Devoir surveillé 7

le mercredi 12 mars (14h-18h)

Les calculatrices, les téléphones portables et objets connectés (montres...) ne sont pas autorisés.

Question de cours

On munit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et on oriente E par la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que f est un automorphisme orthogonal de E.
2. Déterminer ses éléments caractéristiques.

Problème 1

Présentation
Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations
Pour tous n, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.
Pour tout $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A.
Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.
L'ensemble $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. En identifiant $\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y, \quad \text{et :} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geqslant 2$.

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tels que : $A = XY^T$.
2. Réciproquement, soient $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 – Quelques propriétés

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

3. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.
4. En déduire, par récurrence sur k, une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

On définit :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

7. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.
8. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
9. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.
10. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T AP = D$.
11. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 – Matrices de Householder

Soit $V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit P_V, $Q_V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T, \quad \text{et :} \quad Q_V = \mathrm{I}_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} VV^T. \tag{1}$$

12. Montrer que $\mathrm{im}(P_V) = \mathrm{Vect}(V)$ et que $\ker(P_V) = \mathrm{Vect}(V)^\perp$.
13. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(V)$.
    Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.
14. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.
15. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Partie III – Factorisation QR

III.1 – Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \mathrm{Vect}(U - V)$.

16. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.
17. Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.
18. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).
19. En déduire que pour tous $\tilde{U}$, $\tilde{V} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

20. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que $Q_1 A$ soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

21. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

Problème 2

Extrait du rapport de jury : *Les copies sont assez bien présentées dans l'ensemble, mais on regrette la présence trop importante de ratures et de surcharges ou encore d'abréviations qui nuisent à la lisibilité. Il est conseillé d'utiliser systématiquement un brouillon avant de se lancer dans la rédaction. On rappelle que les abréviations n'ont pas leur place dans une copie de concours.*

Notons également que l'honnêteté intellectuelle est évaluée dans les copies. En particulier dans les démonstrations où le résultat est donné dans l'énoncé, donner le résultat réellement obtenu peut permettre de gagner quelques points là où tenter le bluff pour tomber à tout prix sur le résultat de l'énoncé n'en vaudra aucun.

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$. On s'intéresse ici à la convergence de suites matricielles $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $M_k \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, avec $p = 1$ (matrices colonnes) ou $p = n$ (matrices carrées). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note alors $M_k = \left(\left(m_{i,j}^{(k)}\right)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ ou plus simplement $M_k = \left(\left(m_{i,j}^{(k)}\right)\right)$.
On suppose que l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ indifféremment des valeurs de n et p. En particulier, si $V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on note $\|V\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. La suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = ((a_{i,j}))$.
2. La suite des normes $(\|M_k - A\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, la suite de nombres complexes $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'une matrice donnée $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I – Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $M(a,b) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a,b)$.
On note I_n la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$M(a,b) = b\mathrm{I}_n + aM(1,0).$$

1. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que dans ce cas $M(a,b)$ est diagonalisable.
2. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $M(a,b)$ et déterminer la valeur propre associée à V.
3. Montrer que : $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X+1)^{n-1}$.
4. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que : $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.
5. On définit le polynôme $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$ par : $Q_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$.
   Montrer que $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable (on distinguera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$).
6. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $Q_{a,b}$ et en déduire une expression de $M(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_n.
7. Supposons que $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$. Déterminer la limite de la suite de matrices $\left(M(a,b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Partie II – Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u. On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.
L'objectif de cette partie est de montrer que : $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.
On suppose (sauf à la question 12) que $A = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que : $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\| u^k(e_1) \right\| = 0$ et en déduire : $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_1)$.

On suppose qu'il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, on ait : $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_j) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

9. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{Vect}\left((e_j)_{j \in [\![1,i]\!]}\right)$ tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

10. Montrer que : $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\| \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$. En déduire que : $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
11. Montrer alors que : $\lim\limits_{k \to +\infty} T^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.
12. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure. Montrer que : $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.