



Devoir surveillé 7 - Correction

Exercice

1. Les colonnes de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice orthogonale.

De plus $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E donc :

f est un automorphisme orthogonal de E .

2. On a $\det(f) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)) = 1$ et $f \neq Id$, donc f est une rotation dont on détermine l'axe.

Le calcul donne $E_1(f) = \{(x, y, z) \in E, f(x, y, z) = (x, y, z)\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$ donc f est une rotation d'axe $D = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$. On oriente D par le vecteur $u = (1, 1, 0)$ et on détermine l'angle θ de la rotation.

- D'une part, dans une base adaptée, la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $1 + 2\cos(\theta) = \text{tr}(f) = \frac{1}{3}(1 + 1 - 1)$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$.

- D'autre part, le signe de $\sin(\theta)$ est aussi celui de $\det_{\mathcal{B}}(e_1, f(e_1), u)$.

$$\text{Or, } \det_{\mathcal{B}}(e_1, f(e_1), u) = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} > 0 \text{ et donc } \theta = +\text{Arccos}\left(-\frac{1}{3}\right).$$

f est la rotation d'axe orienté par $u = (1, 1, 0)$ et d'angle $\theta = +\text{Arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Problème 1

CCINP PSI 2022 (extrait)

à partir d'une correction de B. Winckler

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

1. Puisque A est de rang 1, toutes ses colonnes $C_1, \dots, C_n$ sont proportionnelles à un même vecteur colonne non nul,

qu'on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Soient $y_1, \dots, y_n$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on ait $C_i = y_i X$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} y_1 x_1 & y_2 x_1 & \cdots & y_n x_1 \\ y_1 x_2 & y_2 x_2 & \cdots & y_n x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 x_n & y_2 x_n & \cdots & y_n x_n \end{pmatrix}. \quad (*)$$

On reconnaît, suivant les règles de calcul matriciel : $A = XY^T$, et de plus Y n'est pas nul non plus (sinon l'égalité précédente impliquerait : $A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$, ce qui est impossible pour une matrice rang non nul). D'où le résultat.

2. On reprend les notations $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Le même calcul que dans la question précédente montre que

toutes les colonnes de XY^T sont proportionnelles à X ; l'espace vectoriel engendré par les colonnes de XY^T est donc inclus dans $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$, et comme le rang de XY^T est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, on en déduit : $\text{rang}(XY^T) \leq \dim(\text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)) = 1$.

Mais comme X et Y sont non nuls, il existe i et j tels que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$ et donc $x_i y_j = a_{i,j} \neq 0$. Ainsi $A = XY^T$ n'est pas la matrice nulle.

Ainsi $\text{rang}(XY^T) \leq 1$ et $\text{rang}(XY^T) \neq 0$, donc nécessairement : $\text{rang}(XY^T) = 1$.

I.2 – Quelques propriétés

3. Comme A est de rang 1, d'après la question 1 il existe $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que : $A = XY^T$. On reprend les mêmes notations que dans les questions précédentes, pour les coordonnées de X et Y (la matrice A a donc l'expression en (*)). Alors, par associativité du produit matriciel :

$$A^2 = (XY^T)(XY^T) = X(Y^T X)Y^T,$$

et on reconnaît le produit scalaire usuel de X et Y , qui est égal à :

$$Y^T X = \langle Y, X \rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i \stackrel{(*)}{=} \text{tr}(A),$$

puisqu'on reconnaît là la somme des coefficients diagonaux de A . On a donc montré :

$$A^2 = X \cdot \underbrace{\text{tr}(A)}_{\in \mathbb{R}} \cdot Y^T = \text{tr}(A)XY^T = \text{tr}(A)A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Après multiplication par A^{k-1} , l'égalité de la question précédente donne : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, A^{k+1} = \text{tr}(A)A^k$. Si l'on raisonne comme dans le cas des suites numériques, cela semble indiquer que $(A^k)_{k \geq 1}$ est une suite géométrique dont la raison serait $\text{tr}(A)$, et on en déduirait : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A$. Nous allons démontrer cette conjecture par récurrence sur k .

