



Devoir surveillé 7* - Correction

Exercice

1. Les colonnes de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale.

De plus $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E donc :

f est un automorphisme orthogonal de E .

2. On a $\det(f) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)) = 1$ et $f \neq Id$, donc f est une rotation dont on détermine l'axe.
Le calcul donne $E_1(f) = \{(x, y, z) \in E, f(x, y, z) = (x, y, z)\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$ donc f est une rotation d'axe $D = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$. On oriente D par le vecteur $u = (1, 1, 0)$ et on détermine l'angle θ de la rotation.

- D'une part, dans une base adaptée, la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $1 + 2 \cos(\theta) = \text{tr}(f) = \frac{1}{3}(1 + 1 - 1)$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$.

- D'autre part, le signe de $\sin(\theta)$ est aussi celui de $\det_{\mathcal{B}}(e_1, f(e_1), u)$.

Or, $\det_{\mathcal{B}}(e_1, f(e_1), u) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} > 0$ et donc $\theta = +\text{Arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)$.

f est la rotation d'axe orienté par $u = (1, 1, 0)$ et d'angle $\theta = +\text{Arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Problème

Centrale PC 2023 Maths 1

I – Résultats préliminaires

Q1. Les composantes de $Z = AX = (Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les $Z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Par hypothèse, $\forall i, j, a_{ij} > 0$ et $x_j \geq 0$, donc $Z_i \geq 0$. Si l'un des Z_i était nul, on aurait pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij}x_j = 0$ et donc $x_j = 0$ ($a_{i,j} > 0$), ce qui n'est pas possible puisque $X \neq 0$.

Et donc $AX > 0$.

Les composantes de $M = |AB|$ sont les $m_{i,j} = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right|$, celles de $N = |A||B|$ sont les $n_{i,j} = \sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}|$.

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, m_{i,j} = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}| = n_{i,j}$$

donc les coefficients de $|A||B| - |AB|$ sont positifs et ainsi $|AB| \leq |A||B|$.

Q2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad |(X|Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$.

Il suffit de poser $x_k = |z_k|$ et $y_k = |w_k|$, qui sont réels (positifs) pour obtenir l'inégalité proposée avec le produit scalaire canonique :

$$\sum_{k=1}^n |z_k| |w_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Q3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|1+z| = 1+|z|$. On élève au carré et on transforme le carré du module en $z\bar{z}$.

On obtient alors $1+z+\bar{z}+z\bar{z} = 1+2|z|+z\bar{z}$ d'où $z+\bar{z} = 2|z|$.

On utilise l'écriture algébrique, soit $2a = 2\sqrt{a^2+b^2}$. Donc $a \geq 0$ et en élevant au carré de nouveau, on récupère $b = 0$.

$$\text{si } |1+z| = 1+|z| \text{ alors } z \in \mathbb{R}^+.$$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq 0$ et $|z+z'| = |z| + |z'|$.

Comme $|z| \neq 0$, $|z+z'| = |z| + |z'|$ devient $|z| \left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = |z| \left(1 + \frac{|z'|}{|z|} \right)$. On simplifie donc par $|z|$ et on retrouve le cas précédent. Donc $\frac{z'}{z}$ est un réel positif que l'on note α . Ainsi,

$$\text{si } z \neq 0 \text{ et } |z+z'| = |z| + |z'| \text{ alors } \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, z' = \alpha z.$$

Q4. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $z_1 \neq 0$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$A = \left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq |z_1 + z_k| + \sum_{j \neq 1, k} |z_j| \leq \sum_{j=1}^n |z_j| = B$$

Or $A = B$ par hypothèse, donc tous les membres de l'encadrement sont égaux et on obtient donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|.$$

Ce qui prouve, en utilisant la question Q3, qu'il existe α_k , réel positif, tel que $z_k = \alpha_k z_1$. Dit autrement, les z_k possèdent tous le même argument que l'on note θ . On a bien démontré :

$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, z_k = e^{i\theta} |z_k|.$$

II – Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Q5. On a $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ donc $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc$.

Q6. $b > 0$ et $c > 0$ donc $\Delta > 0$.

