-x})}{x} e^{\alpha x} dx.$$

Exercice 294 (ICNA PC 2017 - ❄)

Déterminer, suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}) \mathrm{d}x.$$

Exercice 295 (Nature d'intégrale - ❄)

Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x} dx$.

Exercice 296 (Nature d'intégrale - ❄)

Discuter la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (1-x)^\beta}$ en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 297 (Nature d'intégrale - ❄)

Discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^\alpha} dx.$$

Exercice 298 (Mines-Ponts PSI 2018 et 2019 - ❄❄❄)

Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}} - 1 \right) \mathrm{d}t$.

Exercice 299 (CCP PSI 2016 - ❄)

Étudier la nature des intégrales :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Exercice 300 (IMT PSI 2021 - ❄❄)

Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt$.

Exercice 301 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

1. Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ quand $t \to +\infty$.
2. Justifier l'existence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt$.

Exercice 302 (Techniques de calcul - ❄)

Montrer que les intégrales impropres suivantes convergent et prouver qu'elles sont égales.

$$I = \int_0^1 -e^{-x} \ln(x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

Exercice 303 (ENSEA PSI 2021 et 2022 - ❄)

1. Justifier l'existence des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ et trouver une relation entre I et J.
2. En calculant $I + J$, montrer que :
$$I = J = -\frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

Exercice 304 (Techniques de calcul - ❄)

On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

1. Justifier l'existence de ces intégrales et montrer qu'elles sont égales.
2. A l'aide du changement de variable $u = x - 1/x$, calculer $I + J$.
3. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 305 (ENSEA PSI 2023 - ❄❄)

Montrer l'existence et calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx$.

Ind : Poser $u = \sqrt{x/(1-x)}$.

Exercice 306 (Intégrabilité - ❄)

Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

$f_1(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0,1[$

$f_2(x) = \dfrac{x^\alpha \ln(x)}{1-x^2}$ sur $]0,1[$

$f_3(x) = \dfrac{1-\mathrm{ch}(x)}{x^\alpha}$ sur $]0,+\infty[$

$f_4(x) = \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ sur $]0,1[$

Exercice 307 (Intégrabilité - ❄)

Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

$f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x}$ sur $[1,+\infty[$

$f_2(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x^3+x}}$ sur $[1,+\infty[$

$f_3(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x-x^3}}$ sur $]0,1[$

Exercice 308 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄)

Soit $\alpha \in [0,1[$ et $f : [0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ continue par morceaux et telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \alpha.$$

Montrer que f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 309 (Centrale PSI 2023 - ❄❄)

Soit $f : [1, +\infty[$ continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}dt$ converge.

Exercice 310 (Mines-Ponts MP 2018 - ❄❄)

Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ a-t-elle pour limite 0 en $+\infty$?

Exercice 311 (Limite d'intégrales - ❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1-x}\sin(\pi x)dx$.
Démontrer que I_n est bien définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 312 (IMT 2022 (Mathilde P.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{t}}\ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)dt$.

1. Montrer la convergence de I_n
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 313 (Équivalent d'intégrales - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+n}dx$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, puis que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 314 (Centrale PC 2014 - ❄❄)

Montrer que $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{\arctan^2(t)}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\arctan^2(t)}dt$ quand $x \to 0$.

Exercice 315 (IMT PC 2018 - ❄❄)

On veut montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}dt.$$

1. Montrer que $I_n = \dfrac{\pi}{2}$. On pourra calculer $I_n - I_{n-1}$.
2. Montrer que si φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)dt = 0$$
3. Conclure.

Exercice 316 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

Soit $\alpha > 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

1. Justifier l'existence de $I_n(\alpha)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir une relation entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n+1}(\alpha)$. Exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de α, n et $I_1(\alpha)$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer qu'il existe un réel $K(\alpha)$ strictement positif tel que :
$$I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}.$$

Exercice 317 (Centrale PC 2019 - ❄❄)

Soient $a > 0$, $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_\lambda = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\mathrm{d}t \text{ et } G_\lambda : x \longmapsto \int_a^x \lambda - f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I_λ existe pour au plus une valeur de λ.
2. Montrer que si G_λ est bornée alors I_λ est convergente.
3. Montrer que I_λ converge pour une unique valeur de λ que l'on précisera.
4. Donner un équivalent de $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos^2(t)}{t}\mathrm{d}t$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 318 (ENSEA et Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄)

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (intégrale convergente).

On note $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de F et calculer sa dérivée.
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :
$$F(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
3. Montrer que $g : t \longmapsto \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.
4. Déterminer un équivalent simple de F en 0.
5. Montrer que F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)dt$.

Exercice 319 (Mines-Ponts PSI 2024 (Yassine N.) - ❄❄❄)

On note $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
3. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Exercice 320 (Centrale PSI 2018 - ❄❄❄)

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}du$.
2. Soient α, β des réels strictement positifs.
Montrer la convergence de l'intégrale suivante et la calculer.
$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u}du.$$

Exercice 321 (Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ où a et b sont des réels strictement positifs.

Exercice 322 (CCP MP 2019 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\mathrm{d}x$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre u_n et u_{n+1}.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ exprimer u_n en fonction de n puis montrer que $\sum u_n$ diverge.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ justifier l'existence de $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre v_{n+1} et u_n et exprimer v_n en fonction de n.

Exercice 323 (CCINP PSI 2022 (Loïc D.) - ❄❄)

1. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ converge.

   On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
2. On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

   Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
3. En déduire la nature de la série de terme général
$$v_n = (-1)^n \int_0^1 e^{-n^2t^2}\, dt.$$

Exercice 324 (IMT PSI 2022 - ❄)

1. Justifier la convergence des intégrales
$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \text{ et de } \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \text{ et } b_n = \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} dx.$$
   Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\pi} - 2b_n$.
3. Montrer la convergence de la série de terme général a_n.

Exercice 325 (CCINP PSI 2023 (Franck-A. E.) - ❄❄)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a $f(x) = xf(x-1)$.
3. Pour $x \geq 1$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(u))du$.
   (a) Montrer que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   (b) En déduire la limite de φ en $+\infty$.
   (c) Déterminer enfin la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\varphi(n)}$.

Exercice 326 (ICNA PSI 2018 - ❄)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2} dt$.
2. Calculer $F(1)$ (on pourra poser $u = 1/t$).
3. En déduire l'expression de $F(x)$.

Exercice 327 (ENSAM PSI 2017 - ❄❄)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{t+1} dt$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer la limite de cette suite.
3. Calculer $a_n + a_{n+1}$ et en déduire un équivalent de a_n.
4. Prouver la convergence et calculer la somme des séries $\sum(-1)^n a_n$ et $\sum a_n$.