L'initialisation est évidente, puisque pour $k = 1$ cette égalité équivaut à $A = A$. Montrons donc l'hérédité : soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait : $A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A$. En multipliant par A cette égalité, on a :

$$A^{k+1} = (\text{tr}(A))^{k-1}A^2 \stackrel{[3]}{=} (\text{tr}(A))^{k-1} \cdot \text{tr}(A)A = (\text{tr}(A))^{(k+1)-1}A,$$

d'où la propriété au rang $k + 1$, ce qui démontre qu'elle est héréditaire.

Ainsi, par principe de récurrence, on a montré :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A.$$

5. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Rappelons que A est non nulle, puisque de rang 1 $\neq 0$. Par la question précédente, on a donc clairement :

$$A^k = 0_{M_n(\mathbb{R})} \iff (\text{tr}(A))^{k-1} = 0 \iff k \geq 2 \text{ et : } \text{tr}(A) = 0.$$

Ainsi A est nilpotente si et seulement si $\text{tr}(A) = 0$, et dans ce cas l'indice de nilpotence (c'est-à-dire : le plus petit exposant à donner une puissance nulle) est $k = 2$.

6. La question 3 montre que $X^2 - \text{tr}(A)X = X(X - \text{tr}(A))$ est un polynôme annulateur de A . C'est un polynôme scindé, et si $\text{tr}(A) \neq 0$ alors il est à racines simples d'après la factorisation qui précède, donc d'après le critère polynomial de diagonalisation A est diagonalisable dans ce cas-là.

Ainsi une condition suffisante pour que A soit diagonalisable, est que $\text{tr}(A) \neq 0$. Nous allons démontrer que cette condition est nécessaire : supposons A diagonalisable. Alors, d'après le critère de diagonalisation, χ_A est scindé, et pour toute valeur propre de A , son ordre de multiplicité est égal à la dimension du sous-espace propre associé. Or

A est de rang 1, donc d'après le théorème du rang on a : $\dim(\ker(A)) = n - 1$. Comme $n \geq 2$ par hypothèse, on a $\dim(\ker(A)) > 0$, donc 0 est valeur propre de A , d'ordre de multiplicité exactement $n - 1$. Comme A admet exactement n valeurs propres en comptant les multiplicités, il existe une autre valeur propre $\lambda \neq 0$, qui doit être d'ordre de multiplicité 1 vu que 0 est déjà d'ordre de multiplicité $n - 1$. Alors, comme la trace d'une matrice réelle est la somme de ses valeurs propres (complexes) comptées avec multiplicités, on a :

$$\operatorname{tr}(A) = (n - 1) \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda \neq 0,$$

d'où le résultat : si A est diagonalisable, alors $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est donc : $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

7. Dans cette question, et la suivante, je vais illustrer comment la géométrie permet d'abrégier la partie calculatoire de l'étude, par anticipation sur la partie II.2.

On note que les colonnes de A forment une base orthonormée de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel (ne pas oublier le $\frac{1}{3}$ en facteur, qui assure que les colonnes sont de norme 1). On en déduit que A est une matrice orthogonale, et donc : $A^T A = I_3$. Or A est clairement symétrique, donc l'égalité précédente devient : $A^2 = I_3$. On a montré :

$$A^2 = I_3,$$

et donc $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A .

8. **Rédaction 1 (un peu longue mais qui permet peut-être de mieux comprendre) :** La question précédente veut peut-être nous inciter à utiliser le fait que $X^2 - 1$ soit un polynôme annulateur de A , pour en déduire que les valeurs propres sont éventuellement 1 et -1 . Mais nul besoin de ce surcroît de théorie : contentons-nous de remarquer qu'on a montré, dans la question précédente, que : $A^2 = I_3$. Ainsi A est une matrice de symétrie, or on sait qu'une telle matrice est diagonalisable et a pour valeurs propres éventuelles 1 et -1 . Donc :

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \{1, -1\}.$$

On peut montrer que 1 et -1 sont effectivement valeurs propres, et même déterminer leurs ordres de multiplicité, grâce à la trace. En effet, si l'on note a et b leurs ordres de multiplicité (qu'on pose comme étant nuls si ce ne sont pas effectivement des valeurs propres), alors le critère de diagonalisation implique : $a + b = 3$ (degré du polynôme caractéristique). Mais on a aussi, en examinant la trace, qui est la somme des coefficients diagonaux mais aussi la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités : $\operatorname{tr}(A) = 1 = a - b$. Ainsi :