Le polynôme caractéristique possède donc deux racines réelles distinctes λ et μ (avec $\lambda < \mu$ par exemple. La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc diagonalisable.

$$A \text{ est semblable à la matrice } \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda < \mu.$$

Q7. On a choisi $\lambda < \mu$. On a donc : $\lambda = \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\mu = \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2}$.

Puisque $a > 0$ et $d > 0$, on a déjà $\mu > 0$.

De plus, puisque a, d et Δ sont strictement positifs :

$$\lambda^2 = \frac{(a+d)^2 - 2(a+d)\sqrt{\Delta} + \Delta}{4} < \frac{(a+d)^2 - 2(a+d)\sqrt{\Delta} + \Delta}{4} = \mu^2.$$

Et donc : $\boxed{|\lambda| < |\mu| = \mu.}$

Q8. Notons D la matrice diagonale formée des deux valeurs propres. Il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Ainsi $A^2 = PDP^{-1}.PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ et une récurrence élémentaire donne $A^k = PD^kP^{-1}$.

L'application $\varphi_P : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc elle est continue.

Ainsi, si $\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = \Delta$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_P(D^k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = \varphi_P(\Delta)$.

De même, puisque $D^k = P^{-1}A^kP$, en utilisant $\varphi_{P^{-1}}$, on obtient que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = B$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_P(A^k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = \varphi_{P^{-1}}(B)$. Et donc

$\boxed{\text{La suite } (A^k) \text{ converge si et seulement si la suite } (D^k) \text{ converge.}}$

Or $D^k = \begin{pmatrix} \mu^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$. Donc (D^k) converge si et seulement si (λ^k) et (μ^k) convergent, autrement dit si et seulement si $\lambda \in]-1, 1]$ et $\mu \in]-1, 1]$.

- Si $\mu < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = 0$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

- Si $\mu > 1$ alors (D^k) diverge.

- Si $\mu = 1$ alors $|\lambda| < 1$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta \neq 0$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = P\Delta P^{-1} = L \neq 0$.

De ce fait : $\boxed{(A^k) \text{ converge vers une matrice } L \text{ non nulle si et seulement si } \mu = 1.}$

On a directement $\Delta^2 = \Delta$ et $\text{rg}(\Delta) = 1$. Et comme $L = P\Delta P^{-1}$, on a aussi : $L^2 = L$ et $\text{rg}(L) = 1$.

$\boxed{L \text{ est la matrice d'un projecteur de rang 1 de } \mathbb{R}^2.}$

Q9. Les coefficients de B sont strictement positifs, donc d'après la question Q6, B est diagonalisable.

Avec les mêmes notations, on a $\chi_A(X) = X^2 - (2 - \alpha - \beta)X + (1 - \alpha - \beta)$.

1 est une racine évidente, l'autre est donnée par la somme : $\lambda + \mu = 2 - \alpha - \beta$.

Et puisque $\lambda < \mu$, on obtient $\mu = 1$ et $\lambda = 1 - \alpha - \beta$.

Pour construire une base de vecteurs propres, il suffit de choisir un vecteur propre associé à chaque valeur propre, on trouve par exemple $X_\mu = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $X_\lambda = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et donc :

$\boxed{\text{Avec } S = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}), \text{ les formules de changement de base donnent } B = SDS^{-1}.}$

Remarque : puisque D était donnée, on pouvait aussi directement chercher un vecteur propre associé à 1 et un vecteur propre associé à $1 - \alpha - \beta$.

Q10. On a $\mu = 1$ donc par la question Q8, (B^k) converge vers la matrice $L = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$.

Or $S^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix}$, on trouve après calculs que :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = \Lambda = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} .}$$

III – Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; rayon spectral

Q11. On montre d'abord que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme. La positivité et l'homogénéité sont faciles à vérifier.