Exercice 328 (Centrale PSI 2018 - ❄❄❄)

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$.
2. En déduire celle de $\sum \dfrac{\cos(\ln(n))}{n}$.

Exercice 329 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^3 + x^3}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$.
3. Déterminer la limite et un équivalent de f en 0.

Exercice 330 (CCINP PSI 2022 - ❄)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$.

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $I_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$.
3. Posons $J_n = nI_n$. Donner une relation de récurrence vérifiée par $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Calculer J_1 puis établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
5. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 331 (Mines-Ponts PC 2021- ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}(nx)e^{-x^n} dx$.

Justifier l'existence de I_n et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 332 (IMT PC 2018 - ❄❄)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 333 (IMT PSI 2024 (Gabriel L.) - ❄❄)

Pour $x \geq 0$ on pose :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt \text{ et } h(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt.$$

1. Montrer que g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Vérifier que $g+h^2$ est une constante que l'on déterminera.
3. Montrer que $\forall x \geq 0$ on a $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.
4. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exercice 334 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\frac{e^{-t}}{t}dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f$est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ sans symbole intégrale.

Exercice 335 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄(❄))

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ en étudiant la fonction :

$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt.$$

Exercice 336 (TPE PSI 2019 (Gabriel P.) - ❄❄)

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\text{Arctan}(t)}{(1+t^2)^2}dt$.

1. Établir la convergence de I.
2. Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t\text{Arctan}(t)}{(1+t^2)^2}dt$.
   Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et calculer F'.
3. En déduire I.

Exercice 337 (CCP PC 2015 - ❄)

1. Déterminer l'ensemble de définition D_F de la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.
2. Montrer que F est continue sur D_F.
3. Calculer $F(0)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 338 (CCINP PC 2021, PSI 2023 (Baptiste G.)

Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est positive et décroissante. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer l'expression de $F(x) - F'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que, pour $x > 0$, $F(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.
   En déduire limite et équivalent de F en 0^+.

Exercice 339 (IMT MP 2018 - ❄❄)

1. Déterminer le domaine de définition et la monotonie de la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1+t}dt$.
2. Calculer $f(x+1) + f(x)$.
3. Donner un équivalent de f en -1^+ et la limite en $+\infty$.
4. Que vaut $f(0)$? Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 340 (CCINP PSI 2023 (Franck-A. E.) - ❄❄)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a $f(x) = xf(x-1)$.
3. Pour $x \geq 1$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(u))du$.
   (a) Montrer que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   (b) En déduire la limite de φ en $+\infty$.
   (c) Déterminer enfin la nature de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$.

Exercice 341 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soient $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$ et $g : x \longmapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(t))dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Pour $x \geq 1$, trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x-1)$.
3. Établir la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{g(n)}$.

Exercice 342 (CCP PSI 2018 et 2021- ❄)

1. Montrer que $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2xt)dx$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer f'.
3. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 343 (Centrale PSI 2016 - ❄❄❄)

1. Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0^+.

Exercice 344 (ENSEA PSI 2024 (Ziad A.) - ❄❄)

On pose $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}dx$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D. En déduire une autre formulation de $F(\lambda)$.

Exercice 345 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Justifier l'existence de $T(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}-1}{t} e^{-t} dt$ et la calculer.

Exercice 346 (ENSAM PSI 2018 (Loïc M.) - ❄❄)

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. La fonction F est-elle dérivable sur $]0,+\infty[$?
3. Expliciter $F(x)$.

Exercice 347 (Intégrale à paramètre - ❄❄)

Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$.

1. Démontrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   Etudier la parité de f.
2. Calculer $f(x)$ pour tout réel x.

Exercice 348 (CCP PSI 2017 - ❄)

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$ contient $]-1,1[$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer $g'(x)$ (par deux méthodes différentes).

Exercice 349 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.
2. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \cos(xt)\dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} dt$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f'(x)$ puis, sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} dt = \ln(2)$, calculer $f(x)$.
5. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 350 (Mines-Ponts MP 2017 - ❄❄)

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f donnée par :
   $$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f' sur cet intervalle.
3. Calculer f.

Exercice 351 (Intégrale à paramètre - ❄)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xt}}{1+t} dt$.

1. Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{e^x-1}{x}$.
   Prolonger la fonction φ en 0 et vérifier que la fonction obtenue est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est qu'elle vérifie l'équation différentielle suivante.
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) + f(x) = \varphi(x).$$
3. Calculer $f(0)$ et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f(x) = e^{-x}\left(\int_0^x e^t \frac{e^t-1}{t} dt + \ln(2)\right).$$

Exercice 352 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $x > 0$.
   Calculer $f(x-1) - f(x)$. En déduire une écriture de $f(x)$ sous forme d'une somme de série.
4. **5/2** Par quelle autre méthode peut-on retrouver ce résultat ?

Exercice 353 (Mines-Télécom PSI 2017 - ❄)

Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln(t)} dt$ est définie sur $D =]-1,+\infty[$, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et en trouver une expression simple.

Exercice 354 (Mines-Ponts PC 2017, CCINP PSI 2022 - ❄

1. Déterminer l'ensemble de définition D de F donnée par :
   $$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer explicitement $F'(x)$.
   On pourra chercher des réels a et b tels que :
   $$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{b}{1+x^2t^2}.$$
3. Calculer F sur D.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\right)^2 dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 355 (ENSAM PSI 2017 - ❄❄)

1. Montrer que f, donnée par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Calculer $f(1)$.
2. Montrer que $\forall x > 0$, $f(x+1) + f(x) = \dfrac{1}{x}$ et trouver un équivalent de f en 0^+.
3. Trouver la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 356 (EIVP PC 2017 - ❄❄)

Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle suivante.

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Exercice 357 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄❄)

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{\sqrt{t^3+t}}\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 358 (Propriétés qualitatives - ❄❄❄)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que, si f^2 et f'^2 sont intégrables sur $[0, +\infty[$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 359 (Équivalent - ❄❄❄)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}(t)e^{-tx}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
3. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a :
$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt.$$
4. En déduire un équivalent de f en 0.

Exercice 360 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx$.
2. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :
$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$
Justifier l'existence, pour tout $h > 0$, de
$$S(h) = h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh).$$
3. On fixe $h > 0$ et l'on considère $\varphi_h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi_h(t) = f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)$. Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)dt$.
4. Montrer que $S(h)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ quand $h \to 0$.

Exercice 361 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}+t+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est dérivable et donner une expression de sa dérivée.
3. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(3)}{2x}$ et $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{x}$.

Feuille 7

Révisions d'algèbre linéaire

Extraits de rapports de jury :

- **CCINP 2022 PSI :** *La compréhension de la nature des objets est au cœur des enjeux du programme. Une application linéaire sur un espace vectoriel de matrices ou de polynômes peut rapidement déstabiliser la majorité des candidats.*

  La compréhension de la notion d'espaces supplémentaires (voire supplémentaires orthogonaux) est souvent fragile. Un nombre significatif de candidats s'arrête à la somme directe.

