Devoir surveillé 4 - Correction

Exercice 1
E3A PSI 2013 maths B

à partir d'un corrigé de C. Devulder

Partie A.

1. Pour tout $x > 0$, $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est, par comparaison, le terme général d'une série absolument convergente.

   Finalement, $\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^*.}$
2. La fonction f_n est décroissante et positive sur $]0,+\infty[$ donc :
$$\|f_n\|_{\infty,]0,+\infty[} = \lim_{x\to 0} f_n(x) = \frac{1}{n}.$$
   La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ donc $\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur }]0,+\infty[\,;}$
3. Si $0 < x \leq y$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \geq f_n(y)$. En sommant, de 1 à N et en passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $f(x) \geq f(y)$ ainsi
$$\boxed{f \text{ est ainsi décroissante sur }]0,+\infty[.}$$
4. On utilise le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$ et $f_n'\ :\ x \longmapsto -\frac{2n^2x}{(1+(nx)^2)^2}$.
   - $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
   - $\forall [a,b] \subset]0,+\infty[,\ \forall x \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |f_n'(x)| \leq \frac{2n^2b}{(1+(na)^2)^2}$.

     Ainsi $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{2n^2b}{(1+(na)^1)^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente ce qui nous indique que $\sum f_n'$ converge normalement (et donc uniformément) sur tout segment de $]0,+\infty[$.

   Le théorème s'applique et indique que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Elle l'est donc sur $]0,+\infty[$ avec
$$\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) = -2x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+(nx)^2)^2}.}$$
   Remarque : on obtient ainsi que f' est négative sur $]0,+\infty[$ ce qui redonne la décroissance.
5. On veut maintenant utiliser le théorème de double limite.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x \geq 1,\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2}$. Ainsi $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq \frac{1}{1+n^2}$ est le terme général d'une série absolument convergente ce qui nous indique que $\sum f_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$ et donc au voisinage de $+\infty$.

   On conclut que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

6. (a) Fixons $x > 0$. La fonction $g_x \ : \ t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. En particulier,

$$\forall p \geq 1,\ \forall t \in [p, p+1],\ g_x(p+1) \leq g_x(t) \leq g_x(p)$$

En intégrant cette inégalité sur $[p, p+1]$, on obtient

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1+(p+1)^2x^2} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leq \frac{1}{1+p^2x^2}.}$$

(b) Fixons $x > 0$ et sommons ces inégalités pour $p = 1, \ldots, n$:

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+(p+1)^2x^2} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+p^2x^2}$$

L'application $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2x^2}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{x}\mathrm{Arctan}(tx)$. Les quantités précédentes admettent une limite quand $n \to +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$f(x) - \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{\pi}{2x} - \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} \leq f(x)$$

ou encore

$$\frac{\pi}{2x} - \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{2x} - \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$$

(c) Majorant et minorant étant tous deux équivalents à $\dfrac{\pi}{2x}$ quand $x \to 0$, on en déduit que $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}.}$

7. L'allure de la courbe de f est celle d'une branche d'hyperbole sur $]0, +\infty[$.

Partie B.

8. Soit $x > 0$ fixé.
L'application $u_x \ : \ t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 (par la valeur $1/x$) et dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (car $x > 0$ et par croissances comparées entre puissance et exponentielle puisque $|u_x(t)| \leq \dfrac{1}{e^{xt}-1} \sim e^{-xt}$). Ainsi, u_x est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donc

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ \varphi(x) \text{ existe.}}$$

9. (a) L'application $t \longmapsto e^{-kxt}\sin(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $|e^{-kxt}\sin(t)| \leq e^{-kxt}$. Or $t \longmapsto e^{-kxt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $kx > 0$) donc par comparaison, l'intégrale J_k est convergente.

(b) On a

$$\int_0^{+\infty} e^{-kxt}\sin(t)\ dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-kx)t}\ dt\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-kx)t}}{i-kx}\right]_0^{+\infty}\right)$$

On otient (limite à justifier) : $\boxed{J_k = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{i-kx}\right) = \dfrac{1}{1+k^2x^2}.}$

(c) On a (somme géométrique de raison $e^{-xt} \in [0, 1[$)

$$\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1} = \sin(t)e^{-xt}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kxt} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t)e^{-kxt}$$

Le paramètre réel $x > 0$ étant **fixé**, on veut pouvoir intégrer terme à terme (par rapport à la variable t). On utilise le théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions.