Pour la séparation (caractère défini), si $\|A\|_\infty = 0$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$ donc comme c'est une somme de termes positifs, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = 0$ donc $A = 0$.
Pour l'inégalité triangulaire, si A et B sont deux matrices et $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.$$

Et donc, $\|A + B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |A_{ij}| \right) \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.$

On montre ensuite qu'elle est sous-multiplicative : $\|AB\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \right).$

Or pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^n \|B\|_\infty = \|B\|_\infty \sum_{k=1}^n |a_{ik}| = \|B\|_\infty \|A\|_\infty \end{aligned}$$

Donc $\|AB\|_\infty \leq \|B\|_\infty \|A\|_\infty$ ce qu'on voulait.

$$\boxed{\|\cdot\|_\infty \text{ est une norme sous-multiplicative sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Q12. On admet que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrons qu'elle est sous-multiplicative. On a :

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \leq \|A\|_2^2 \|B\|_2^2 \quad \text{et donc} \quad \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2 \end{aligned}$$

Q13. De manière succincte :

- $\nu(A)$ est un réel positif.
- $\nu(A + B) = N(SAS^{-1} + SBS^{-1}) \leq N(SAS^{-1}) + N(SBS^{-1}) \leq \nu(A) + \nu(B)$
- $\nu(\lambda A) = N(S\lambda AS^{-1}) = |\lambda|N(SAS^{-1}) = |\lambda|\nu(A)$
- $\nu(A) = 0 = N(SAS^{-1})$. Comme N est une norme $SAS^{-1} = 0$ et ainsi $A = 0$

Donc ν est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Et enfin $\nu(AB) = N(SAS^{-1}SBS^{-1}) \leq N(SAS^{-1})N(SBS^{-1}) \leq \nu(A)\nu(B)$ donc ν est sous-multiplicative.

Q14. A et SAS^{-1} sont semblables donc ont mêmes valeurs propres. Leur rayon spectral est donc le même.

Q15. Le polynôme caractéristique est toujours scindé dans $\mathbb{C}$ donc A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle $A = PTP^{-1}$ et T triangulaire.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T , ce sont les valeurs propres de A répétées avec multipliités.

On a $A^k = PT^kP^{-1}$ et T^k est triangulaire avec comme coefficients diagonaux : $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$.

Ces coefficients sont les valeurs propres de A^k . Et donc

$$\rho(A^k) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_i|^k = \left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_i| \right)^k = \rho(A)^k.$$

Enfin, les valeurs propres de αA sont les $\alpha \lambda_i$ donc

$$\rho(\alpha A) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |\alpha \lambda_i| = |\alpha| \rho(A).$$

Q16. Soit λ une valeur propre de A . Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Notons alors H la matrice dont la première colonne est X et les colonnes suivantes sont nulles. Alors, évidemment, $AH = \lambda H$

Comme N est sous-multiplicative, $N(AH) \leq N(A)N(H)$ donc $N(\lambda H) = |\lambda|N(H) \leq N(A)N(H)$.

Comme $N(H) > 0$, on a $|\lambda| \leq N(A)$ car $N(H) > 0$ et cela pour toute valeur propre λ de A . On obtient :

$$\rho(A) \leq N(A).$$

Q17. Tout d'abord, puisque $D_\tau = \text{diag}(1, \tau, \dots, \tau^{n-1})$ avec $\tau \neq 0$ on a :

$$(D_\tau)^{-1} = \text{diag}(1, \tau^{-1}, \dots, \tau^{-n+1}).$$

Quand on multiplie par la gauche avec une matrice diagonale, on multiplie la ligne par le coefficient diagonal correspondant. La multiplication à droite multiplie la colonne.

La matrice $M = D_\tau^{-1}TD_\tau$ est donc la matrice dont les coefficients sont donnés par :

$$m_{i,j} = \tau^{1-i}T_{i,j}\tau^{j-1} = \tau^{j-i}T_{i,j}.$$

Q18. On commence par répondre à la question pour $\tau > 0$.

La matrice T est triangulaire supérieure donc si $i > j$, on a $t_{i,j} = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=i}^n \tau^{j-i}|T_{i,j}| \right) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(|T_{ii}| + \sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i}|T_{i,j}| \right) \\ &\leq \rho(A) + \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i}|T_{i,j}| \right) \quad (\text{majoration à détailler}) \end{aligned}$$

On pose $f(\tau) = \sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i}|T_{i,j}|$. C'est une fonction polynomiale en τ sans terme constant, et donc $\lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau) = 0$.