- **CCINP 2019 PSI :** *La diagonalisation d'une matrice carrée est maîtrisée mais le lien entre matrice et application linéaire pose toujours des difficultés. La définition de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée n'est pas suffisamment assimilée. Il en résulte des difficultés avec les exercices du type « montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est... ».*

- **CCP 2015 :** *La notion de somme directe de sous-espaces vectoriels n'est pas bien maîtrisée.*

- **ex-ENSAM 2018 :** *Des candidats ne font pas attention à la nature des objets mathématiques manipulés : la dimension d'un endomorphisme n'a pas de sens, de même que la transposée d'un produit scalaire ou la dérivée d'un réel.*

  Des questions à propos de l'égalité $Ker(f) \oplus Im(f) = E$ amènent souvent à de grosses erreurs. Notamment les candidats devraient bien comprendre que cette propriété est fondamentale dans l'étude des projecteurs et qu'en règle générale, seul le théorème du rang est vrai.

- **Centrale 2022 PSI :** *Il ne faut pas confondre somme directe et supplémentaire et il convient de maitriser la définition de $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots E_k$ souvent utilisée mais rarement comprise. Il est bon d'avoir à l'esprit l'hypothèse et la conclusion : en traduisant correctement l'une et l'autre, il n'y a parfois qu'un pas pour conclure.*

- **Centrale 2019 :** *Il ne faut pas confondre somme directe et supplémentaire et maitriser la définition de $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$ souvent utilisée mais rarement comprise.*

- **Centrale 2018 :** *L'objectif du programme de deuxième année est d'aborder le cas des matrices semblables. Mais, il est indispensable de comprendre le lien entre un endomorphisme et la matrice qui le représente dans une base. Pour cela, on ne peut pas se contenter d'un dessin, il faut savoir écrire la formule définissant la matrice $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.*

- **Centrale 2017 :** *Les projections sont mal connues et obtenir une définition correcte d'une projection et un dessin pour illustrer ce type d'application est devenu bien difficile.*

- **Mines-Ponts 2023 PSI :** *Pour monter qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, il n'est pas toujours pertinent d'essayer de montrer la stabilité par combinaison linéaire. Il peut être plus efficace de voir que cette partie est le noyau ou l'image d'une application linéaire bien choisie.*

- **Mines-Ponts 2018 :** *En algèbre linéaire, trop de candidats ont beaucoup de mal à construire une base adaptée à un problème. En particulier, la traduction matricielle de l'existence d'un sous-espace stable par un endomorphisme est mal maîtrisée.*

Exercice 362 (Espaces vectoriels - ❄)

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier.

$E_1 = \{(a-b, 3b+a, -a) \in \mathbb{C}^3,\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x-1) = (y+2)\}$
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$

Exercice 363 (Espaces vectoriels - ❄)

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier.

$E_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge$\}$
$E_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique $\}$
$E_3 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante $\}$

Exercice 364 (Espaces vectoriels - ❄)

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier.
$E_1 = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P'(X) + iP(X) = 0\}$
$E_2 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ est paire }\}$
$E_3 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}),\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))\}$

Exercice 365 (Espaces vectoriels - ❄❄)

Montrer que l'ensemble des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel muni des lois usuelles.

Exercice 366 (Sous-espaces vectoriels - ❄❄)

Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que :

$$A + B \subset A + C,\ \ A \cap B \subset A \cap C \text{ et } C \subset B.$$

Montrer que $B = C$.

Exercice 367 (Espaces vectoriels - ❄)

On désigne par E l'ensemble des suites complexes bornées. C'est-à-dire :

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose :

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On note F l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum |u_n|$ converge.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace suites complexes.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 368 (Familles libres ou liées - ❄)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Justifier.

Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Dans $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{F}_3 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec

$$u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (1,m,1,0),$$
$$u_3 = (1,0,m,1), u_4 = (1,0,0,m).$$

On discutera suivant les valeurs de m.

Exercice 369 (Familles libres ou liées - ❄)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Justifier.

Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 370 (Familles libres ou liées - ❄)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Justifier.
Dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathcal{F}_1 = (2,\ 3 + 2X,\ 4 - X^2,\ 5X^3)$.
Dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathcal{F}_2 = (X^2 + X + 1,\ 3X^2 + 2X + 1,\ X^2 - 1)$.

Exercice 371 (Familles libres ou liées - ❄)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Justifier.
Dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathcal{F}_1 = (X^2 - 3X, 4X - 1, X^4 - 9X, X^6)$.
Dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathcal{F}_2 = (X^2(X-1), X(X-1)^2, X^3)$.

Exercice 372 (Base - ❄)

1. Montrer que les polynômes
$$P_1(X) = (X-1)^2, P_2(X) = X^2, P_3(X) = (X+1)^2$$
forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Déterminer les coordonnées de $R(X) = X^2 - X + 6$ dans cette base.

Exercice 373 (Familles libres ou liées - ❄)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Justifier.
Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_1 = \{f : x \mapsto 1,\ g : x \mapsto x^3 + 1,\ h : x \mapsto |x^3|\}.$$

Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_2 = \{f : x \mapsto \sin(x),\ g : x \mapsto \cos(x),\ h : x \mapsto \sin(2x)\}.$$

Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_3 = \{f : x \mapsto \sin(x+a),\ g : x \mapsto \sin(x+b),\ h : x \mapsto \sin(x+c)\}.$$

Exercice 374 (IMT MP 2023 - ❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Soit $x \in E$ tel que $u^k(x) \neq 0$.
1. Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^k(x))$ est libre.
2. Qu'en déduit-on concernant l'indice de nilpotence ?

Exercice 375 (Familles génératrices - ❄)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, montrer l'égalité

$$\mathrm{vect}\{(2,1,-1),(1,2,0)\} = \mathrm{vect}\{(0,3,1),(1,-1,-1)\}.$$

Exercice 376 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄❄)

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_n)$ un $n-$uplet de réels tous distincts.
Montrer que $\mathcal{B} = (P(X + a_0), \ldots, P(X + a_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 377 (Recherche de base - ❄)

Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels suivants, définis par des équations cartésiennes.
$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = -2x\}$
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 2x - z = 0\}$
$E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z + t = y + 2z + t = 0\}$

Exercice 378 (Recherche de base - ❄)

Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels suivants.
$E_1 = \{(2a+b-c, -b+a+2c) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$
$E_2 = \text{Vect}\{(2,3,-1),(2,1,1),(1,2,-1)\}$.