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a = 4 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

et on en déduit : $a = 2$, $b = 1$. Ainsi 1 est valeur propre double (car son ordre de multiplicité est $a = 2$), et -1 est valeur propre simple. Je vais d'abord déterminer le sous-espace propre associé à -1 (c'est en principe plus facile, vu qu'il est de dimension 1 : trouver un seul vecteur propre non nul suffit à l'engendrer) : comme A est une matrice symétrique réelle, on sait que ses sous-espaces propres sont orthogonaux. On en déduira alors le sous-espace propre associé à 1 en considérant le supplémentaire orthogonal du premier sous-espace propre. Or on a :

$$A + I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

et la relation $C_1 + C_2 = C_3$ montre que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de $A + I_3$. Par l'argument dimensionnel ci-dessus on a donc :

$$\ker(A + I_3) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Par l'argument d'orthogonalité évoqué, on en déduit :

$$\ker(A - I_3) = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^{\perp} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Rédaction 2 (plus rapide) : On remarque que A est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, elle est diagonalisable. Ses valeurs propres sont toutes réelles et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

$P(X) = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de A .

Les valeurs propres de A sont donc racines de P . Ainsi $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.

On calcule (attention à bien distribuer le $1/3$) $A - I_3$ et $A + I_3$.

On remarque que $A - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et donc $1 \in \text{Sp}(A)$ et comme A est diagonalisable :

$$m_1 = \dim(E_1(A)) = 3 - 1 = 2.$$

Ainsi, -1 est aussi valeur propre et sa multiplicité est 1 (car $m_1 + m_{-1} = 3$). Finalement :

$$E_1(A) \text{ est le plan d'équation } x + y - z = 0 \text{ et } E_{-1}(A) = E_1(A)^{\perp} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

9. La matrice A est symétrique réelle, donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux....

10. Il s'agit de diagonaliser A , en prenant une matrice de passage orthogonale : pour cela, il suffit de prendre une matrice de passage entre deux bases orthonormées, en l'occurrence la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ et une base orthonormée de vecteurs propres.

Faire un dessin... on y représente un vecteur unitaire X_3 de $E_{-1}(A)$, un vecteur unitaire X_1 de $E_1(A)$ et le produit vectoriel $X_2 = X_3 \wedge X_1$. Le dessin suffit au raisonnement.

Application numérique :

$$X_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_2 = X_3 \wedge X_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et donc } P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \text{ par construction et on a bien :}$$

$$P^{-1}AP = P^{\perp}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Les questions précédentes montrent que A est une matrice symétrique (réelle), et une matrice de symétrie. Comme les sous-espace propres sont orthogonaux, c'est donc une matrice de symétrie orthogonale, par rapport à $\ker(A - I_3)$

que nous avons déterminé, et qui est égal au plan $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

II.2 – Matrices de Householder

Cet exercice a été traité en TD la veille... Mais ici, on pouvait s'aider des résultats de la partie I (matrices de rang 1).

12. En appliquant les résultats de la partie I.1 avec $X = Y = \frac{1}{\|V\|}V$ (qui est non nul par hypothèse), on voit immédiatement que $P_V = \frac{1}{\|V\|^2}VV^T$ est une matrice de rang 1 : son image est donc de dimension 1, et un seul vecteur non nul suffit à l'engendrer. Par exemple $Y = P_V V$ est dans $\text{im}(P_V)$ et :

$$P_V V = \frac{1}{\|V\|^2}VV^T \cdot V = \frac{1}{\|V\|^2}V \cdot \|V\|^2 = V,$$

donc : $Y = V = P_V V \in \text{im}(P_V)$. V est non nul, et comme $\text{im}(P_V)$ est de dimension 1, on a : $\boxed{\text{im}(P_V) = \text{Vect}(V)}$.

Soit maintenant $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} X \in \ker(P_V) &\iff P_V X = 0 \iff \frac{1}{\|V\|^2}V \cdot \underbrace{V^T X}_{\text{scalaire}} = 0 \\ &\iff \frac{V^T X}{\|V\|^2}V = 0 \iff V^T X = 0 \quad \text{car } V \neq 0 \\ &\iff \langle X, V \rangle = 0 \iff X \perp V \end{aligned}$$

On en déduit que : $\boxed{\ker(P_V) = \text{Vect}(V)^\perp = \text{im}(P_V)^\perp}$.