Par définition de limite, il existe $\delta > 0$ tel que si $|\tau| = \tau \leq \delta$ alors $f(\tau) = |f(\tau)| \leq \epsilon$, ce qu'on voulait.

Si $\tau < 0$, on reprend les majorations précédentes en remplaçant τ par $|\tau|$. On a toujours $\lim_{\tau \rightarrow 0} f(|\tau|) = 0$, donc le résultat demandé est encore valable.

$$\boxed{\exists \delta > 0, \forall \tau \in \mathbb{R}^*, \quad |\tau| \leq \delta \implies \|D_\tau^{-1} T D_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon.}$$

Remarque : Erreur d'énoncé... si $\tau = 0$, la matrice D_τ n'est plus inversible... Et d'ailleurs la matrice D_τ a été définie pour $\tau > 0$...

Q19. On sait que $T = P^{-1}AP$. On pose pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\nu(M) = \|D_\tau^{-1}P^{-1}AMPD_\tau\|_\infty$.

D'après la question 13, il s'agit bien d'une norme sous-multiplicative. Elle dépend de τ et de P (donc de A !).

Et elle vérifie : $\nu(A) = \|D_\tau^{-1}P^{-1}APD_\tau\|_\infty \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon = \rho(T) + \varepsilon$ puisque T et A sont semblables (question 15).

Q20. Si $\rho(A) < 1$, soit $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$. Par la question précédente il existe une norme sous-multiplicative N telle que $N(A) \leq \rho(A) + \epsilon$. Par sous-multiplicativité de N , pour tout $k \geq 1$, $N(A^k) \leq N(A)^k \leq (\rho(A) + \epsilon)^k$ qui tend vers 0. Ainsi $N(A^k)$ tend vers 0 donc A^k tend vers 0 (comme on est en dimension finie, le fait pour une suite de tendre vers 0 ne dépend pas de la norme choisie).

Réciproquement, si (A^k) tend vers 0, puisque $\rho(A^k) \leq N(A^k)$ on obtient $\rho(A)^k$ tend vers zéro. Et donc $\rho(A) < 1$.

$$\boxed{\text{la suite } (A^k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers la matrice nulle si et seulement si } \rho(A) < 1.}$$

Q21. A est sym réelle donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Q22. Si $\rho(A) = 0$ alors la seule valeur propre est zéro. Comme A est diagonalisable, $A = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Q23. Il existe une base orthonormée de vecteurs propres (e_i) . Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les composantes de X relativement à cette base. Alors $AX = (\lambda_i x_i)_i$ et $X^T AX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ par orthogonalité.

Il suffit alors de majorer λ_i par μ et utiliser le fait que X est unitaire pour obtenir l'inégalité voulue.

Q24. Si X est un vecteur propre associé à μ alors on obtient évidemment l'égalité. Réciproquement, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = \mu$

alors $\sum_{i=1}^n (\mu - \lambda_i) x_i^2 = 0$. Il s'agit d'une somme de termes positifs, nulle. Donc chaque terme est nul. Si $\mu \neq \lambda_i$ cela signifie que $x_i = 0$. Par contre, lorsque $\mu = \lambda_i$, x_i peut être non nul et comme la somme des x_i^2 vaut 1, l'un au moins est non nul. Cela signifie donc que X est vecteur propre associé à μ .

Q25. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et de réutiliser la technique de la question 23 pour majorer ensuite par μ

Q26. Pour X vecteur propre unitaire associé à une valeur propre λ de A , $|\lambda| = |X^T AX| \leq \mu$ par la question précédente, d'où $\rho(A) \leq \mu$. Or μ est une valeur propre de A donc $\mu \leq \rho(A)$ et finalement $\mu = \rho(A) = r$.

Q27. Soit X un vecteur propre de A associé à r , alors $X \neq 0$ donc $|X| \neq 0$. On utilise la question 25 :

$$r = |r| = |X^T AX| \leq |X|^T A |X| \leq r$$

donc il n'y a que des égalités. Donc $|X|^T A |X| = r$ et, par la question 24, $r|X| = A|X|$ et $|X|$ est vecteur propre associé à r .