Exercice 379 (Recherche de base - ❄)

Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels suivants.
$E_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}),\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n\}$
$E_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})|\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$

Exercice 380 (Recherche de base - ❄)

Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels suivants.
$E_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(2) = P'(2) = 0\}$
$E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = P(2) = 0\}$
$E_3 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ M^T = -M\}$
$E_4 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})|\ f'' - 3f' - 10f = 0\}$.

Exercice 381 (Recherche d'équations - ❄)

Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant chacun des espaces vectoriels suivants.
$E_1 = \text{Vect}\{(1,-2,1),(1,0,2)\}$.
$E_2 = \text{Vect}\{(2,1,-1)\}$.

Exercice 382

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u = (-1,3,-3,1)$ et $v = (1,-1,-1,1)$ et $F = \text{Vect}\{u,v\}$.

1. Donner un système d'équations cartésiennes définissant F.
2. Le vecteur $w = (1,0,1,0)$ appartient-il à F ?
3. Déterminer tous les vecteurs $a = (x,y,z,t)$ tels que F et $\text{Vect}\{w,a\}$ soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 383 (Mines - Ponts PSI 2016/2017 - ❄❄)

Montrer que si $z_0,\dots,z_n$ sont des complexes deux-à-deux distincts, la famille des $(X-z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 384 (Dimension - ❄)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que si $\dim(F)+\dim(G) > n$ alors il existe un vecteur non nul dans $F \cap G$.

Exercice 385 (Sous-espaces supplémentaires - ❄)

Soit D une droite vectorielle et H un hyperplan de E. Démontrer l'équivalence suivante

$$D \text{ n'est pas contenu dans } H \iff E = D \oplus H.$$

Exercice 386 (Sous-espaces supplémentaires (E2) - ❄)

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques, et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques. Montrer que l'on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 387 (IMT PC 2022 - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, F_1 et F_2 deux sous-espaces de E de dimension $n-1$.
Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.

Exercice 388 (Sous-espaces supplémentaires - ❄❄)

Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}$.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$F = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

et $G = \text{Vect}\{(a_1,\dots,a_n)\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 389 (CCINP 2022 (Elias A. B. - ❄❄)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note M l'ensemble des matrices magiques. Ce sont les matrices dont la somme des coefficients sur un ligne, sur une colonne ou sur une diagonale donne toujours le même résultat.
On note aussi :

- E l'ensemble des matrices symétriques magiques de trace nulle,
- F l'ensemble des matrices antisymétriques magiques,
- G l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont égaux.

1. Montrer que M est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $M = E \oplus F \oplus G$.
3. Dans le cas où $n = 3$, calculer $\dim(E)$, puis $\dim(M)$.

Exercice 390 (Noyaux supplémentaires - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2+u-2Id = 0$.
Montrer que $E = \text{Ker}(u-Id) \oplus \text{Ker}(u+2Id)$.

Exercice 391 (Noyaux supplémentaires - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 - u^2 = 0$ (avec $u^2 = u \circ u$).
Montrer que $F = \text{Ker}(u^2)$ et $G = \text{Ker}(u-Id)$ sont deux espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 392 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Soit f un endomorphisme de E qui admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$, d'abord en dimension finie, puis en dimension quelconque.

Exercice 393 (Mines-Ponts 2016 - ❄❄❄)

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E de dimension finie admettent un supplémentaire commun.

Exercice 394 (Application linéaire - ❄)

Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X], \\ P & \longmapsto & XP'(X) - 2P(X). \end{array} \right.$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Ecrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Quel est le rang de φ ? Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
4. Le noyau et l'image de φ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 395 (Application linéaire - ❄)

Vérifier que l'application suivante est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$f : P(X) \longmapsto X^2P'(X) - 2(X+1)P(X).$$

Déterminer son noyau, son image et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 396 (Application linéaire - ❄)

Soit $g : P \mapsto \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)dt.$

1. Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 397 (EIVP PSI 2017, CCP PSI 2018 - ❄❄)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par :

$$\varphi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Comparer le degré de P avec celui de $\varphi(P)$.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Étudier la surjectivité de φ.
4. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathrm{Im}(f),\ \exists P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ f(P) = Q, P(0) = P'(0) = 0.$$

Exercice 398 (TPE PSI 2019 - ❄)

On se donne trois réels distincts a_1, a_2, a_3. Soit φ l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$.

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et :

$$L_k = \varphi^{-1}(e_k).$$

Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $R_2[X]$.
3. Expliciter les L_k.

Exercice 399 (TPE PC 2019 - ❄❄)

Montrer que $\varphi : P \longmapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 400 (Projecteurs - ❄)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 6 \\ -8 & 6 & 6 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer le rang de f. Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 401 (Application linéaire - ❄)

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ et l'on note $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ sa base canonique.

1. Justifier l'existence d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3},\ f(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} + 3\vec{e_3},\ f(\vec{e_3}) = \vec{e_1} + \vec{e_2} - 2\vec{e_3}.$$

2. Ecrire la matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f, puis une équation définissant $\mathrm{Im}(f)$.
Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.
4. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E. L'endomorphisme f est-il un projecteur ?

Exercice 402 (Projecteurs - ❄)

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que les deux sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans E.

$$F = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 0)\} \ \text{ et } \ G = \{(x, y, z) \in E,\ 2x + y - z = 0\}.$$

2. Déterminer la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E, de la projection sur G dans la direction de F.
3. En déduire la matrice , dans la base $\mathcal{B}$, de la symétrie par rapport à F dans la direction de G.

Exercice 403 (IMT PC 2022 - ❄)

Soient P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et D la droite vectorielle engendrée par $(2, 2, 1)$.
Montrer que P et D sont supplémentaires et déterminer les matrices dans la base canonique du projecteur sur P parallèlement à D et de la symétrie par rapport à P parallèlement à D.

Exercice 404 (Projecteurs - ❄❄)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E. Démontrer l'équivalence suivante.

$$p + q \text{ est un projecteur de } E \quad \Longleftrightarrow \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

Vérifier dans ce cas les égalités $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 405 (Projecteurs - ❄❄)

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.
2. Montrer les égalité :

$$\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \text{ et } \mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q).$$

Exercice 406 (Projecteurs - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E. Montrer l'équivalence :

$$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q) \quad \Longleftrightarrow \quad p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q.$$

Déterminer une CNS semblable pour que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 407 (Projecteurs - ❄❄)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie. Montrer l'équivalence :

f est un projecteur $\iff$ $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(I_E - f) = \dim(E)$.

Exercice 408 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, p et q deux endomorphismes de E tels que $p + q = Id_E$ et :

$$\mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q) \leq \dim(E).$$

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.
2. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 409 (ENSEA 2018 (Mélissandre H.) - ❄)

Dans $E = \mathbb{C}^n$, on note :

$$G = \mathrm{Vect}\{(1, \ldots, 1)\} \text{ et}$$
$$F = \{(x_1, \ldots, x_n),\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

1. Montrer que $E = F \oplus G$.
2. Soit $x \in E$. Déterminer l'expression du projeté de x sur F dans la direction de G, et celle de son projeté de sur G dans la direction de F.