- On pose $h_k(t) = \sin(t)e^{-kxt}$.
  Par construction, $\sum h_k$ converge simplement sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ vers $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{e^{xt}-1}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Les fonctions h_k sont elles aussi continues par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n} h_k(t)\right| &= \left|\sin(t)\sum_{k=1}^{n} e^{-kxt}\right| = |\sin(t)e^{-xt}|\left|\frac{1-e^{-nxt}}{1-e^{-xt}}\right| \\ &\leq |\sin(t)|\left|\frac{e^{-xt}}{1-e^{-xt}}\right| \\ &\leq \frac{|\sin(t)|}{e^{xt}-1} \end{aligned}$$

  et on a vu que la fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut ainsi appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \sum_{k\geq 1} J_k = f(x).}$$

Exercice 2

E3A PC 2017 maths 1

un corrigé de M. Bourgade

1. (a) On a : $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(A_0) = 1$.

   (b) Notons : $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors la famille $(U_1,\ U_2,\ U_3)$ est libre et, pour tout $k \in \{1,\ 2,\ 3\}$, $A_0U_k = 0$. Ainsi, 0 est valeur propre de A_0 et une base du sous-espace propre associé est $(U_1,\ U_2,\ U_3)$ (car $\dim(\mathrm{Ker}(A_0)) = 4 - \mathrm{rg}(A_0) = 3$).

   (c) i. On a $A_0U_0 = -2U_0$.

   ii. Ainsi, U_0 est un vecteur propre associée à la valeur propre -2. On en déduit alors que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, puisque $(U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3)$ est une base de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A_0.

   iii. Pour la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(-2,\ 0,\ 0,\ 0)$ et la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ on a $A_0 = PDP^{-1}$.

2. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

   (a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.

   Comme le rang de A est 1, il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} l_1 \cdots l_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que les colonnes de A soient successivement l_1C, l_2C,... et l_nC (la matrice L est bien non nulle car une des colonnes de A est C et le coefficient l_i correspondant vaut 1). Cela se traduit matriciellement par l'égalité $A = CL$.

(b) Le i-ème coefficient diagonal de A est $c_i l_i$. D'où $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} c_i l_i = LC$.

Puis $A^2 = C(LC)L = \operatorname{tr}(A)CL = \operatorname{tr}(A)A$.

(c) Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé. Ainsi $A^2X = \lambda^2 X$ et $\operatorname{tr}(A)AX = \operatorname{tr}(A)\lambda X$. D'où : $\left(\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda\right)X = 0$ et par suite $\left(\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda\right) = 0$ puisque $X \neq 0$. On a bien $\lambda \in \{0,\ \operatorname{tr}(A)\}$.

(d) Le réel 0 est valeur propre de A car A n'est pas inversible. Le théorème du rang affirme que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 est $n - \operatorname{rg}(A) = n-1$.

(e) Soit $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})\backslash\operatorname{Ker}(A)$. Alors $AX \neq 0$ et $A^2X = \operatorname{tr}(A)AX$. Ainsi $\operatorname{tr}(A)$ est valeur propre de A (associée au vecteur propre AX).

(f) On sait que 0 est valeur propre de A d'ordre au moins $n-1$ et que le spectre de A est $\{0,\ \operatorname{tr}(A)\}$. Ainsi le polynôme caractéristique de A est scindé et vaut $X^{n-1}\left(X - \operatorname{tr}(A)\right)$. Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ alors la dimension de chacun des espaces propres vaut l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Dans ce cas, A est diagonalisable. Si $\operatorname{tr}(A) = 0$ alors l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différente de la dimension de l'espace propre relatif. Dans ce cas, A n'est pas diagonalisable.

3. (a) Comme $f \circ f \neq \widetilde{0}$ il existe $v \in E$ tel que $f \circ f(v) \neq 0$. Comme $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(u)$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \alpha u$. Ainsi, $0 \neq f \circ f(v) = f(\alpha u) = \alpha f(u)$. D'où $f(u) \neq 0$.

(b) Or il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Comme $f(u) \neq 0$, on en déduit que $u \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et par suite λ est une valeur propre non nulle de f (associée au vecteur propre u).

(c) Si on note A la matrice de l'endomorphisme f de E dans une base donnée, alors ce qui précède prouve que A est une matrice de rang 1 possédant une valeur propre non nulle (sa trace). A est donc diagonalisable. Et f l'est aussi.

Problème 1

Centrale 2019 PSI (extraits)

un corrigé de L. Cozar

I Premiers résultats

Q 1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et u un endomorphisme de E, notons $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Si u est nilpotent d'indice 1, cela signifie d'après l'énoncé que $M^1 = M = 0$, donc que $u = 0$. En conclusion :

il y a donc un unique endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à 1 et c'est l'endomorphisme nul.

