Devoir surveillé 6 - Correction

Exercice
EDHEC 2004 filière S

1. Une première inégalité.

(a) D'après le cours X^2 est d'espérance finie, donc on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X-\lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2}$$

Avec $\varepsilon = \lambda > 0$, on obtient : $\boxed{P(|X-\lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}}$

(b) De plus on a l'égalité d'ensembles : $(|X-\lambda| \geq \lambda) = (X \geq 2\lambda) \cup (X \leq 0)$.

Donc $(X \geq 2\lambda) \subset (|X-\lambda| \geq \lambda)$. Et par croissance de P, on trouve : $\boxed{P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X-\lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}}$

Remarque : l'événement $(X \leq 0)$ n'est pas impossible.

2. Première amélioration de l'inégalité $(*)$.

(a) C'est la première inégalité de Markov, pour lesquelles les hypothèses sont bien réunies : Y est une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie.
Il s'agit ici d'une question de cours, il faut donc réécrire l'une des deux démonstrations de ce résultat (cf cours).

(b) On considère une variable aléatoire discrète Z, d'espérance nulle et de variance σ^2.
Soit $(a,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}^+$:
Soit $\omega \in \Omega$. Si $Z(\omega) \geq a$, alors $Z(\omega) + x \geq a + x \geq 0$ et comme $t \longmapsto t^2$ est croissante sur $[0,+\infty[$, on a $(Z(\omega)+x)^2 \geq (a+x)^2$.
On vient donc de démontrer que : $(Z \geq a) \ \subset \ (Z + x \geq a + x)$.
Et par croissance de P, on a bien : $\boxed{P(Z \geq a) \leq P\Big((Z+x)^2 \geq (a+x)^2\Big).}$

(c) On applique l'inégalité obtenue en 2(a) à la variable aléatoire $(Z+x)^2$ qui est bien <u>positive</u> et <u>d'espérance finie</u> (puisque Z admet une variance par hypothèse). On obtient :

$$\forall a > 0, \quad \forall x \geq 0, \quad P\Big((Z+x)^2 \geq (a+x)^2\Big) \leq \frac{E(Z+x)^2}{(a+x)^2}.$$

Par linéarité de l'espérance, et sachant que $E(Z) = 0$ et $V(Z) = \sigma^2$, on trouve :

$$E(Z+x)^2 = E(Z^2) + 2xE(Z) + x^2 = V(Z) + E(Z)^2 + x^2 = \sigma^2 + x^2.$$

Et en utilisant la majoration obtenue en $2(b)$, on obtient finalement :

$$\boxed{\forall a > 0, \quad \forall x \geq 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.}$$

Comme la réponse était donnée, il fallait rédiger le raisonnement avec précision. La moitié des points portaient sur la vérification des hypothèses requises.

(d) On étudie sur $[0,+\infty[$ la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$. Elle est dérivable et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \ f'(x) = \frac{2x(a+x)^2 - 2(a+x)(\sigma^2+x^2)}{(a+x)^4} = \frac{2a}{(a+x)^3}\left(x - \frac{\sigma^2}{a}\right).$$

Ainsi, f est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\sigma^2}{a}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{\sigma^2}{a}, +\infty\right[$.

L'inégalité obtenue dans la question précédente est valable pour tout $x \geq 0$ et donc en particulier en $x_m = \dfrac{\sigma^2}{a}$, c'est même là qu'elle est optimale !

Après calculs, on a $f(x_m) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ et donc : $\boxed{\forall a > 0, \quad P(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}}$

(e) On applique ce qui précède avec $Z = X - \lambda$ qui est bien une variable aléatoire réelle discrète avec $E(Z) = 0$ et $V(Z) = V(X) = \lambda$ et $a = \lambda > 0$.

On trouve $P(X - \lambda \geq \lambda) \leq \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda^2}$. Et après simplifications : $\boxed{P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda + 1}.}$

Remarque : on ne pouvait pas appliquer ce qui précède à X car X n'est pas d'espérance nulle.