Exercice 410 (CCP PSI 2016, ENSEA PSI 2019 - ❄❄)

On se donne une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n, tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} f_i = \mathrm{Id}_E \text{ et si } i \neq j \text{ alors } f_i \circ f_j = 0.$$

Montrer que les f_k sont des projecteurs de E et que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(f_i).$$

Exercice 411 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient p, q, r trois projecteurs de E. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur.

1. Montrer que la trace d'un projecteur est un entier naturel.
2. Montrer que $q = r = 0$.

Exercice 412 (Navale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{Id}_E$. On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par u.

On pose $q = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

Montrer que q est un projecteur et que $\mathrm{Ker}(q)$ est stable par u.

Exercice 413 (X PSI 2023 - ❄❄)

Soit E un espace de dimension finie.
Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Exercice 414 (IMT MP 2023 - ❄)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.

Exercice 415 (Rang - ❄❄)

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E vérifiant : $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Démontrer l'égalité $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.

Exercice 416 (Rang - ❄❄)

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.
Démontrer que $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g))$.

Exercice 417 (Mines-Télécom PSI 2017 - ❄❄)

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0$.

1. Calculer les dimensions de $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M)$.
2. Montrer que que M est semblable à la matrice $E_{1,3}$.

Exercice 418 (CCP PC 2014 - ❄❄)

Soit $A(X) = X^2 + X + 1$.

1. Montrer que l'application φ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par A est linéaire.
2. Donner son noyau et son image.

Exercice 419 (CCP PSI 2016 - ❄❄)

On note f l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de sa division euclidienne par le polynôme

$$D(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans leurs bases canoniques. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 420 (Hyperplan - ❄❄)

1. Démontrer que $H = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}[X] = \mathrm{Vect}\{1\} \oplus H$.
3. Démontrer que l'application
$$\Delta : P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer son noyau.
4. En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$ et $P(0) = 0$.

Exercice 421 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄)

Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p et S un sous-espace de E stable par u vérifiant $E = \mathrm{Im}(u) + S$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $E = \mathrm{Im}(u^k) + S$.
2. En déduire que $S = E$.

Exercice 422 (Mines-Télécom PSI 2017 - ❄❄)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,E)$.

1. Montrer que : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f \circ g) \iff E = \text{Im}(g) + \text{Ker}(f)$.
2. Montrer que :

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0_F\}.$$

Exercice 423 (Endormorphisme nilpotent - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On appelle endomorphisme nilpotent d'indice $q \in \mathbb{N}^*$ de E toute application $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $f^q = 0$ et $f^{q-1} \neq 0$.

1. Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice n.
   Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E, et donner la forme de la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que si f est un endomorphisme nilpotent d'indice $q \in \mathbb{N}^*$ de E, alors $q \leq n$.

Exercice 424 (Commutant de $\mathcal{L}(E)$ - ❄❄)

Soit E en $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On montre dans cet exercice, l'équivalence suivante.

$$\Big(\forall g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\Big) \iff \Big(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f = \lambda \text{Id}_E\Big).$$

1. Vérifier tout d'abord, que si f s'écrit $f = \lambda \text{Id}_E$, alors f commute avec tous les endomorphismes de E.

   On s'interesse désormais à la réciproque. Supposons que l'on ait

   $$\forall g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f.$$

2. Soit $\vec{x} \in E$ et $F = \text{Vect}\{\vec{x}\}$. Justifier l'existence d'un supplémentaire G de F dans E.
3. En considérant la projection sur F dans la direction de G, démontrer qu'il existe $\lambda_{\vec{x}} \in K$ tel que $f(x) = \lambda_{\vec{x}} \vec{x}$.
4. Soient $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ deux vecteurs de E. En distinguant les cas où la famille $\mathcal{F} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ est libre ou liée, démontrer l'égalité $\lambda_{\vec{x}_1} = \lambda_{\vec{x}_2}$.
5. En déduire le résultat attendu.

Exercice 425 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose u injectif. Déterminer pour tout $m \geq 1$, $K_m = \text{Ker}(u^m)$ et $I_m = \text{Im}(u^m)$.
2. Montrer que pour tout $m \geq 0$, $K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.
3. On suppose u non injectif.
   Montrer qu'il existe un entier $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$.
   Montrer alors que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_p = K_{p+q}$ et $I_p = I_{p+q}$ puis que $E = K_p \oplus I_p$.

Exercice 426 (IMT PC et Mines-Ponts PSI 2018- ❄❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$\mathcal{F} = \{g \in \mathcal{L}(E),\ \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g) \ \text{ et } \ \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)\}$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Exercice 427 (Mines-Ponts 2016 - ❄❄❄)

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $f^2 = g^2 = id_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f et g sont représentés par $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 428 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et F un sous-espace-vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \text{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Feuille 8

Calcul matriciel et déterminants

Extraits de rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *L'utilisation systématique de la méthode de Sarrus par certains candidats est parfois la cause de ces erreurs. On peut donc noter des calculs parfois maladroits de déterminants (la méthode dite « de Sarrus » a l'inconvénient majeur de ne pas permettre une factorisation directement) ou pour la résolution de systèmes linéaires, avec des substitutions peu efficaces. Il est d'ailleurs souvent opportun de simplifier le déterminant par des opérations sur les lignes et les colonnes avant de se lancer dans les calculs. La différence entre les candidats se fait entre celui qui comprend vraiment ce qu'il fait et celui qui fait les choses par automatisme.*
- **CCINP 2019 :** *Plusieurs candidats inventent des formules pour calculer le déterminant d'une matrice par blocs. Il serait bon d'avoir en tête des exemples simples permettant de démentir aisément ces formules.*
- **CCP 2016 :** *Les calculs de petits déterminants, lorsqu'ils aboutissent, sont trop souvent laborieux : Les candidats développent beaucoup trop vite et n'effectuent que très rarement des opérations sur les lignes ou les colonnes.*

  Bien que le programme autorise désormais à parler de noyau et d'image d'une matrice, de nombreux candidats ne maîtrisent pas le lien entre une matrice et l'application linéaire qui lui est associée dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, ce qui est source de lourdes erreurs de raisonnement. Par exemple, très peu comprennent, comme on l'a déjà constaté à l'écrit, pourquoi lorsqu'ils appliquent le théorème du rang à une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la dimension de l'espace de départ est p et non n voire np.
- **Mines-Ponts 2018 :** *Confrontés à un calcul de déterminant, beaucoup de candidats peinent à adopter une stratégie adaptée. Parfois, les développements par rapport à une rangée font intervenir des blocs non carrés.*
- **Mines-Ponts 2017 :** *Les candidats doivent pouvoir donner une formule explicite du produit matriciel de deux matrices, plutôt qu'un « schéma ». Il n'est pas inutile de savoir inverser directement, le cas échéant, une matrice carrée d'ordre 2.*

Exercice 429 (Produit matriciel - ❄)

Déterminer deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $MN = 0$ et $NM \neq 0$.

