Devoir surveillé 5 - Correction

Exercice 1
CCINP PSI 2018 (extrait)

un corrigé de B. Winckler

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. L'ensemble $\{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide puisqu'il contient 0. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est, par définition, la borne supérieure de cet ensemble s'il est majoré, et $+\infty$ sinon.
2. On a directement $J_0(0) = c_0 = 1$ (terme constant).
3. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad J_0'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}, \quad J_0''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}.$$

Alors, J_0 vérifie :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0, \tag{1}$$

si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = 0\\
\iff &\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^k + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} k c_k x^k + c_1 x\right) + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k = 0\\
\iff &\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \left(k^2 c_k + c_{k-2}\right) x^k + c_1 x = 0.
\end{aligned}$$

De l'unicité des coefficients d'une somme de série entière sur un voisinage de 0, on déduit :

$$\begin{cases} \forall k \geqslant 2,\ k^2 c_k + c_{k-2} = 0, \\ c_1 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \geqslant 2,\ c_k = \dfrac{-1}{k^2} c_{k-2}, \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

De la première relation on déduit par récurrence, en distinguant la parité des indices :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ c_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} c_{2(k-1)} = \frac{-1}{(2k)^2} \times \frac{-1}{(2(k-1))^2} c_{2(k-2)} = \frac{-1}{(2k)^2} \times \frac{-1}{(2(k-1))^2} \times \cdots \times \frac{-1}{2^2} c_0,$$

c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} c_0$, l'égalité restant valable pour $k = 0$; ensuite, comme $c_1 = 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ c_{2k+1} = \frac{-1}{(2k+1)^2} \times \frac{-1}{(2k-1)^2} \times \cdots \times \frac{-1}{3^2} c_1 = 0.$$

Finalement, comme par hypothèse $c_0 = 1$, on a d'après ce qui précède : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} c_{2k+1} = 0, \\ c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} = \dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}. \end{cases}}$

4. Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k = \sum_{k\geqslant 0} c_{2k} x^{2k}$, où les coefficients sont définis par les égalités précédentes, à l'aide de la règle de D'Alembert : si $x=0$, la série converge trivialement (de somme égale à 1), et si $x \neq 0$:
$$\left|\frac{c_{2(k+1)}x^{2(k+1)}}{c_{2k}x^{2k}}\right| = \frac{4^k (k!)^2}{4^{k+1}((k+1)!)^2}|x|^2 = \frac{|x|^2}{4(k+1)^2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$
donc $\sum_{k\geqslant 0} c_{2k} x^{2k}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$: le rayon de convergence de cette série entière est infini.
5. Notons d'abord que J_0 étant une somme de série entière, elle est continue (et même de classe C^∞) sur son intervalle ouvert de convergence, en l'occurrence $\mathbb{R}$. Une application continue sur un segment est bornée, par conséquent J_0 est bornée sur tout segment de $\mathbb{R}$, et en particulier au voisinage de 0.
À présent, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que :
$$\forall x \in]0, r[, \ \alpha f(x) + \beta J_0(x) = 0.$$
On ne peut pas avoir $\alpha = 0$: sinon, pour tout $x \in]0, r[$, on a $\beta J_0(x) = 0$, et quand $x \to 0$ on obtient $\beta J_0(0) = \beta = 0$, ce qui est exclu puisque $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. On peut donc écrire $f = -\frac{\beta}{\alpha} J_0$; l'application J_0 étant bornée au voisinage de 0 d'après ce qui précède, il en est de même de f.

Exercice 2
CCINP PC 2019 (extrait)

à partir d'un corrigé de V. Masselin

Partie I - Calcul des probabilités

6. A l'instant 0, le pion est en A donc $\boxed{p_0 = 1 \text{ et } q_0 = r_0 = 0.}$
A l'instant 1, la probabilité qu'il reste en A est $\frac{1}{2}$ donc $\boxed{p_1 = \frac{1}{2}.}$
Sinon, il se déplace de manière équiprobable sur l'un des deux autres points donc $\boxed{q_1 = r_1 = \frac{1}{4}.}$
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a bien $V_1 = MV_0$.
On suppose maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. $\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales,
$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$
   - $P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de rester en A de l'instant n à l'instant $n+1$ donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$.
   - $P_{B_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de passer de B à A donc $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
   - De même, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