3. Deuxième amélioration de l'inégalité $(*)$.

Pour tout réel t, on pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k$.

(a) C'est encore une question de cours... $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.}$

(b) Comme $t \geq 1$, l'application $x \longmapsto t^x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et donc $(X \geq a) = (t^X \geq t^a)$.
En appliquant l'inégalité $2(a)$ (Markov) à t^X qui est d'espérance finie, puisque $t^a > 0$, on obtient :

$$\boxed{\forall t \in [1, +\infty[, \quad \forall a > 0, \quad P(X \geq a) = P(t^X \geq t^a) \leq \frac{E(t^X)}{t^a} = \frac{G_X(t)}{t^a}}$$

(c) La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $g'(t) = \dfrac{(t-2)e^{t-1}}{t^3}$. La fonction g est minimale en $t = 2$.

$$\boxed{\text{Le minimum sur } [1, +\infty[\text{ de la fonction } g : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{t-1}}{t^2} \text{ est } g(2) = \frac{e}{4}.}$$

(d) D'après $3(b)$, on a $\forall t \in [1, +\infty[, \quad P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \dfrac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = (g(t))^\lambda$.
En particulier, en $t = 2$, on obtient :

$$\boxed{P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda.}$$

4. On a $\dfrac{1}{\lambda + 1} \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\lambda}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda \underset{\lambda \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ donc la dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question 2(e) dès que λ prend des valeur assez grandes.

Problème 1

CCINP PC 2020 (extrait)

À partir d'un corrigé de L. Carrot

Partie I - Calcul de p_n

1. Pour $n = 0$, $S_0 = 0$. Pour $n = 1$, $S_1(\omega) = 1$ si $X_1(\omega) = 1$, et $S_1(\omega) = -1$ si $X_1(\omega) = -1$.
À chaque étape, on ajoute à S_n la valeur du déplacement X_{n+1}. Et donc :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ modélise la positition du pion après } n \text{ déplacements.}}$$

2. $\boxed{p_0 = P(S_0 = 0) = 1.}$

Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{\pm 1\}$, on a $\boxed{p_1 = P(S_1 = 0) = 0.}$

Enfin, $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.

Or $(X_1 + X_2 = 0) = \Big((X_1 = 1) \cap (X_2 = -1)\Big) \bigcup \Big((X_1 = -1) \cap (X_2 = 1)\Big)$.

Comme l'union est disjointe, par définition de probabilité :

$$\begin{aligned} p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) &= P((X_1 = 1) \cap (X_2 = -1)) + P((X_2 = -1) \cap (X_1 = 1)) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On obtient $\boxed{p_0 = P(S_0 = 0) = \frac{1}{2}.}$

3. Si n est impair, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm 1\}}$ est la somme d'un nombre impair de nombres impairs, donc est impair.

Par suite, $p_n = P(S_n = 0) = 0$, car l'événement $(S_n = 0)$ est impossible (car 0 est un nombre pair).

Ou encore, si on note q le nombre de 1 dans la somme, alors, $n - q$ est le nombre de -1. Et donc :

$$S_n(\omega) = q \times 1 + (n - q) \times (-1) = 2q - n$$

Comme n est impair, $2q - n$ n'est jamais nul et donc l'événement $(S_n = 0)$ est impossible :

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, alors } p_n = P(S_n = 0) = 0.}$$

4. On a $Y_k(\Omega) = \left(\frac{X_k + 1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\frac{1+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right\} = \{0, 1\}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli.

De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\frac{X_k + 1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$, donc $\boxed{Y_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$

5. Il fallait un minimum de rédaction pour cette question. Le vocabulaire utilisé est souvent incorrect : « Z_n est une succession d'événements... »non... Z_n est une variable aléatoire donc il faut au moins dire ce qu'elle représente.