Exercice 430 (Produit matriciel - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Exercice 431 (Calcul d'inverse - ❄)

Calculer les inverses des matrices suivantes.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 432 (Inversibilité - ❄)

A quelle condition portant sur $m \in \mathbb{R}$ la matrice

$$P_m = \begin{pmatrix} 1 & m & m+1 \\ 1 & 0 & m^2 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?
Cette condition étant supposée vérifiée, calculer P_m^{-1}.

Exercice 433 (Inversibilité - ❄)

1. Donner la définition de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, on suppose que A et B sont inversibles.
   Démontrer que AB est inversible et exprimer $(AB)^{-1}$ en fonction de A^{-1} et B^{-1}.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on suppose que A est inversible.
   Démontrer que sa transposée A^T est inversible et exprimer $(A^T)^{-1}$ en fonction de A^{-1}.

Exercice 434 (Inversibilité - ❄)

Soient $n \geq 2$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $I_n + AB$ est inversible. Montrer que $I_n + BA$ est inversible.

Exercice 435 (Inversibilité - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme nilpotent de E. Démontrer que l'endomorphisme $Id_E - f$ est inversible.

Exercice 436 (TPE MP 2018 - ❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^3 = 0, AB = BA$ et B inversible. Montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice 437 (CCP 2018 (Axel C.B) - ❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\deg(P) \geq 1,\ P(0) = 1 \text{ et } AB = P(A).$$

1. Montrer que A est inversible.
2. En déduire que A et B commutent.

Exercice 438 (Inversibilité - ❄❄)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$u(P)(X) = P(X+1).$$

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 439 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Exprimer la matrice P de la famille $(S_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $(S_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer P^{-1}.

Exercice 440 (Navale PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄)

Montrer que la matrice M suivante est inversible et calculer son inverse.

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \ddots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Exercice 441 (Inversibilité - ❄❄❄)

Soit $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\quad \sum_{1\leq j\leq n,\ i\neq j} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Montrer que A est inversible. On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 442 (Inversibilité - ❄❄❄)

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Étudier l'inversibilité de M et exprimer son inverse lorsqu'elle existe.

Exercice 443 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.
2. Calculer alors M^{-1}.

Exercice 444 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $B^n = 0$ et que $AB = BA$.
Montrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ l'est.

Exercice 445 (CCINP MP 2022 - ❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A inversible, B nilpotente et $AB = BA$. Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.

Exercice 446 (TPE PSI 2018 (Mélissandre H.) - ❄)

Soit $n \geq 2$ un entier et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M^4$.

1. Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$.
   En déduire que si $M + I_n$ est inversible alors $M^2 = M^3$.
2. Écrire la division euclidienne de $X^3 - X^2$ par $X + 1$.
   En déduire que si $M^2 = M^3$ alors $M + I_n$ est inversible et exprimer dans ce cas, l'inverse de $M + I_n$ sous forme de polynôme en M.

Exercice 447 (Mines-Ponts 2017- ❄❄❄)

On définit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ et :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^n)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que u est un isomorphisme et trouver la matrice U de u dans les bases canoniques.
2. Calculer, pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $k \in [\![0, n]\!]$ la somme :
$$\sum_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km}.$$
3. En déduire U^{-1}.

Exercice 448 (Calcul de puissance - ❄)

Calculer les puissances des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 449 (IMT PC 2019 - ❄❄)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$.
Calculer $A^k + A^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 450 (Calcul de puissance - ❄❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 451 (Recherche d'image et de noyau - ❄)

Déterminer l'image et le noyau de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 452 (Recherche d'image et de noyau - ❄)

Déterminer l'image et le noyau de $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 453 (Recherche d'image et de noyau - ❄)

Déterminer l'image et le noyau de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 454 (Recherche d'image et de noyau - ❄)

Déterminer l'image et le noyau de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 455 (Recherche d'image et de noyau - ❄)

Déterminer l'image et le noyau de $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 456 (TPE MP 2019 - ❄)

Montrer (de deux manières différentes pour les 5/2) que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 457 (Mines-Ponts 2019, Centrale PC 2022 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer que A est semblable à la matrice $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $t_{i,i+1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec A. Montrer que B est un polynôme en A.

Exercice 458 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄❄)

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. Montrer que les matrices A et B sont semblables.
2. Le résultats subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$?

Exercice 459 (Formules de changement de base - ❄)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par

$$f(e_1) = 2e_2 + 4e_3,$$
$$f(e_2) = e_1 + e_2 - 2e_3,$$
$$f(e_3) = -e_1 + e_2 + 4e_3$$

1. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base (e'_1) de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.
3. Déterminer une base $(e'_2, e'3)$ de $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$.
4. Démontrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
5. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle est la relation entre M et D ?
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer M^n.

Exercice 460 (Formules de changement de base - ❄)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = M = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une équation de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires dans E ?
3. On pose : $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$ et $u_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$. Montrer que $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{U}$.

Exercice 461 (Formules de changement de base - ❄)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y - z, x + 2y + z, y + 2z).$$

1. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E. On note $\mathcal{B}'$ cette nouvelle base.
4. Déterminer la matrice M' de f dans cette nouvelle base ? Quel est le lien entre M et M' ?

Exercice 462 (Formules de changement de base - ❄)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 6 & -2 & 9 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Reconnaître l'endomorphisme f et en donner ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 463 (Formules de changement de base - ❄)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par

$$f(x, y, z) = (-2x + y + 2z, -3x + 2y + 2z, -7x + 3y + 5z).$$

1. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base (e'_1) de $\mathrm{Ker}(f - 3Id)$.
3. Déterminer une base (e'_2) de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.
4. On pose $e'_3 = 3e_1 + 2e_2 + 4e_3$. Démontrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
5. Calculer $f(e'_3)$.
6. Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle est la relation entre M et T ?
7. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n.

Exercice 464 (Matrice d'endormorphisme - ❄)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3,$$
$$f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3,$$
$$f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - I_E)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f^2 + I_E)$.
2. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E.
   Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

Exercice 465 (CCINP PSI 2018, 2023 (Maxence B.) - ❄

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^2) \neq \mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Déterminer les endomorphismes v qui commutent avec u.