I.A - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

Q 2. Avec les notations de la question 1, puisque $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = M^k$ pour tout entier naturel k, le fait que u soit nilpotent d'indice p signifie que M l'est donc que $M^p = 0$ et, par minimalité de p, $M^{p-1} \neq 0, \ldots, M \neq 0$. Ainsi, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Comme $u^{p-1} \neq 0$, on en déduit (par définition de ce qu'est l'endomorphisme nul)

$$\boxed{\text{l'existence d'un vecteur } x \text{ de } E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$$

Q 3. Soit une famille de scalaires $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1} \in \mathbb{C}^p$ telle que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \ (*)$.

Si on avait $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \ldots, 0)$, on pourrait définir l'entier $i = \min(\{0 \leqslant k \leqslant p-1 \mid \lambda_k \neq 0\})$ de sorte que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{i-1} = 0$ et $\lambda_i \neq 0$. En composant la relation $(*)$ par u^{p-1-i} (on le peut car $p-1-i \geqslant 0$ par construction), on aurait donc, par linéarité de u, $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = u(0) = 0$, d'où

$$\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0.$$

Comme $u^p = 0$, il ne reste dans cette somme que $\lambda_i u^{p-1}(x) = 0$. C'est impossible puisque $\lambda_i \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$ d'après la question 2. On conclut ce raisonnement par l'absurde : $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) = (0, \ldots, 0)$. Ainsi,

$$\boxed{\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \text{ est libre.}}$$

Cette famille libre admet p vecteurs dans l'espace E de dimension $n = 2$. On sait d'après le cours que le nombre de vecteurs de cette famille est inférieur à la dimension de l'espace : $p \leqslant 2$. Or par hypothèse, $p \geqslant 2$, d'où

$$\boxed{p = 2.}$$

Q 4. Comme u est nilpotent d'indice 2 d'après la question précédente, $u \neq 0$ et $u^2 = u \circ u = 0$, on sait d'après le cours qu'alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Or, d'après la formule du rang appliquée à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$, il vient $2 = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Puisque $\mathrm{rg}(u) > 0$ car $u \neq 0$, on ne peut avoir que $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$. Par inclusion et égalité des dimensions, on peut conclure que

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u).}$$

Q 5. D'après les questions 2 et 3, il existe un vecteur x de E tel que $(x, u(x))$ soit libre dans E de dimension 2, le cours nous apprend alors que $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est une base de E.
En posant $y = u(x)$, on a $u(x) = y$ et $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ vérifie donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2.}$$

Q 6. $(\Longrightarrow)$ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A. Comme A, u est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. On traite les deux cas des questions précédentes avec $E = \mathbb{C}^2$.
• Si $p = 1$, d'après la question 1, $u = 0$ donc $A = 0$ et on a bien $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.
• Si $p \geqslant 2$, on a vu en question 5 qu'il existait une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2$. Comme A et J_2 représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables (plus précisément si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$, on a $A = PJ_2P^{-1}$) donc elles ont même trace et même déterminant. Comme $\mathrm{tr}(J_2) = \det(J_2) = 0$, on a encore $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$.
$(\Longleftarrow)$ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0$. On sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc $A^2 = 0$ car χ_A annule A : A est bien nilpotente d'indice $p \leqslant 2$.
Par conséquent, on conclut par double implication que

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente} \Longleftrightarrow (\mathrm{tr}(A) = \det(A) = 0).}$$

I.C - Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Q 12. Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A d'après le cours. Comme tout polynôme complexe admet au moins une racine d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le spectre de A n'est pas vide.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Il existe donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $A^i X = \lambda^i X$, alors $A^{i+1}X = (A\,A^i)X = A(A^i X) = \lambda^i AX = \lambda^{i+1}X$. On a donc établi par récurrence (initialisation $AX = \lambda X$) que pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, on a $A^i = \lambda^i X$.
Pour $i = p$, on obtient $A^p X = 0X = 0 = \lambda^p X$ car $A^p = 0$. Or $X \neq 0$ donc $\lambda^p = 0$ ce qui prouve que $\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, alors } 0 \text{ est l'unique valeur propre de } A.}$$

Q 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A est nilpotente et diagonalisable. On vient de voir que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Mais on sait que si A est diagonalisable, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A, ce qui donne ici X annulateur de A d'où $A = 0$.