• Les variables $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli (c'est-à-dire une loi binomiale de paramètres 1, $p = \frac{1}{2}$)et sont mutuellement indépendantes, donc, d'après le cours, pour tout $n > 0$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres $1 + \cdots + 1 = n$ et $\frac{1}{2}$. Par suite :

$$\boxed{Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

• De plus,

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$

donc $\boxed{S_n = 2Z_n - n.}$

6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} p_{2m} = P(S_{2m} = 0) &= P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Comme $\binom{0}{0}\frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$.

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Attention : il s'agissait de fonctions génératrices de suites... ce ne sont pas toujours des fonctions génératrices associées à des variables aléatoires.

7. **Rédaction 1 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leq 1$, donc, par les théorèmes de comparaison pour les séries entières, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} 1x^n$ qui vaut 1.

   Rédaction 2 : En $x = 1$, on obtient la série : $\sum P(S_n = 0)$. Or les événements $(S_n = 0)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux-à-deux disjoints, donc par définition de probabilité, la série $\sum P(S_n = 0) = \sum P(S_n = 0)1^n$ converge. Par caractérisation du rayon de convergence, on trouve $R_p \geq 1$.

   Dans les deux cas, on a bien montré : $\boxed{R_p \geq 1.}$

8. On part du membre de droite. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) &= \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}(-1)\left(k-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(-1)^m}{m!}(-1)^m\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k-1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{m!2^m}1\times 3\times\cdots\times(2m-1)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(2m-1)\times(2m)}{2\times 4\times\cdots\times(2m)}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{1}{2^m2^m}
\end{aligned}$$

   On a bien $\boxed{\forall m\in\mathbb{N}^*,\quad p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right).}$

9. D'après le cours, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n.$$

   Par suite, pour tout $x\in]-1,1[$, comme $(-x^2)\in]-1,1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)(-x^2)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^{2n}.$$

   Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a, pour tout $x\in]-1,1[$ (on a $R_p\geq 1$),

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}p_nx^n = p_0+\sum_{n=1}^{+\infty}p_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{p_{2n+1}}_{=0}x^{2n+1}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}p_{2n}x^{2n}.
\end{aligned}$$

   D'où, pour $\alpha=-1/2$, comme $p_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)$ pour tout $n\geq 1$ d'après la question précédente, on a :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\quad f(x) = (1-x^2)^{-1/2}.}$$

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

10. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $\omega \in \Omega$: $T(\omega) = n \Rightarrow S_n(\omega) = 0$, donc $(T = n) \subset (S_n = 0)$, donc, par croissance de P, $P(T = n) \leq P(S_n = 0)$.
Or, pour tout n impair, $P(S_n = 0) = 0$, donc, pour tout n impair, $q_n = P(T = n) = 0$.
En particulier, pour $n = 1$, $\boxed{q_1 = 0.}$

• $(S_1 = 0)$ est impossible, donc, par définition de T, on a $(T = 2) = (S_2 = 0)$.
Donc $\boxed{q_2 = P(T = 2) = P(S_2 = 0) = p_2 = \frac{1}{2}.}$

11. • Pour tout $x \in [-1, 1]$,
$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T = n)|x|^n \leq P(T = n),$$
donc $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |g_n(x)| \leq P(T = n)$.
Or, par définition de probabilité, $\sum\limits_{n \geq 0} P(T = n)$ converge puisque les événements $(T = n)$ sont deux-à-deux disjoints (la somme vaut $1 - P(T = +\infty)$ car $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n \geq 0} \|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge, donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n \geq 0} g_n \text{ converge normalement sur } [-1, 1].}$$

• Comme $\sum\limits_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$, $\sum\limits_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$, et par caractérisation du rayon de convergence : $\boxed{R_q \geq 1.}$

12. f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $]-1, 1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n = \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{n-k}\right) x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\ &= p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la relation admise pour tout } n \in \mathbb{N}^*) \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \;=\; -1 + p_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \;=\; -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \;=\; -1 + f(x). \end{aligned}$$

13. • Comme, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 9), la relation obtenue à la question précédente devient :
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1 - x^2)^{-1/2} g(x) = (1 - x^2)^{-1/2} - 1,$$
donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2}$, on a bien :
$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}.}$$

• Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $(1 + x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) x^n$.
Donc, pour $\alpha = 1/2$, on a , pour tout $x \in]-1, 1[$, comme $(-x^2) \in]-1, 1[$,
$$\sqrt{1 - x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$
donc $\boxed{g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n} \qquad (R = 1)}$

14. Pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on a :

$$\boxed{q_0 = 0, \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ q_{2n+1} = 0)\,.}$$

15. • Comme $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

• Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ et $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1,1]$ (d'après la questin 11), la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1,1]$.
En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \quad \text{(d'après l'expression trouvée en 13)} \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

• On a donc $P(T = +\infty) = 1 - g(1) = 0$, donc l'événement $T = +\infty$ est quasi impossible, donc on est quasi certain que le pion reviendra à l'origine à un instant donné.

16. Puisque $P(T = +\infty) = 1 - g(1) = 0$,, on peut considérer que $T(\Omega) = \mathbb{N}$. Cela ne change pas la notion d'espérance, de variance ou de fonction génératrice pour T.
$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(T = n)$ est la série génératrice de T.
D'après le cours, T admet une espérance si et seulement si g est dérivable en 1. Or, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \underset{x \to 1^-}{\to} +\infty.$$

g est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\lim_{x \to 1^-} g'(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1, et, par suite, $\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

Problème 2

CCINP PSI 2024 (extrait)

un corrigé de I. Bigeard et E. Auclair

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. Rapport de jury : La plupart des candidats ont reconnu une loi géométrique mais ont paraphrasé l'énoncé sans fournir de démonstration rigoureuse. Beaucoup de candidats ont eu du mal à modéliser proprement la situation décrite dans l'énoncé. L'indépendance des événements a souvent été oubliée.
Par définition, T_1 correspond au rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Donc T_1 suit une loi géométrique de paramètre p, ce qui correspond au résultat attendu.
De manière plus élémentaire, soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors :

$$\{T_1 = k\} = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i = 0\}\right) \cap \{X_k = 1\}\,.$$

Donc, par indépendance des variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$,

$$\mathbb{P}(T_1 = k) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = 0)\right) \times \mathbb{P}(X_k = 1) = (1-p)^{k-1}\, p\,.$$

Finalement, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}\, p\,.}$

Q2. Rapport de jury : La bonne expression de l'événement A (ou $\bar{A}$) avec les événements $(X_1 = k)$ est rarement donnée. Certains tentent de calculer la probabilité de A par des arguments de continuité monotone, d'autres utilisent à tort l'indépendance des événements $(T_1 = k)$ pour tenter de conclure.

L'événement A est réalisé si et seulement si aucun des événements $\{T_1 = k\}$ n'est réalisé :

$$\boxed{A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{T_1 = k\}} = \Omega \setminus \left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \{T_1 = k\}\right).}$$

Or, par σ-additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \{T_1 = k\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(T_1 = k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\, p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0}$ et $\boxed{\text{presque sûrement, un nouveau client doir arriver dans la file.}}$

Q3. Rapport de jury : Bien que cette question soit en grande partie basée sur des connaissances de cours, de nombreux candidats ont commis des erreurs dans le calcul de la somme. Certains ont correctement identifié le rayon de convergence mais ont mal calculé la fonction génératrice. Il y a eu une tendance à oublier de justifier les étapes du calcul.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $a_k = \mathbb{P}(T_1 = k) = p\,(1-p)^{k-1} > 0$. Alors :

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - p \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - p\,.$$

Donc, par le critère de d'Alembert appliqué aux séries entières, $\boxed{R = \frac{1}{1-p}\,.}$

Soit $t \in]-R, R[$. Alors

$$G_{T_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = pt \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{k-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Finalement, $\boxed{\forall t \in]-R, R[\,,\ G_{T_1}(t) = \frac{pt}{1+(p-1)t}\,.}$

Q4. Rapport de jury : La plupart des candidats ont pu calculer l'espérance correctement, mais ont eu des difficultés avec la variance. Les justifications pour les dérivées nécessaires pour trouver l'espérance et la variance ont souvent été manquantes ou incorrectes.