   Par conséquent, $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n)$.
On raisonne de même pour exprimer b_{n+1} et c_{n+1} et on conclut que $\boxed{V_{n+1} = MV_n.}$
8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $V_n = M^n V_0$ ».
   - $M^0 = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   D'après la question précédente, $V_{n+1} = MV_n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $V_n = M^n V_0$ donc $V_{n+1} = MM^nV_0 = M^{n+1}V_0$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, on peut alors conclure que : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, V_n = M^n V_0.}$
$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, en utilisant le résultat admis sur M^n : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n} \text{ et } q_n = r_n = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}.}$

9. Quand n tend vers l'infini, $4^n + 2 \underset{n \to +\infty}{\sim} 4^n$ et $4^n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} 4^n$ donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} q_n = \lim_{n \to +\infty} r_n = \frac{1}{3}.}$$

Cela signifie que, si on observe la position du pion, plus le nombre d'étapes sera grand, plus les chances qu'il soit en A, en B ou en C tenderont à se confondre.

Partie II - temps d'attente avant le premier passage en B

10. Comme le pion est en A à l'instant 0, $(T_B = 1) = B_1$ d'où $P(T_B = 1) = \dfrac{1}{4}$.

• **Rédaction 1 :** On a $\overline{B_1} = A_1 \cup C_1$ et donc :

$$(T_B = 2) \;=\; \overline{B_1} \cap B_2 \;=\; (A_1 \cup C_1) \cap B_2 \;=\; (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)$$

Ces deux événements sont incompatibles (ou encore l'union est disjointe) donc $P(T_B = 1) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)$.
Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$.
De même $P(C_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.
Finalement, $\boxed{P(T_B = 2) = \dfrac{3}{16}.}$

• **Rédaction 2 :** On pouvait écrire la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_1, B_1, C_1).

$$P(T_B = 2) = P(A_1)P_{A_1}(T_B = 2) + P(B_1)P_{B_1}(T_B = 2) + P(C_1)P_{C_1}(T_B = 2)$$

Et $P_{A_1}(T_B = 2) = P_{A_1}(B_2) = \dfrac{1}{4}$, $P_{B_1}(T_B = 2)$, $P_{C_1}(T_B = 2) = P_{C_1}(B_2) = \dfrac{1}{4}$. On retrouve :

$$P(T_B = 2) = \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}r_1 = \frac{3}{16}.$$

11. À l'instant n, le pion est en A, en B ou en C donc $\boxed{\overline{B_n} = A_n \cup C_n.}$

12. On a donc en particulier $\overline{B_2} = A_2 \cup C_2$ et donc :

$$B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1} = \left(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\right) \cup \left(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\right)$$

Et comme l'union est disjointe :

$$\begin{aligned}
P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) &= P\left(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\right) + P\left(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\right) \\
&= \underbrace{P_{A_2 \cap \overline{B_1}}(B_3)}_{=1/4} P(A_2 \cap \overline{B_1}) + \underbrace{P_{C_2 \cap \overline{B_1}}(B_3)}_{=1/4} P(C_2 \cap \overline{B_1}) \\
&= \frac{1}{4}\left(P(A_2 \cap \overline{B_1}) + P(C_2 \cap \overline{B_1})\right) \quad \text{(événements incompatibles)} \\
&= \frac{1}{4}P\left((A_2 \cap \overline{B_1}) \cup (C_2 \cap \overline{B_1})\right) \;=\; \frac{1}{4}P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})
\end{aligned}$$

Enfin, avec la définition d'une probabilité conditionnelle, $\boxed{P(B_3 | \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \dfrac{1}{4}.}$

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $u_k = P(T_B = k)$. On a $(T_B = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \cap B_k$.

- Avec la définition d'une probabilité conditionnelle et le résultat admis :

$$u_k = P(T_B = k) = \frac{1}{4} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) = \frac{1}{4} P(T_b \geq k).$$

Or on a : $\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} = (T_B \geq k) = (T_B = k) \cup (T_B \geq k+1)$ donc

$$u_k = P(T_B = k) = \frac{1}{4}(P(T_B = k) + P(T_B \geq k+1) = \frac{1}{4}(u_k + 4P(T_B = k+1)) = \frac{1}{4}u_k + u_{k+1}.$$

Finalement $u_{k+1} = \frac{3}{4}u_k$. De plus $u_1 = P(T_B = 1) = \frac{1}{4}$ donc, pour $k \geq 1$:

$$u_k = P(T_B = k) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

- $(T_B = k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc $P(T_B = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) = 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{1 - \frac{3}{4}}$.