Exercice 466 (Matrice d'endormorphisme - ❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E. On suppose que $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1, que $u^2 \neq 0$ et que $u^3 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)$ et que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$.
2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 467 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2$ et $u^2 = u \circ u = 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 3$ et $u^4 = u \circ u \circ u \circ u = 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Im}(u^2)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 468 (CCINP PSI 2021 et 2022 - ❄❄)

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f + f^3 = 0$ et A sa matrice dans la base canonique.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
4. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 469 (Rang de matrice - ❄)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Déterminer le rang de la matrice :

$$A = [i + j + ij]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 470 (IMT PSI 2019 - ❄)

Déterminer le rang de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients :

$$a_{i,j} = \sin(i + j).$$

Exercice 471 (Bases - ❄)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a, b pour que la famille $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ b \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 472 (Bases - ❄)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a, b pour que la famille $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ b \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ a \\ -a \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} b \\ b \\ a \\ a \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ -b \\ b \end{pmatrix}.$$

Exercice 473 (Déterminant d'une famille de vecteurs - ❄)

Calculer le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la famille $\mathcal{F} = (X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 474 (Bases - ❄)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a, b pour que la famille $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$P_1(X) = (b+c)^2 + a^2X + a^2X^2,$$
$$P_2(X) = b^2 + (a+c)^2X + b^2X^2,$$
$$P_3(X) = c^2 + c^2X + (b+a)^2X^2.$$

Exercice 475 (Bases - ❄)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres $a, b \in \mathbb{C}$ pour que la famille $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

$P_1(X) = 1+aX+bX^2+abX^3$, $\quad P_2(X) = 1+cX+bX^2+cbX^3$, $P_3(X) = 1+aX+dX^2+adX^3$ et $P_4(X) = 1+cX+dX^2+cdX^3$.

Exercice 476 (IMT PC 2019 - ❄)

On pose $B_{n,k} = X^k(1-X)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Montrer que $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à cette base.

Exercice 477 (Bases - ❄❄)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels $a_0, \dots, a_n$ pour que la famille :

$$\mathcal{F} = ((X+a_0)^n, \dots, (X+a_n)^n)$$

soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 478 (Calcul de trace - ❄)

Montrer que $A.A^T$ et $A^T.A$ sont symétriques et exprimer leur trace à l'aide des coefficients de A.

Exercice 479 (CCP PSI 2018 - ❄)

1. Montrer que f défini par $f(M) = M+\mathrm{tr}(M)A$ est bijectif dès que $\mathrm{tr}(A) \neq -1$.
2. On suppose que $\mathrm{tr}(A) = -1$.
   Donner $\mathrm{Ker}(f)$ et montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
3. Résoudre l'équation $X+\mathrm{tr}(X)A = B$ dont l'inconnue est la matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 480 (Une équation matricielle - ❄❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\alpha M + \mathrm{tr}(M)A = B.$$

Exercice 481 (Matrice de rang 1 - ❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Démontrer que A est semblable à une matrice B dont les $n-1$ dernières colonnes sont nulles.
2. En déduire les égalités :

$$A^2 = \mathrm{tr}(A).A \text{ et } \det(A+I_n) = 1+\mathrm{tr}(A).$$

Exercice 482 (Mines-Ponts 2016 - ❄❄❄)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in GL(E)$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer l'équivalence :

$$f+g \in GL(E) \iff \mathrm{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1.$$

Exercice 483 (MP Mines-Télécom 2017 - ❄❄)

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Calculer la trace de φ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = PM - MP.$$

Exercice 484 (IMT MP 2022 - ❄❄)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

1. A-t-on nécessairement $BA = 0$?
2. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}((A+B)^p) = \mathrm{tr}(A^p) + \mathrm{tr}(B^p)$.
3. Déterminer une relation entre $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(B)$.

Exercice 485 (CCP PSI 2019 - ❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.

1. Pour $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$, calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.
2. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $f(AB) = f(BA)$.
   Montrer que f est colinéaire à la trace.
3. Soit g un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(I_n) = I_n$ et, pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $g(AB) = g(BA)$.
   Montrer que g conserve la trace.

Exercice 486 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄)

On note $\mathcal{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices de trace nulle et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Montrer que $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

Exercice 487 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(B)$.
2. Montrer que $AB = BA$.

Exercice 488 (CCP PSI 2016 - ❄❄)

Montrer que f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)dt$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa trace.

Exercice 489 (IMT PSI 2019 (Clémence H.) - ❄)

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\det({}^tM)$ et $\det(\lambda M)$ en fonction de $\det(M)$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant ${}^tM = -M$.
   (a) Si n impair, M est-elle inversible ?
   (b) Si $n = 2$, M est-elle inversible ?
   (c) Existe-t-il un résultat pour $n = 4$?

Exercice 490 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ac & bc \end{vmatrix}$.

Exercice 491 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \bar{\alpha} & 1 & \alpha \\ \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 492 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$.

Exercice 493 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3+c^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 494 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$.

Exercice 495 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{vmatrix}$.

Exercice 496 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$.

Exercice 497 (Système linéaire - ❄)

Soient a, b des réels. Résoudre le système linéaire suivant.

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ ax & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 498 (ENSAM PT 2014 - ❄❄)

On note a_1, a_2, a_3 les racines du polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + 1$.

1. Calculer le déterminant de $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} x + a_1 y + a_1^2 z = a_1^4 \\ x + a_2 y + a_2^2 z = a_2^4 \\ x + a_3 y + a_3^2 z = a_3^4 \end{array} \right.$
2. Montrer qu'il est non nul.
3. Effectuer la division euclidienne de X^4 par $P(X)$ et trouver une solution particulière de $\mathcal{S}$. Conclure.

Exercice 499 (Propriétés algébriques du déterminant - ❄)

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair, est nul.

Exercice 500 (Propriétés algébriques du déterminant - ❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$.
Montrer que $\det(A) = (-1)^n$.

Exercice 501 (Propriétés algébriques du déterminant - ❄)

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = -I_3.$$

Exercice 502 (Déterminant d'un endomorphisme - ❄)

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = X^2 P'(X) - 2(X+1)P(X)$.
Après avoir vérifié que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, calculer son déterminant.

Exercice 503 (Déterminant d'endomorphismes - ❄)

Calculer le déterminant de chacun des endomorphismes suivants.
Lesquels sont des isomorphismes ?

1. $f_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f_1(P) = X^2 P'(X) - (nX+1)P(X).$$
2. $f_2 \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ défini par
$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \quad f_2(M) = \frac{1}{4}(M + 3^t M).$$

Exercice 504 (Déterminant d'endomorphismes - ❄)

Calculer le déterminant de chacun des endomorphismes suivants.
Lesquels sont des isomorphismes ?