Comme $R > 1$, la fonction G_{T_1} est de classe $\mathcal{C}^2$ en 1, donc T_1 est de variance finie.
De plus, après calcul,

$$\forall t \in]-R, R[\,, G'_{T_1}(t) = \frac{p}{(1+(p-1)t)^2} \quad \text{et} \quad G''_{T_1}(t) = -\frac{2p(p-1)}{(1+(p-1)t)^3}\,.$$

On en déduit tout d'abord que $\boxed{E(T_1) = G'_{T_1}(1) = \frac{1}{p}\,.}$

De plus, par la formule de transfert,

$$G''_{T_1}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\,\mathbb{P}(T_1 = k) = E(T_1(T_1-1)).$$

Cela entraîne, par la formule de Koenig-Huygens et par linéarité de l'espérance :

$$V(T_1) = E(T_1^2) - (E(T_1))^2 = G''_{T_1}(1) + E(T_1) - (E(T_1))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\,.$$

Finalement, $\boxed{V(T_1) = \dfrac{1-p}{p^2}\,.}$

Q5. Rapport de jury : Il y a eu une confusion fréquente entre la somme et le produit des fonctions génératrices. Les candidats ont eu tendance à négliger les justifications nécessaires pour les propriétés de linéarité de l'espérance et la variance.

Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{E(D_n) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = nE(T_1) = \frac{n}{p}\,.}$$

De plus, comme les variables aléatoires (T_k) sont indépendantes (deux à deux),

$$\boxed{V(D_n) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) = nV(T_1) = \frac{n(1-p)}{p^2}\,.}$$

Enfin, par indépendance des variables (T_k),

$$\boxed{\forall t \in]-R,R[\,, G_{D_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t) = G_{T_1}^n(t) = \left(\frac{pt}{1+(p-1)t}\right)^n.}$$

Q6. Rapport de jury : La plupart des candidats se sont contentés de répondre à la question de cours. Peu de candidats ont bien appliqué le développement en série entière, et ceux qui l'ont tenté ont souvent manqué de rigueur dans leur démonstration. La transition entre le développement en série entière et l'application aux fonctions génératrices a été mal gérée.

Le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 est donné par :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\,,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-k)}{k!}\,x^k\,.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $t \in]-R,R[$. Alors, $|(p-1)t| < 1$ donc, par ce qui précède,

$$G_{D_n}(t) = p^n t^n (1+(p-1)t)^{-n} = p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (p-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, p^n (p-1)^k t^{n+k}$$

où $c_k = \dfrac{-n(-n-1)\dots(-n+1-k)}{k!} = (-1)^k \dbinom{k+n-1}{k}$.

Finalement,

$$\boxed{\forall t \in]-R,R[\,,\ G_{D_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} p^n (1-p)^k t^{n+k} = \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{j-n} p^n (1-p)^{j-n} t^j.}$$

Alors, par unicité du développement en série entière, sachant que $P_{D_n}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n = k)t^k$,

$$\boxed{\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}(D_n = k) = \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n}}$$

avec, par convention, $\binom{k-1}{k-n} = 0$ si $k < n$.

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Cette partie a été donnée en début d'année.

II.2 - Groupes de clients

Q7. Rapport de jury : Interprétation souvent incorrecte, avec beaucoup de réponses fantaisistes. Il se cache souvent, derrière le raisonnement des candidats, une confusion entre le OU et le ET.

L'événement Z se réalise s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $V_n = 0$, c'est-à-dire si un groupe est passé au guichet sans qu'aucun nouveau client n'arrive entretemps. Donc l'événement Z correspond à la situation où $\boxed{\text{à un moment donné, le guichet s'est libéré sans aucun nouveau client à servir.}}$

Q8. Rapport de jury : Confusion assez fréquente entre la loi binomiale et la loi uniforme.