13. On a $P_V^2 = \frac{1}{\|V\|^4}V \cdot \underbrace{V^T \cdot V}_{=\|V\|^2} \cdot V^T = \frac{1}{\|V\|^2}V \cdot V^T = P_V$.

Donc P_V est la matrice d'une projection sur $\text{im}(P_V)$ dans la direction de $\ker(P_V)$ dont on vient de démontrer qu'ils sont orthogonaux.

$$\boxed{P_V \text{ est donc la projection orthogonale sur } \text{Vect}(V)}.$$

Et on a :

$$\text{rang}(P_V) = \text{tr}(P_V) = 1.$$

14. On montre facilement en calculant sa transposée, que P_V est symétrique. De plus I_n est aussi une matrice symétrique, donc Q_V également en tant que combinaison linéaire de matrices symétriques. Montrons qu'elle est orthogonale. On a :

$$Q_V^T Q_V = Q_V^2 = (I_n - 2P_V)^2,$$

et comme I_n et P_V commutent, on en déduit :

$$Q_V^T Q_V = I_n - 2 \cdot 2P_V + (2P_V)^2 = I_n - 4P_V + 4P_V^2.$$

Or $P_V^2 = P_V$ d'après la question précédente, donc finalement :

$$Q_V^T Q_V = I_n - 4P_V + 4P_V = I_n,$$

ce qui montre que Q_V est orthogonale : d'où le résultat.

15. La question précédente montre que $Q_V^2 = I_n$ et $Q_V^T = Q_V$: c'est donc une matrice de symétrie, et une matrice symétrique : c'est une matrice de symétrie orthogonale. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, il suffit de déterminer $\ker(Q_V - I_n)$. Or, si $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$X \in \ker(Q_V - I_n) \iff Q_V X = X \iff (I_n - 2P_V) X = X \iff 2P_V X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X \in \ker(P_V),$$

donc : $\ker(Q_V - I_n) = \ker(P_V)$, et ce noyau est égal à $\text{Vect}(V)^\perp$ d'après la question 12. Ainsi Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(V)^\perp$.

Remarque. C'est un fait classique que si P est une matrice carrée, alors P est une matrice de projecteur si et seulement si $S = 2P - I_n$ est une matrice de symétrie, avec les mêmes caractéristiques géométriques. Cela donne directement ce qu'on veut dans les deux questions précédentes, si l'on prend $P = P_V$ et $S = -Q_V$ (noter que S et $-S$ ont des caractéristiques géométriques « opposées »).

III.1 – Un résultat préliminaire

16. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
 \|X - U\| = \|X - V\| &\iff \|X - U\|^2 = \|X - V\|^2 \\
 &\iff \|X\|^2 - 2\langle X, U \rangle + \|U\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, V \rangle + \|V\|^2 \\
 &\iff \langle X, U \rangle = \langle X, V \rangle & (\text{car } \|U\| = \|V\|) \\
 &\iff \langle X, U - V \rangle = 0 \\
 &\iff X \perp U - V \\
 &\iff X \in D^\perp,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Noter la similitude entre le résultat démontré, et ce fait bien connu des jeunes géomètres : la médiatrice d'un segment (i.e. la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son milieu) est l'ensemble des points à équidistance de ses extrémités.

17. On remarque que $X = U + V$ vérifie bien : $\|X - U\| = \|X - V\|$, puisque en effet :

$$\|(U + V) - U\| = \|V\| = \|U\| = \|(U + V) - V\|.$$

Donc, d'après la question précédente : $U + V \in D^\perp$. Il suffit donc d'écrire :

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}(U - V)}_{\in D} + \underbrace{\frac{1}{2}(U + V)}_{\in D^\perp}$$

pour avoir la décomposition demandée dans la somme directe $M_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

18. Comme U et V ne sont pas colinéaires, $U - V$ est non nul en particulier, et on peut donc bien appliquer les résultats de la partie II.2 avec $U - V$ au lieu de V .