1. $f_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ f_1(P) = XP'(X) + P(1).$$
2. $f_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ défini par
$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ f_2(M) = AM \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
3. $f_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ défini par
$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ f_3(M) = {}^t M.$$

Exercice 505 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Calculer le déterminant de $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $u(M) = M^T$.
Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 506 (Déterminant d'endomorphisme - ❄❄)

Soit $f \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ défini par $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est fixée. On exprimera $\det(f)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 507 (Déterminant d'endomorphisme - ❄❄)

Calculer le déterminant de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = Q(P) + X.R(P)$$

où $Q(P)$ désigne le quotient de la division euclidienne de P par X et $R(P)$ désigne le reste de la division euclidienne de P par X^n.
Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 508 (Déterminant et polynôme - ❄❄)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ les racines du polynôme $X^3 - 2X^2 + X - 1$. Calculer le déterminant suivant.

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Exercice 509 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. On pose :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix}.$$

Montrer que $\Delta \neq 0$ si et seulement si x_1 et x_2 sont distincts.

Exercice 510 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $n \times n$: $A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 511 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $n \times n$: $B_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 512 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $n \times n$:

$$C_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & & n \\ -1 & -2 & 0 & & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 513 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $n \times n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 514 (Déterminant - ❄)

Calculer le déterminant $n \times n$:

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & & & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ n-1 & & & & \ddots & n \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 515 (Déterminant - ❄❄)

Calculer le déterminant $n \times n$:

$$F_n = \begin{vmatrix} \cos(2\theta_1) & \cos(\theta_1+\theta_2) & \cdots & \cos(\theta_1+\theta_n) \\ \cos(\theta_2+\theta_1) & \cos(2\theta_2) & \cdots & \cos(\theta_2+\theta_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(\theta_n+\theta_1) & \cos(\theta_n+\theta_2) & \cdots & \cos(2\theta_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 516 (CCP PC 2018 - ❄)

Calculer le déterminant $n \times n$: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 4 & 2 & & (0) \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Exercice 517 (St-Cyr MP 2022 - ❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(B) = 1$.
Montrer que $\det(A+B)\det(A-B) \leq \det(A)^2$.

Exercice 518 (IMT PSI 2018 - ❄)

On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $a_{i,j} = 1 + a_i\delta_{i,j}$ avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $\det(A) = \displaystyle\prod_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k}^n a_i$.

Exercice 519 (Déterminant - ❄)

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des complexes. On pose $m_{i,j} = 1 + a_i a_j$ et on considère la matrice $M = [m_{i,j}]_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$. Calculer le déterminant de M.

Exercice 520 (Déterminant - ❄❄)

Calculer le déterminant $n \times n$:

$$F_n = \begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

Exercice 521 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soient $a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\begin{vmatrix} a_1+x & x & \cdots & x \\ x & a_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & a_n+x \end{vmatrix}$.

Exercice 522 (Déterminant - ❄❄)

Calculer le déterminant $p \times p$:

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \cdots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 523 (Déterminant - ❄❄)

Calculer le déterminant $p \times p$:

$$A_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

Exercice 524 (CCP PC 2018 - ❄)

Calculer le déterminant $n \times n$:

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 525 (CCP PC 2018 - ❄)

Calculer le déterminant $n \times n$:

$$C_n = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & 2\cos(\theta) & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

Exercice 526 (Déterminant - ❄❄)

Calculer le déterminant $n \times n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & \cdots & x_n \\ x_1 & x_1 & x_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_1 & x_2 \\ x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 527 (CCINP PSI 2023 - ❄)

1. Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $f_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{kx}$.
   Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
3. (a) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$. On les note α, β, γ.
   (b) Résoudre le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x+y+z = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 0 \end{cases}$

Exercice 528 (CCP PSI 2019 - ❄)

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On veut montrer que la famille $\left((X+k)^n\right)_{k \in \{0,\dots,n\}}$ est libre.

1. Rappeler la formule du déterminant de Vandermonde.
2. Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^n = 0$.
   Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, on a : $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X+k)^p = 0$.
3. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, on a : $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k k^p = 0$.
   Conclure.
4. Retrouver ce résultat à l'aide d'un déterminant.

Exercice 529 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \; P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Exercice 530 (Déterminant - ❄❄)

Calculer $\det(A)$ avec $A = \left[\dfrac{1}{a_i + b_j}\right]_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$.

Exercice 531 (Mines-Ponts PC 2016 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$ et B de colonnes
$$K_i = \sum_{j\neq i} C_j.$$
Calculer $\det(B)$ en fonction de A.

Exercice 532 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄)

Soient $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p;q}(\mathbb{R})$.
Démontrer que $\det(I_q - AB) = \det(I_p - BA)$.

Exercice 533 (Mines-Ponts PSI 2015 - ❄❄❄)

Soit P de degré n et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts.
Montrer que $(P(X + a_i))_{i=0,\dots,n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 534 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = a$ si $i = j$, $a_{i,j} = b$ si $i > j$ et $a_{i,j} = c$ si $i < j$.
Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer $\det(A + xJ)$.
2. En déduire $\det(A)$.

Exercice 535 (Déterminant - ❄❄)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose
$$A = [a_{i,j}]_{i,j=1\cdots n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & \cdots & \cdots & a \\ b & \lambda_2 & a & \cdots & \cdots & a \\ b & b & \lambda_3 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & b & \cdots & \cdots & b & \lambda_n \end{pmatrix}$$

1. On suppose d'abord que a et b sont distincts. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $D(x) = \det([a_{i,j} + x]_{i,j\in\{1,\dots,n\}})$.
   Montrer que D est une fonction polynôme de degré ≤ 1.
   En déduire $D(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis $\det(A)$.
2. Calculer $\det(A)$ lorsque $a = b$.

Exercice 536 (Une propriété algébrique - ❄❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de E, $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une base de E. Démontrer l'égalité suivante.
$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), u_2, \dots, u_n) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, f(u_n)) = \operatorname{tr}(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Exercice 537 (Déterminant par bloc - ❄❄)

On considère des matrices A, B, C, D telles que les matrices suivantes, définies par blocs, soient carrées.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Donner $\det(M)$.
2. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Soient a, b, c, d des réels, et $N = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$.
   Calculer $\det(N)$.
3. On suppose que $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que $CD = DC$ et que D est inversible.
   Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.

Exercice 538 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$.
Montrer que $\det(M) \ge 0$.

Exercice 539 (Mines-Ponts 2017 - ❄❄❄)

Soit H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle et N l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes.

1. Ces deux ensembles sont-ils des espaces vectoriels ?
2. Montrer que l'espace engendré par N est inclus dans H.
3. L'inclusion ci-dessus est-elle une égalité ?

Exercice 540 (Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
2. Montrer que toute matrice de H est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
   On pourra raisonner par récurrence sur n et distinguer le cas où M est une matrice d'homothétie.
3. Montrer que $H = \{AB - BA,\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.
   On pourra utiliser la question 2.