Montrons maintenant que $|X| > 0$. Si l'une des coordonnées de $|X|$ est nulle cela signifie que $\sum a_{ij}|x_j| = 0$ pour cette ligne i . Or $A > 0$. Cela signifierait que tous les x_i sont nuls ce qui est absurde.

Q28. La question revient à montrer que tous les coefficients de X sont de même signe. On a $|X| > 0$ donc aucun coefficient de X n'est nul.

Par ce qui précède $|AX| = |rX| = r|X| = A|X|$ et on revient aux coordonnées, c'est-à-dire que pour tout i entre 1 et n :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j|$$

en utilisant que les $a_{i,j}$ sont strictement positifs. On peut donc appliquer la question 4. Comme les x_i sont réels, il vient $e^{i\theta} = \pm 1$, ce qui signifie que tous les x_i sont de même signe.

Q29. On considère donc X_1 et X_2 deux vecteurs propres orthogonaux associés à r . D'après ce qui précède, tous les coefficients de X_1 et X_2 sont non nuls et de signe constant.

On a $X_1^T X_2 = 0$ ce qui impossible d'après le signe de la somme. Donc le sous-espace propre est de dimension 1.

Q30. Comme A est diagonalisable, la multiplicité de r est la dimension du sous-espace propre soit 1.

Considérons λ tel que $|\lambda| = r$ et $AX = \lambda X$ alors $A|X| = r|X|$. Or $X = \pm|X|$. Donc on a $AX = rX$ c'est-à-dire que X est aussi vecteur propre associé à r . Donc $\lambda = r$.

Q31. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ possède les vp -1 et 1 .

Q32. $A^p X = r^p X$ et on peut appliquer le IV - B. Donc $X = \pm|X|$ et $|X| > 0$ et on obtient bien le sous espace propre de dimension 1 engendré par un vecteur positif.

Q33. Si p est impair : $\rho(A^p) = r^p$ et par la question 30 appliquée à A^p , r^p est l'unique valeur propre de module r^p de A^p , donc par stricte croissance de $x \mapsto x^p$, r est l'unique valeur propre de A de module r .

Si p est pair, on a toujours $\rho(A^p) = r^p$, et par la question 30 r^p est l'unique valeur propre de module r^p de A^p . Il faut montrer que $-r$ n'est pas valeur propre de A . Or comme A est diagonalisable, A^p aussi et :

$$\dim(\ker(A^p - r^p I_n)) = \dim(\ker(A - r I_n)) + \dim(\ker(A + r I_n)).$$

Par la question 29 on sait que la dimension de l'espace propre de gauche est 1, et celle de $\ker(A - r I_n)$ vaut également 1 par la question 32, donc nécessairement $\dim(\ker(A + r I_n)) = 0$ et $-r \notin \text{Sp}(A)$. Donc r est l'unique valeur propre de module r de A .

Q34. Soit λ une valeur propre de A . On sait qu'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Considérons les composantes de X non nulles. L'une d'entre elles est de module maximal. On la note i_0 .

Alors on a $\sum_{j=1}^n A_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0}$ soit $\sum_{j=1, j \neq i_0}^n A_{i_0 j} x_j = (\lambda - A_{i_0 i_0}) x_{i_0}$

Et $|\lambda - A_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |A_{i_0 j}| |x_j|$.

On divise alors par $|x_{i_0}|$ non nul et $\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq 1$ pour conclure.

Q35. Utilisons la proposition : le spectre de A est celui de $D^{-1}AD$. On applique alors la question 34 à la matrice $D^{-1}AD$: si $\lambda \in \text{sp}(A) = \text{sp}(D^{-1}AD)$, il existe i entre 1 et n tel que :

$$\begin{aligned} |\lambda - A_{ii}| = |\lambda - X_i^{-1}A_{ii}X_i| &\leq \sum_{j=1, j \neq i} X_i^{-1}|A_{ij}|X_j \leq X_i^{-1} \sum_{j=1, j \neq i} B_{ij}X_j \\ &\leq X_i^{-1}(\rho(B) - B_{ii})X_i \end{aligned}$$

Ce qui fournit l'inégalité demandée.