Réciproquement, la matrice nulle est à la fois nilpotente et diagonalisable (toute base est une base de vecteurs propres).

$$\boxed{\text{La seule matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ à la fois nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.}}$$

Q 14. ($\Longrightarrow$) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ d'après la question 12. La seule valeur propre de A est donc 0 et elle est forcément de multiplicité n dans χ_A puisque $\deg(\chi_A) = n$. Ainsi, $\chi_A = X^n$.
($\Longleftarrow$) Si $\chi_A = X^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $A^n = 0$ et A est bien nilpotente.
Par double implication, on vient de montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\boxed{A \text{ est nilpotente} \Longleftrightarrow \chi_A = X^n.}$$

Q 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont 0 est l'unique valeur propre. Comme à la question précédente, l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_A ne peut être que n donc $\chi_A = X^n$ ce qui justifie que $\chi_A = X^n$ donc que A est nilpotente d'après la question 14. On a donc avec 12 et 15, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\boxed{A \text{ est nilpotente} \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) = \{0\}.}$$

Q 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire à diagonale nulle. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $\lambda I_n - A$ est aussi triangulaire avec des λ sur la diagonale donc $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$ ce qui justifie que $\chi_A = X^n$. D'après la question 14, la matrice A est donc nilpotente.

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ triangulaire à diagonale nulle est nilpotente.}}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On sait d'après le cours que A est trigonalisable car $\chi_A = X^n$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. La matrice A est donc semblable à une matrice triangulaire inférieure (par exemple) avec les valeurs propres sur la diagonale. Mais comme 0 est la seule valeur propre de A,

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$$

Q 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p et $P = X^p Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.
Alors, comme $P(A) = A^p Q(A)$ et que $A^p = 0$, on a bien $P(A) = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{si } P \in \mathbb{C}[X] \text{ est multiple de } X^p \text{ et } A \text{ nilpotente d'indice } p, \text{ alors } P(A) = 0.}$$

Q 18. Comme P est un polynôme annulateur de A, on sait d'après le cours que toute valeur propre de A est racine de P. Or 0 est la seule valeur propre de A nilpotente d'après la question 12. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente et } P \text{ annulateur de } A, \text{ alors } 0 \text{ est racine de } P.}$$

Q 19. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on peut écrire $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{m_k}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ sont les différentes racines de Q et $m_1, \ldots, m_q$ leurs multiplicités respectives. Comme $Q(0) \neq 0$, aucune de ces racines n'est nulle. Par conséquent, $Q(A) = \displaystyle\prod_{k=1}^{q} (A - \lambda_k I_n)^{m_k}$ d'après les relations sur les polynômes de matrice.
Or, pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant q$, le complexe λ_k n'est pas valeur propre de A puisque $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ d'après la question 12, ainsi la matrice $A - \lambda_k I_n$ est inversible. En tant que produit de puissances de matrices inversibles (autrement dit $GL_n(\mathbb{C})$ est stable par produit, c'est même un groupe pour la loi $\times$),

$$\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$$

Comme $P(A) = A^m Q(A) = 0$, en multipliant à droite par $Q(A)^{-1}$, on obtient $A^m = 0$. Mais par définition de l'indice de nilpotence de A, $A \neq 0, A^2 \neq 0, \ldots, A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$, ce qui justifie que $m \geq p$. Ainsi,

$$\boxed{P = X^m Q = X^p (X^{m-p} Q) \text{ est bien un multiple de } X^p.}$$

Réciproquement, même si ce n'est pas demandé, si $P = X^p Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) = A^p Q(A) = 0 \times Q(A) = 0$ donc P annule A. Par double implication, on a montré l'équivalence suivante,

$$\boxed{\text{si } A \text{ est nilpotente d'indice } p \text{ et } P \in \mathbb{C}[X],\ P(A) = 0 \Longleftrightarrow X^p \text{ divise } P.}$$

Autrement dit, même si la notion est hors programme, le polynôme minimal de A nilpotente d'indice p est X^p.

I.D - Racines carrées de matrices nilpotentes

Q 20. Comme les deux dernières colonnes de A sont respectivement 3 fois et -7 fois la première qui est non nulle, on a $\mathrm{rg}(A) = 1$. Il vient donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(A) = 1 + 6 - 7 = 0.}$$

D'après le cours, on sait que l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_A est supérieur ou égal à $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ or $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 1 = 2$ par la formule du rang. Ainsi, $(X - 0)^2 = X^2$ divise χ_A. Par conséquent, comme χ_A est de degré 3 et unitaire, on a $\chi_A = X^3 + aX^2$. De plus, le cours nous apprend que $a = -\mathrm{tr}(A) = 0$ car $\chi_A = X^3 - \mathrm{tr}(A)X^2 + \ldots - \det(A)$. Finalement,

$$\boxed{\chi_A = X^3.}$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$ donc A est nilpotente. Un calcul élémentaire montre que $A^2 = 0$. On pouvait aussi dire que $A = XY^T$ avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ donc $A^2 = XY^T XY^T = (Y|X)XY^T = (X|Y)A$ car $(Y|X) = Y^T X$. Comme $(X|Y) = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times (-7) = 0$, on à nouveau $A^2 = 0$, d'où

$$\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice 2.}}$$

Q 21. On cherche à montrer que A est semblable à $\mathrm{diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$ ce qui revient, par la formule de changement de base, à trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$.
Il s'agit donc de trouver v_1, v_2, v_3 linéairement indépendants tels que $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = u(v_3) = 0$.
Procédons par ordre :