On rappelle que Q_{U-V} est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(U - V)^\perp = D^\perp$ (et donc, implicitement : parallèlement à $\text{Vect}(U - V) = D$). On a donc :

$$\forall X \in D, Q_{U-V}X = -X, \quad \text{et :} \quad \forall X \in D^\perp, Q_{U-V}X = X.$$

Or $U - V \in D$ et $U + V \in D^\perp$ d'après la question précédente, donc :

$$Q_{U-V}(U - V) = -(U - V), \quad Q_{U-V}(U + V) = U + V.$$

On en déduit, en écrivant $U = \frac{1}{2}(U - V) + \frac{1}{2}(U + V)$:

$$Q_{U-V}U = \frac{1}{2}(Q_{U-V}(U - V) + Q_{U-V}(U + V)) = \frac{1}{2}(-(U - V) + (U + V)) = V.$$

19. Il y a une erreur d'énoncé : si $\tilde{U} \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $\tilde{V} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$, alors $Q\tilde{U}$ ne peut pas être colinéaire à $\tilde{V}$. En effet, si $Q\tilde{U}$ est colinéaire à $\tilde{V} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$, alors $Q\tilde{U} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Or une matrice orthogonale est inversible, et son noyau est en particulier trivial, donc $Q\tilde{U} \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ dès que $\tilde{U} \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$: on a donc une absurdité. À mon avis, l'énoncé nous demande de considérer $\tilde{V} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul**. C'est en tout cas ce que je suppose ci-dessous.

Soient $\tilde{U}, \tilde{V} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\tilde{V}$ non nul. S'ils sont colinéaires, le résultat demandé est évident : si $\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (sous ces hypothèses, on peut toujours se ramener à une relation de dépendance linéaire de cette forme), alors en prenant $Q = I_n$ (qui est orthogonale), on a bien : $Q\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$, et donc $Q\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont colinéaires.

Traisons à présent le cas où ils ne sont pas colinéaires (en particulier, $\tilde{U}$ est non nul également), et posons : $U = \frac{1}{\|\tilde{U}\|}\tilde{U}$, et : $V = \frac{1}{\|\tilde{V}\|}\tilde{V}$. Alors : $\|U\| = 1$, $\|V\| = 1$, donc U et V sont de même norme, et ils ne sont pas colinéaires car $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ ne le sont pas. Alors, d'après la question précédente, on a : $Q_{U-V}U = V$, donc :

$$Q_{U-V}\tilde{U} = \|\tilde{U}\|Q_{U-V}U = \|\tilde{U}\|V = \|\tilde{U}\| \cdot \frac{1}{\|\tilde{V}\|}\tilde{V}.$$

En posant : $\lambda = \frac{\|\tilde{U}\|}{\|\tilde{V}\|}$, on a alors : $Q_{U-V}\tilde{U} = \lambda\tilde{V}$. D'où le résultat avec $Q = Q_{U-V}$.

Dans tous les cas, on a montré l'existence d'une matrice orthogonale Q telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

20. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On applique la question précédente avec $\tilde{U} = AE_1$ et $\tilde{V} = E_1$ (qui est bien non nul). Il existe alors une matrice orthogonale Q_1 telle que $Q_1(AE_1)$ soit colinéaire à E_1 ; soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $Q_1AE_1 = \alpha E_1$. Comme Q_1AE_1 est la première colonne de Q_1A , le fait que Q_1AE_1 soit égal à αE_1 nous donne bien :

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

avec $C_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ (les $n-1$ dernières colonnes sont les images par Q_1A des vecteurs $E_2, \dots, E_n$, dont l'expression est inutile pour répondre à cette question), ce qu'il fallait démontrer.

21. Conformément à l'indication de l'énoncé, nous allons montrer que la proposition suivante est vraie pour tout entier $n \geq 2$:

P_n : « pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que QA soit triangulaire supérieure. »

par récurrence sur n .

L'initialisation découle directement de la question précédente : si $n = 2$ et si $A \in M_2(\mathbb{R})$, alors d'après la question précédente il existe $Q_1 \in O_2(\mathbb{R})$ telle que : $Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c_1 \in \mathbb{R}$. C'est effectivement une matrice triangulaire supérieure, d'où P_2 .