La variable aléatoire N_n correspond au nombre de succès lors de la succession de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Donc N_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

9. Rapport de jury : Question visiblement classique pour un bon nombre de candidats, bien que certains n'aient pas réussi à aller jusqu'à la démonstration complète. Les justifications utilisant le système complet d'événements ont souvent été incomplètes.

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Par définition, V_1 est le nombre de clients arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,S]\!]$. Donc, avec les notations précédentes, $V_1 = N_S$. On en déduit :

$$\boxed{\mathbb{P}(V_1 = k | S = n) = \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule des probabilités totales, en utilisant que $(\{S = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1 = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_1 = k|S = n)\,\mathbb{P}(S = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

Finalement, après simplification,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(V_1 = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda}\, e^{(1-p)\lambda} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!},$$

donc $\boxed{V_1 \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda p.}$

Q10. Rapport de jury : Question peu traitée mais généralement de manière plutôt satisfaisante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\{V_n = 0\} \subset \{V_{n+1} = 0\}$. Donc, par continuité croissante de $\mathbb{P}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{V_n = 0\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{V_n = 0\}\right) = P(Z)\,.$$

Cela signifie que $\boxed{(z_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} z_n = P(Z).}$

Q11. Rapport de jury : Question difficile, souvent mal abordée, excepté le cas $j = 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}$.

1er cas : $j = 0$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = 0\right) = 1 = \mathbb{P}(V_n = 0)^0$.

2ème cas : $j \geqslant 1$. Supposons que $V_1 = j$. Alors le premier groupe est composé des clients de 1 à j.
Par analogie avec les groupes de clients définis dans l'énoncé, pour tout client d'indice $1 \leqslant i \leqslant j$, on note $G_1^{(i)}$ l'ensemble des clients du deuxième groupe qui sont arrivés pendant que i est servi.
Puis, récursivement, pour tout $k \geqslant 2$, on note $G_k^{(i)}$ l'ensemble des clients du $(k+1)$-ième groupe arrivés pendant que les clients de $G_{k-1}^{(i)}$ sont servis.

Alors, par construction, le $(k+1)$-ième groupe est l'union disjointe des $(G_k^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant j}$, donc

$$V_{k+1} = \sum_{i=1}^{j} V_k^{(i)}\,,$$

où $V_k^{(i)}$ représente le nombre de clients de $G_k^{(i)}$.
Or, pour tout i, la variable $V_k^{(i)}$ suit un processus identique à celui de la variable V_k en ne considérant que les temps de passage des clients appartenant aux groupes issus du client i.
On en déduit que $V_k^{(i)}$ suit la même loi que V_k et, faute de preuve rigoureuse, il est intuitivement raisonnable de considérer que les variables $\left(V_k^{(i)}\right)_{1\leqslant i\leqslant j}$ sont indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par positivité des variables $V_n^{(i)}$,

$$\{V_{n+1} = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{V_n^{(i)} = 0\}$$

donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) = \prod_{i=1}^{j} \mathbb{P}\left(V_n^{(i)} = 0\right) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j.$$

Finalement, $\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) = \mathbb{P}(V_n = 0)^j.}$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par la formule des probabilités totales, en utilisant que $(\{V_1 = j\})_{j\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements,

$$z_{n+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) \mathbb{P}\left(V_1 = j\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V_n = 0)^j e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} = e^{-\lambda p} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p z_n)^j}{j!}\,.$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = e^{-\lambda p}\, e^{\lambda p z_n} = \exp(\lambda p (z_n - 1))\,.}$

Q13. D'après la question précédente, la suite (z_n) vérifie toutes les hypothèses de la partie **II.1.** avec $a = \lambda p$.

Donc, d'après la question **Q10**, $\boxed{\text{si } \lambda p \leqslant 1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} z_n = 1.}$

De plus, d'après la question **Q11**, $\boxed{\text{si } \lambda p > 1, \text{ alors } (z_n) \text{ converge vers un réel } \alpha < 1.}$