Par conséquent, $\boxed{P(T_B = 0) = 0.}$

Problème 1
CCINP PC 2022

un corrigé de B. Groux

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

14. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Le polynôme B est non nul car de degré $n+1$. D'après le théorème de division euclidienne, le reste dans la division euclidienne de AP par B est nul ou de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n+1$. Ainsi, $\varphi(P)$ est nul ou de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire $\boxed{\varphi(P) \text{ appartient à } \mathbb{C}_n[X]}$.

15. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2\,.$$

De plus, R_1 et R_2 appartiennent à $\mathbb{C}_n[X]$ donc $R_1 + \lambda R_2$ aussi. Par unicité de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B, $\boxed{\text{le quotient et le reste dans cette division euclidienne sont respectivement}}$ $\boxed{Q_1 + \lambda Q_2 \text{ et } R_1 + \lambda R_2}$.

En particulier, pour tous $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)$. L'application φ est donc linéaire.
Or, φ est définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ et, d'après la question 14, φ est à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$.

En conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_n[X]}$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

16. On a $A \times 1 = X^2 + 2X = B \times 0 + X^2 + 2X$ et $\deg(X^2 + 2X) < \deg(B)$. Par unicité de la division euclidienne de $A \times 1$ par B, le reste dans cette division euclidienne est $X^2 + 2X$. On a donc $\varphi(1) = 2X + X^2$.

De même, on a $A \times X = X^3 + 2X^2 = B \times 1 + X^2 + X + 1$ et $\deg(X^2 + X + 1) < \deg(B)$, donc $\varphi(X) = 1 + X + X^2$. Enfin, on a $A \times X^2 = X^4 + 2X^3$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^4 + 2X^3 & X^3 + X^2 - X - 1 \\
\cline{3-3}
- & (X^4 + X^3 - X^2 - X) & X + 1 \\
\cline{1-2}
 & X^3 + X^2 + X & \\
- & (X^3 + X^2 - X - 1) & \\
\cline{1-2}
 & 2X + 1 &
\end{array}
$$

On a $A \times X^2 = B \times (X + 1) + 2X + 1$ et $\deg(2X + 1) < \deg(B)$, donc $\varphi(X^2) = 1 + 2X$.

En conclusion, $\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base } (1, X, X^2) \text{ est } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

17. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I_3 - M) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & -1 \\ -1 - \lambda & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \\
&= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & -3 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
&= (\lambda + 1) \times (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (\text{développement suivant } C_1) \\
&= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\
&= (\lambda + 1)^2 (\lambda - 3)\,.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } M \text{ sont donc } -1 \text{ et } 3}$, de multiplicité 2 et 1 respectivement.

Dans la matrice $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les colonnes sont toutes égales et non nulles, donc la matrice $M + I_3$ est de rang 1. D'après le théorème du rang, son noyau est donc de dimension 2. De plus, on a $(M + I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(M + I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(M + I_3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de deux vecteurs dans $\mathrm{Ker}(M + I_3)$, qui est de dimension 2.

$\boxed{\text{Une base du sous-espace propre de } M \text{ associé à la valeur propre } -1 \text{ est donc } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$.

Par ailleurs, puisque 3 est valeur propre simple de M, le sous-espace propre associé est de dimension 1. Or, dans la matrice $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, les colonnes vérifient la relation $C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$ donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(M - 3I_3)$.

Ce vecteur étant non nul, $\boxed{\text{le sous-espace propre de } M \text{ associé à la valeur propre 3 est donc } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$.