À présent, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel qu'on ait P_n . Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$. On applique la question précédente. Il existe $Q_1 \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C_1 \in M_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à C_1 , qui est d'ordre n . Il existe donc $Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $T = Q_2C_1$ soit triangulaire supérieure. Alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0_{M_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix} \times Q_1A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, car T l'est. On en déduit que si l'on pose :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0_{M_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix} \times Q_1,$$

qui est bien orthogonale en tant que produit de matrices orthogonales (car Q_1 et Q_2 le sont ; nous laissons le lecteur se convaincre que $\begin{pmatrix} 1 & 0_{M_{1,n}(\mathbb{R})} \\ 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & Q_2 \end{pmatrix}$ l'est également), alors QA est triangulaire supérieure, ce qui démontre la proposition au rang $n+1$. D'où l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a montré que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale telle que QA soit triangulaire supérieure.

Problème 2
CCINP PSI 2023 (extrait)

Une correction de I. Bigeard et S. Dion

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

1. Lorsque a et b sont réels, la matrice $M(a, b)$ est symétrique réelle, donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable.
2. Le calcul matriciel donne $M(a, b)V = (b + (n - 1)a)V$. Et comme V n'est pas le vecteur nul, par définition :

V est un vecteur propre de $M(a, b)$ associé à la valeur propre $b + (n - 1)a$.

3. $M(1, 0)$ est unitaire et de degré n donc il est complètement défini si l'on connaît ses racines (complexes) et leurs multiplicités respectives.

- On remarque que la matrice $M(1, 0) + I_n$ est de rang $1 < n$ (tous les coefficients sont égaux à 1 et donc $\text{Im}(M(1, 0) + I_n) = \text{Vect}\{V\}$).

Par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(M(1, 0) + I_n)) = n - 1 > 0$, ainsi, -1 est valeur propre de $M(1, 0)$ et sa multiplicité m_{-1} est au moins égale à $n - 1$.

- Par la question précédente, $b + (n - 1)a = n - 1$ est aussi valeur propre de $M_{0,1}$ et elle est distincte de -1 car $n > 0$. Comme la somme des multiplicité de valeurs propres de $M(1, 0)$ est égale à n , celle de $n - 1$ ne peut excéder 1, elle est donc égale à 1 et il n'y a pas d'autre valeur propre.

$$P_{1,0}(X) = (X - (n - 1))^{m_{n-1}}(X + 1)^{m_{-1}} = (X - (n - 1))(X + 1)^{n-1}.$$

4. On suppose que $a \neq 0$. Par définition du polynôme caractéristique, et par propriétés du déterminant, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X) &= \det(XI_n - M(a, b)) = \det(XI_n - bI_n - aM(1, 0)) = \det\left(a\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1, 0)\right)\right) \\ &= a^n \det\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1, 0)\right) \end{aligned}$$

Et donc $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right).$

Le résultat de la question précédente donne alors :

$$P_{a,b}(X) = a^n \left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right) \left(\frac{X-b}{a} + 1\right)^{n-1} = (X - (b + a(n-1))) (X - (b-a))^{n-1}.$$

De plus, $b - a = (b + (n - 1)a) \iff na = 0 \iff a = 0$ (car $n > 0$), on distingue donc deux cas :

- Si $a \neq 0$: $\text{Sp}(M(a, b)) = \{b - a, (b + (n - 1)a)\}$ avec $m_{b+a(n-1)} = 1$ et $m_{b-a} = n - 1$.
 - Si $a = 0$: $\text{Sp}(M(0, b)) = \{b\}$ avec $m_b = n$.
5. On définit $Q_{a,b}(X) = (X - (b - a))(X - (b + (n - 1)a))$.
La matrice $M(a, b) - (b - a)I_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à b donc son image est contenue dans $\text{Vect}\{V\}$. De plus, d'après la question (**Q19**), on a :

$$\text{Vect}\{V\} \subset E_{(b+(n-1)a)}(M(a, b)) = \text{Ker}(M(a, b) - (b + (n - 1)a)I_n).$$

On a donc

$$\text{Im}(M(a, b) - (b - a)I_n) \subset \text{Ker}(M(a, b) - (b + (n - 1)a)I_n)$$

Et par conséquent $(M(a, b) - (b - a)I_n)(M(a, b) - (b + (n - 1)a)I_n) = Q_{a,b}(M(a, b)) = 0$.

$$Q_{a,b} \text{ est un polynôme annulateur de } M(a,b).$$

Remarque :

on peut aussi calculer directement. En notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a :

$$\begin{aligned} Q_{a,b}(M(a,b)) &= (M(a,b) - (b-a)I_n) \times (M(a,b) - (b+(n-1)a)I_n) \\ &= (a(M(1,0) + I_n)) \times (a(M(1,0) - (n-1)I_n)) \\ &= a^2 J \times (M(1,0) - (n-1)I_n) \\ &= a^2 (JM(1,0) - (n-1)J) = 0 \end{aligned}$$

De plus, $b-a = (b+(n-1)a) \iff na = 0 \iff a = 0$ (car $n > 0$), comme précédemment, on distingue donc deux cas :

• Si $a \neq 0$: $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et il est scindé à racines simples donc $M(a,b)$ est diagonalisable.