18. D'après la question 17, pour chacune des valeurs propres de M, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de la valeur propre. La matrice M est donc diagonalisable, donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable}}$.
En particulier, la concaténation d'une base de chaque sous-espace propre de φ constitue une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
D'après les calculs de la question 17,

$$\boxed{\text{la famille } (1-X, 1-X^2, 1+2X+X^2) \text{ est une base de } \mathbb{C}_2[X] \text{ formée de vecteurs propres de } \varphi.}$$

Partie III - Étude d'un second exemple

19. On a $A \times 1 = B \times 0 + \alpha + \beta X + \gamma X^2$ et $\deg(\alpha + \beta X + \gamma X^2) < \deg(B)$. Par unicité de la division euclidienne de $A \times 1$ par B, le reste dans cette division euclidienne est $\alpha + \beta X + \gamma X^2$. On a donc $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.
De même, on a $A \times X = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = B \times \gamma + \alpha X + \beta X^2$ et $\deg(\alpha X + \beta X^2) < \deg(B)$, donc $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$.
Enfin, on a $A \times X^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = B \times (\beta + \gamma X) + \alpha X^2$ et $\deg(\alpha X^2) < \deg(B)$, donc $\varphi(X^2) = \alpha X^2$.
Ainsi, $\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base } (1, X, X^2) \text{ est } T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}}$.

20. La matrice T est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc T admet pour unique valeur propre α, de multiplicité 3. Alors, la matrice T est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(T - \alpha I_3)$ est de dimension 3, si et seulement si $T - \alpha I_3$ est la matrice nulle, si et seulement si $\beta = \gamma = 0$, si et seulement si A est constant.
En conclusion, $\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable si et seulement si le polynôme } A \text{ est constant}}$.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

21. On a (voir cours) :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{array} \right. .$$

22. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$D(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i(x_j) = P(x_j) - \left(P(x_j) \times 1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} P(x_i) \times 0 \right) = 0 .$$

$\boxed{\text{Les nombres } x_0, \ldots, x_n \text{ sont donc des racines du polynôme } D.}$

23. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Puisque les polynômes $L_0, \ldots, L_n$ appartiennent à $\mathbb{C}_n[X]$, il en est de même pour le polynôme D. Ainsi, le polynôme D est de degré inférieur ou égal à n et possède au moins $n+1$ racines distinctes, il s'agit donc du polynôme nul. On a ainsi $\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i}$.

24. D'après la question 23, tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est combinaison linéaire de $L_0, \ldots, L_n$ donc la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ engendre $\mathbb{C}_n[X]$. Or, cette famille est constituée de $n+1$ vecteurs et $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

$$\boxed{\text{La famille } (L_0, \ldots, L_n) \text{ est donc une base de } \mathbb{C}_n[X].}$$

25. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. On a $AL_k = BQ_k + R_k$ donc

$$A(x_j) L_k(x_j) = B(x_j) Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$$

car x_j est racine de B par définition. Étant donné la valeur de $L_k(x_j)$, on a donc

$$\boxed{R_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k \text{ et } R_k(x_k) = A(x_k)}.$$

26. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le polynôme $R_k = \varphi(L_k)$ appartient à $\mathbb{C}_n[X]$. D'après la question 23, on a donc

$$\varphi(L_k) = R_k = \sum_{j=0}^{n} R_k(x_j)L_j = R_k(x_k)L_k + \sum_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} R_k(x_j)L_j = A(x_k)L_k$$

en utilisant la question 24. On a donc $\boxed{\varphi(L_k) = A(x_k)L_k}$.

27. D'après la question 21, la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et, d'après la question 23, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, L_k est un vecteur propre de φ (car non nul) associé à la valeur propre $A(x_k)$. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ étant une base de $\mathbb{C}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont } A(x_0), \ldots, A(x_n).}$$

Problème 2
à partir de CCINP PSI 2017

à partir des corrigés de C. Devulder et de L.Urbain

Partie 1 : résultats préliminaires

28. Par théorème fondamental appliqué à la fonction continue h sur l'intervalle $\mathbb{R}$, la primitive cherchée est

$$H \ : \ x \longmapsto \int_0^x h(t)\, dt$$

h étant 2π-périodique, $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+2\pi} \varphi(t)\, dt$ ne dépend pas de x (sa dérivée est $g'(x) = \varphi(x+2\pi) - \varphi(x) = 0$) et par hypothèse, sa valeur en 0 est nulle. On en déduit que H est aussi 2π-périodique.
Comme H est continue, elle est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$. Etant 2π-périodique, elle est aussi bornée sur $\mathbb{R}$ (avec la même borne que sur $[0, 2\pi]$).