• Si $a = 0$: alors $M(a,b) = bI_n$ est diagonale, a fortiori diagonalisable.

On a donc démontré : $\boxed{\text{Pour tout } (a,b) \in \mathbb{C}^2, \text{ la matrice } M(a,b) \text{ est diagonalisable.}}$

6. On suppose que $a \neq 0$. Le polynôme $Q_{a,b}$ n'est pas le polynôme nul, on peut donc effectuer la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exists ! P_k \in \mathbb{C}[X], \exists ! R_k \in \mathbb{C}[X], \quad X^k = P_k(X)Q_{a,b}(X) + R_k(X) \quad \text{et} \quad \deg(R_k) < \deg(Q_k) = 2.$$

Ainsi, il existe des complexes α_k et β_k tels que : $R_k(X) = \alpha_k X + \beta_k$.

On évalue cette égalité polynomiale aux racines (distinctes) de $Q_{a,b}$. On obtient :

$$\begin{aligned} (b-a)^k &= \alpha_k(b-a) + \beta_k, \\ (b+(n-1)a)^k &= \alpha_k(b+(n-1)a) + \beta_k. \end{aligned}$$

Puisque $a \neq 0$, ce système a une unique solution (α_k, β_k) . Après calculs, on trouve :

$$\alpha_k = \frac{1}{na} \left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k \right) \text{ et } \beta_k = \frac{1}{na} \left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a) \right).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}(X)$ est :

$$\boxed{R_k(X) = \frac{1}{na} \left(\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k \right) X + \left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a) \right) \right)}.$$

Puisque $X^k = P_k(X)Q_{a,b}(X) + R_k(X)$ on a :

$$M(a,b)^k = P_k(M(a,b))Q_{a,b}(M(a,b)) + R_k(M(a,b)) = R_k(M(a,b)) \quad \text{car } Q_{a,b}(M(a,b)) = 0$$

Et donc :

$$\boxed{M(a,b)^k = \frac{1}{na} \left(\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k \right) M(a,b) + \left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a) \right) I_n \right)}$$

Q24. Si $|b-a| < 1$ et si $|(b+(n-1)a)| < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} (b-a)^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (b+(n-1)a)^k = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} \left\| \left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k \right) M(a,b) \right\| &= \left| (b+(n-1)a)^k - (b-a)^k \right| \|M(a,b)\| \\ &\leq (|b+(n-1)a|^k + |b-a|^k) \|M(a,b)\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc par encadrement, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k \right) M(a,b) = 0$.

De même, on montrerait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a) \right) I_n = 0$.

Et par opérations sur les limites : $\boxed{\text{Si } |b-a| < 1 \text{ et si } |(b+(n-1)a)| < 1 \text{ alors } \lim_{k \rightarrow +\infty} M(a,b)^k = 0.}$

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

7. T est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, sa première colonne donne l'image de $e_1 : u(e_1) = \lambda_1 e_1$.

Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$. Et puisque $|\lambda_1| < 1$, on a :

$$\|u^k(e_1)\| = \|\lambda_1^k e_1\| = |\lambda_1|^k \|e_1\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Et de manière immédiate $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1) = 0$.

8. La $i + 1$ -ème colonne de T donne l'image de e_{i+1} par u . Plus précisément :

$$u(e_{i+1}) = \underbrace{T_{1,i+1}e_1 + \dots + T_{i,i+1}e_i}_{=x} + \lambda_{i+1}e_{i+1}.$$

On a bien trouvé $x \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ tel que $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$.

On pourrait démontrer le résultat demandé par récurrence. On choisit ici de faire apparaître une série télescopique.

• si $\lambda_{i+1} \neq 0$: on a $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$ et comme u^m est linéaire :

$$\forall m \in \mathbb{N}, u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}u^m(e_{i+1}) = u^m(x).$$

On divise par $\lambda_{i+1}^{m+1} \neq 0$: $\frac{u^{m+1}(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^{m+1}} - \frac{u^m(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^m} = \frac{u^m(x)}{\lambda_{i+1}^{m+1}}$. On ajoute ces égalités pour $m = 0, \dots, k-1$. La somme est télescopique, il reste :

$$\frac{u^k(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^k} - \frac{u^0(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^0} = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{-m-1} u^m(x).$$

En multipliant par λ_{i+1}^k , on obtient le résultat demandé.

• si $\lambda_{i+1} = 0$: alors d'une part, $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x = x$ donc $u^k(e_{i+1}) = u^{k-1}(x)$.

Et d'autre part, dans la somme suivante, tous les termes sont nuls sauf un, celui pour $m = k-1$:

$$\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = u^{k-1}(x) = u^k(e_{i+1}).$$

Dans les deux cas, on a bien démontré que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k(e_{i+1}) = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

9. On a $x \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ donc il existe des complexes $x_1, \dots, x_i$ tels que $x = \sum_{j=1}^i x_j e_j$.

Par linéarité de u , $u^k(x) = \sum_{j=1}^i x_j u^k(e_j)$. On a supposé que pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = 0$.

Par opérations sur les limites, on a donc aussi :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(x) = 0.$$

Une première conséquence est que la suite $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée : $\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \|u^k(x)\| \leq M$.

On montre le résultat demandé en revenant à la définition de limite.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé : on a les majorations suivantes (inégalité triangulaire).

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|.$$

Or, $\lim_{m \rightarrow +\infty} u^m(x) = 0$ donc, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geq N, \|u^m(x)\| \leq \varepsilon.$$

Pour $k > N$, on coupe la somme en 2. On sait que $|\lambda_{i+1}| < 1$ donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{i+1}|^n$ converge et a pour somme

$$\frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| &= \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq M} + \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq M \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} + \varepsilon \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\ &\leq M \sum_{n=k-N}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n \\ &\leq \frac{M}{1 - |\lambda_{i+1}|} |\lambda_{i+1}|^{k-N} + \varepsilon \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|} \end{aligned}$$

Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_{i+1}|^{k-N} = 0$ donc il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $k \geq N'$, on ait $|\lambda_{i+1}|^{k-N} \leq \varepsilon$.

En reportant dans la majoration précédente, on a trouvé N' tel que pour tout entier $k \geq N'$, on ait :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \leq \varepsilon \frac{M+1}{1 - |\lambda_{i+1}|} = C\varepsilon.$$

Quitte à reprendre le raisonnement avec $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$, on a bien démontré que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0.$$

On a alors, en utilisant la question 9 et $|\lambda_{i+1}| < 1$:

$$\|u^k(e_{i+1})\| = \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

et par le théorème d'encadrement $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.

Q28. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ on note $\mathcal{P}_i$ la propriété : $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_i) = 0$.

En question (**Q25**), on a montré que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Dans les deux questions suivantes, on a montré que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ si $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i$ sont vraies, alors $\mathcal{P}_{i+1}$ est vraie.

Par le principe de **récurrence forte**, $\mathcal{P}_i$ est vraie pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On note comme dans l'énoncé, $T_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de T^k . Puisque T^k est la matrice de u^k dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, u^k(e_j) = \sum_{i=1}^n T_{i,j}^{(k)} e_i$$

Et comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_i) = 0$, ses suites coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ tendent aussi vers 0.

Et finalement :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lim_{k \rightarrow +\infty} T_{i,j}^{(k)} = 0.$$

Et par conséquent, $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$.

10. On suppose juste que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que : $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| < 1$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées avec multiplicité. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé et donc A est trigonalisable. Plus précisément, il existe une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et une matrice inversible P telles que :

$$A = PTP^{-1}.$$

• D'après les questions précédentes, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$.

• De plus, $A^k = (PTP^{-1})^k = PTP^{-1}.PTP^{-1} \dots PTP^{-1} = PT^kP^{-1}$.

• Enfin, l'application $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, elle est continue, en particulier continue en 0. Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$, on a donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(T^k) = \varphi(0) = 0.$$

Ce qui s'écrit $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.