29. On effectue une intégration par parties. Puisque H et f sont de classe C^1 sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)h(nt)\, dt = \left[\frac{1}{n}H(nt)f(t)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)H(nt)\, dt.$$

Or H est bornée sur $\mathbb{R}$, f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle est bornée sur ce segment. Par inégalités triangulaires, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)h(nt)\, dt\right| \leq \frac{\|H\|_\infty}{n}\Big(|f(b)| + |f(a)| + (b-a)\|f'\|_{\infty,[a,b]}\Big).$$

Et par encadrement, on obtient : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)h(nt)\, dt = 0.}$

Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

30. cf **(E1)**.

31. La fonction ψ est continue sur $]0, +\infty[$.
Par limite usuelle, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \psi(t) = \frac{1}{2}$ donc ψ est prolongeable par continuité en 0 et par conséquent intégrable sur $]0, 1]$.
Pour tout $t > 0$, $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ donc $0 \leq \psi(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$. L'application $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann) et, par comparaison, ψ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
On peut alors conclure que $\boxed{\psi \text{ est intégrable sur }]0; +\infty[.}$

On pose :
$$u(t)=\frac{1}{t},\quad v'(t)=\sin t,\quad u'(t)=-\frac{1}{t^2}\quad\text{ et }\quad v(t)=1-\cos(t).$$
Les applications u et v donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $]0,+\infty[$et on a :
$$u(t)v(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t}{2}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0\quad\text{ et }\quad u(t)v(t)=\frac{1-\cos(t)}{t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
Donc, par intégration par parties dans une intégrale impropre convergente,
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt\end{aligned}$$

32. Soit f définie sur $\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$ par $f:(x,t)\longmapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$.
- Pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- **Hypothèse de domination :** Pour $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$, $xt\geq 0$ donc $0\leq e^{-xt}\leq 1$ et
$$|f(x,t)|\leq\frac{1-\cos t}{t^2}=\psi(t)$$

Par la question précédente, ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
En utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on peut conclure que
$$\boxed{L\text{ est bien définie et continue sur }\mathbb{R}^+.}$$

33. Soit $[a,b]$ un segment de $]0,+\infty[$.
- Pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et pour $x\geq a$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\quad\text{ et }\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=(1-\cos t)e^{-xt}.$$
- Pour tout $x\in[a,b]$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$ (question précédente).
- Pour tout $x\in[a,b]$, $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $]0;+\infty[$. Et elles sont intégrables sur $]0,+\infty[$ (prolongeables par continuité en 0 et négligeables devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ car $x>0$).
- **Hypothèse de domination :** Pour $x\in[a,b]$ et $t>0$:
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|\leq 2e^{-at}=\varphi_2(t)$$

et φ_2 est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous permet alors de conclure que L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a,b]\subset]0;+\infty[$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$.

34. L'application $\psi:t\longmapsto\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 ; notons encore
psi le prolongement.
- $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t)=0$ donc il existe $A>0$ tel que, pour tout $t>A$, $|\psi(t)|\leq 1$.
- ψ est continue sur le segment $[0;A]$ donc ψ est bornée : il existe $M>0$ tel que pour tout $t\in[0;A]$, $|\psi(t)|\leq M$.

Si on pose $M' = \max(1, M)$ alors, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $|\psi(t)| \leq M'$.
En particulier $\boxed{\psi \text{ est bornée sur }]0; +\infty[.}$

On montre de même que $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t}$ est bornée sur $]0; +\infty[$. On note M'' un majorant de cette fonction (qui est à valeurs positives).

Soit $x > 0$.
Pour tout $t > 0$, $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt} \leq M' e^{-xt}$ et comme $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $x > 0$), par positivité de l'intégrale, on a donc :

$$|L(x)| \leq M' \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M'}{x}.$$

Par encadrement, on obtient : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} L(x) = 0.}$

De même, pour tout $t > 0$, $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \leq M'' e^{-xt}$ donc :

$$|L'(x)| \leq M'' \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M''}{x}.$$

Par encadrement, on obtient aussi : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} L'(x) = 0.}$

35. Pour $x > 0$, $L''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t) e^{-xt} dt$. Pour $A > 0$, par linéarité de l'intégrale sur un segment et en utilisant que e^{-xt} est réel,

$$\begin{aligned} \int_0^A (1-\cos t) e^{-xt} dt &= \int_0^A e^{-xt} dt - \mathrm{Re}\left(\int_0^A e^{(i-x)t} dt\right) \\ &= \frac{1-e^{-xA}}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{(i-x)A}}{i-x}\right) \end{aligned}$$

Or, $\lim_{A \to +\infty} e^{-xA} = 0$ et $|e^{(i-x)A}| = e^{-xA}$ donc $\lim_{A \to +\infty} e^{(i-x)A} = 0$ (car $x > 0$).
En passant à la limite ($A \to +\infty$), on a : $L''(x) = \dfrac{1}{x} + \mathrm{Re}(\dfrac{1}{i-x})$.
Après calculs, $\boxed{\forall x > 0,\ L''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}.}$

36. Par intégration ($]0, +\infty[$ est un intervalle), il existe une constante c telle que, pour $x > 0$, $L'(x) = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + c$.

$$L'(x) = c + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} c$$

et, d'après la question précédente, $c = 0$. Ainsi, $\boxed{\forall x > 0,\ L'(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1).}$

Une primitive de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t^2+1) dt &= \Big[t\ln(t^2+1)\Big]_1^x - \int_1^x \frac{2t^2}{t^2+1} dt \\ &= x\ln(x^2+1) - \ln 2 - 2\int_1^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt \\ &= x\ln(x^2+1) - \ln 2 - 2(x-1) + 2\mathrm{Arctan}(x) - 2\mathrm{Arctan}(1) \end{aligned}$$

Il existe donc une constante c' telle que, pour tout $x>0$, $L(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + c'$. D'une part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$ et d'autre part :

$$x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) = -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 0$, on a finalement $c' = \frac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$\forall x>0, \qquad L(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}.$$

37. L est continue en 0 et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = 0$ donc $L(0) = \frac{\pi}{2}$.

Or, par définition de L, $L(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ donc par la question 31 : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.}$

Partie 3 : phénomène de Gibbs

38. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
39. Pour tout entier n, S_n est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,\pi]$.

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in]0,\pi[, \quad S_n'(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \cos((2k+1)x) \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)x}\right) = \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)x}\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x})^k\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\,\frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x}-1}\right) \quad \text{car} \quad x \notin \{0,\pi\} \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x} \neq 1 \\
&= \frac{4}{\pi}\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\,\frac{\cos((n+1)x)\ \sin((n+1)x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

$$\forall\, x \in]0,\pi[, \quad S_n'(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin(x)} \quad \text{et} \quad S_n(0) = S_n(\pi) = 0$$

S_n' est une fonction continue sur $[0,\pi]$ donc

$$\forall\, x \in [0,\pi], \quad S_n'(x) = S_n(0) + \int_0^x S_n'(t)\ dt$$

ce qu'on peut écrire

$$\boxed{\forall\, x \in [0,\pi], \quad S_n'(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\ dt}$$

40. On sait que

$$\forall t \in [0,1[, \ \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k$$

Ainsi, en intégrant sur $[0,1[$,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\ dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k}\ dt$$

n étant fixé, on découpe la somme en deux morceaux :

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-1)^k t^{2k}\,dt+\int_0^1\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-t^2)^k\,dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}+\int_0^1\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-t^2)^k\,dt$$

La somme est encore géométrique et on peut écrire cela sous la forme

$$\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\int_0^1\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt=(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

On en déduit que

$$\left|\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right|\leq\int_0^1 t^{2n+2}\,dt=\frac{1}{2n+3}\to 0$$

et ainsi

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.}$$

41. On a $\sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$ et donc $S_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.}$

42. On a : $\forall n\in\mathbb{N},\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad\sin((2n+1)(\pi-x))=\sin((2n+1)\pi-(2n+1)x)=\sin(\pi-(2n+1)x)=\sin((2n+1)x).$
On en déduit :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad S_n(\pi-x)=S_n(x)}$$

43. On applique alors **Q29.** à la fonction $h:t\longmapsto\sin(2t)$ qui continue, 2π-périodique et telle que $\int_0^{2\pi}\sin(2t)\mathrm{d}t=0$ et à la fonction $\dfrac{1}{\sin}$ qui est continue sur $\left[x,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,dt=0$$

44. D'après **Q41.** :

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=1\iff\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\iff\lim_{n\to+\infty}\left(S_n(x)-S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

Fixons x dans $]0,\pi/2]$. D'après **Q22.** :

$$\begin{aligned}S_n(x)-S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^x\frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,dt\right)\\&=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,dt\end{aligned}$$

Et avec le résultat de la question précédente, on en déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=1}$$

45.
- On vient de montrer que si $x\in]0,\pi/2]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=1=f(x)$.
- Si $x\in[\pi/2,\pi[$, alors $\pi-x\in]0,\pi/2]$ donc, d'après **Q42.**, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(\pi-x)=1=f(x)$
- De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(0)=0=f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(\pi)=0=f(\pi)$

- Comme S_n et f sont impaires et $2\pi-$ périodiques, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$$

$\boxed{\text{Ainsi la suite } \quad (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{converge simplement vers la fonction } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$

46. On a $\quad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0) = 1 = \varphi(0)$

 Pour x fixé dans $]0,\pi]$, on a $\sin\left(\dfrac{x}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2n}$, donc $\quad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} = \varphi(x)$

$$\boxed{\text{Ainsi la suite } \quad (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{converge simplement vers la fonction } \varphi \text{ sur } [0,\pi].}$$

47. Il est clair que φ est continue sur $]0,\pi/2]$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$ ainsi $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0,\pi/2].}$

 D'après **Q22.**, $\quad S_n\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \dfrac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\, dt$
 Le changement de variable affine $u = 2(n+1)t$ donne :

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{n+1}(u)\, du$$

 Pour intervertir limite et intégrale, on utilise le théorème de convergence dominée :
 - Les fonctions φ_n sont continues par morceaux sur $[0,\pi]$.
 - La suite de fonctions (φ_n) converge simplement vers la fonction φ, continue par morceaux sur $[0,\pi]$.
 - Hypothèse de domination : pour tout $x \in]0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x}{2(n+1)} \in]0,\pi/2]$.

 Or on peut montrer que : $\forall t \in]0,\pi/2], \quad \dfrac{2}{\pi} \leqslant \dfrac{\sin(t)}{t} \leqslant 1$ (par une étude de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$, en dérivant le numérateur de g' pour l'étude de signe). On en déduit que :

$$\forall u \in]0,\pi], \quad |\varphi_{n+1}(u)| = \left| \frac{g(u)}{g\left(\frac{u}{2n}\right)} \right| \leq 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

 Et la fonction $\left(u \longmapsto \dfrac{\pi}{2}\right)$ est continue donc intégrable sur $[0,\pi]$.

 Le th. de convergence dominée permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(u)\, du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx}$$

48. En utilisant le développement en série entière de sin, on sait que

$$\forall x \in]0,\pi], \ \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

 La relation reste vraie pour $x = 0$ puisque $\varphi(0) = 1$. La série entière qui apparait est de rayon de convergence infini et converge donc normalement sur $[0,\pi]$. A fortiori, elle converge uniformément sur le segment $[0,\pi]$. Par le théorème de convergence uniforme, on a donc :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

 Avec la question 28, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}.}$$

A nouveau, $f\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1.}$$

49. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = (-1)^n\ \dfrac{\pi^{2n}}{(2n+1)\ (2n+1)!}$.

- On a bien une série alternée.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| > 0$ et $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{\pi^2\ (2n+1)}{(2n+2)(2n+3)^2} \leq \dfrac{\pi^2}{(2n+3)^2} \leq 1.$ Donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- u_n est le terme général d'une série convergente donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|u_n| = 0$

On peut alors en déduire par théorème des séries alternées, que le reste partiel (à partir de $n = 1$) est du signe de son premier terme.

En particulier : $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty}(-1)^n\ |u_n| \geq 0$ ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ |u_n| \geq \sum_{n=1}^{3}(-1)^n\ |u_n|$$

et donc :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\ \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)\ (2n+1)!} \geq \sum_{n=0}^{3}(-1)^n\ \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)\ (2n+1)!}.}$$

Avec les deux questions précédentes, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) \geq 2\ \sum_{n=0}^{3}(-1)^n\ \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)\ (2n+1)!} - 1 \simeq 0.174 > 0.17$$

50. Si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers f sur $]0,\pi/2[$, on aurait par définition :

$$\lim_{n\to+\infty}\|S_n - f\|_{\infty,]0,\pi/2[} = 0.$$

Or $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \|S_n - f\|_{\infty,]0,\pi/2[} \geq S_n\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right)$ et on obtient donc une contradiction en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$.

$$\boxed{\text{Finalement la suite de fonctions } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément vers } f \text{ sur }]0,\pi/2[.}$$