- on cherche v_2 tel que $v_2 = u(v_1) \neq 0$ or, comme $\mathrm{rg}(u) = 1$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(X)$, il suffit de prendre $v_2 = X = (1, 2, 1)$.
- on cherche v_1 tel que $u(v_1) = v_2$ ce qui nous conduit à prendre $v_1 = e_1 = (1, 0, 0)$ d'après la matrice A.
- on cherche v_3 tel que $u(v_3)$ donc $v_3 \in \mathrm{Ker}(u)$ qui est le plan d'équation $x + 3y - 7z = 0$ d'après la matrice A, il suffit de prendre n'importe quel vecteur de ce plan qui n'est pas colinéaire à v_2, par exemple $v_3 = (3, -1, 0)$.

Réciproquement, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est bien une base de $\mathbb{C}^3$ car en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on a $\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible.
Par construction, $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = u(v_3) = 0$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$. Comme A est la matrice de u dans la base canonique, A et T représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes donc elles sont semblables. Plus précisément, la matrice P définie ci-dessus étant la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a

$$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(J_2, J_1)\,;\text{ de plus } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

car on a clairement $e_1 = v_1$, $e_2 = 3v_1 - v_3$ et $e_3 = v_2 - 2e_2 - e_1 = v_2 + 2v_3 - 6v_1 - v_1 = -7v_1 + v_2 + 2v_3$.

$\boxed{\textbf{Q 22.}}$ Si $R^2 = A$, comme $A^2 = 0$, il vient $R^4 = (R^2)^2 = A^2 = 0$ donc R est nilpotente. Puisque $R^2 = A$, on a $\rho^2 = u$. Ainsi, $\rho \circ u = \rho^3 = u \circ \rho$ donc ρ et u commutent. On sait d'après le cours qu'alors

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) et \mathrm{Ker}(u) \text{ sont stables par } \rho \text{ et } \rho \text{ est nilpotent car } R \text{ l'est.}}$$

$\boxed{\textbf{Q 23.}}$ Soit toujours $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = A$, posons $R' = P^{-1}RP$ comme proposé par l'énoncé avec la matrice P de la question 21. Par la formule de changement de base, R' est la matrice de ρ dans la base $\mathcal{B}$.
- Comme $\mathrm{Im}(u)$ est stable par ρ, il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(v_2) = dv_2$.
- Comme $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par ρ, il existe $(e, f) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\rho(v_3) = ev_2 + fv_3$.
- Il existe aussi $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\rho(v_1) = av_1 + bv_2 + cv_3$.

Ainsi, $R' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & e \\ c & 0 & f \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, en développant le déterminant $\chi_{R'}(\lambda) = \det(\lambda I_3 - R')$ par rapport à la première ligne, on obtient directement $\chi_{R'}(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - d)(\lambda - f)$ donc $\chi_{R'} = (X - a)(X - d)(X - f)$. Mais comme R' est nilpotente, car ρ l'est, d'après la question 22, on a $\chi_R = X^3$ d'après la question 14. Par conséquent : $a = d = f = 0$ d'où $R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & e \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors $R'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ce & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $R^2 = A$ équivaut à $R'^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = T$, la condition $R^2 = A$ se traduit par $ce = 1$. On obtient donc $R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1/c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$.

Réciproquement, si R' est de la forme précédente, alors $R'^2 = T$ (par calcul) donc $R^2 = PR'^2P^{-1} = PTP^{-1} = A$. Ainsi, par double implication, pour $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on a l'équivalence :

$$\boxed{R^2 = A \Longleftrightarrow R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1/c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}^*.}$$

Comme $R = PR'P^{-1}$, on a la nouvelle équivalence grâce à la question 21, toujours pour $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\boxed{R^2 = A \Longleftrightarrow R = \begin{pmatrix} b + 3c & 3b + 9c - (1/c) & (2/c) - 7b - 21c \\ 2b - c & 6b - 3c - (2/c) & (4/c) - 14b + 7c \\ b & 3b - (1/c) & (2/c) - 7b \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}^*.}$$

$\boxed{\textbf{Q 24.}}$ Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = J_3$, alors $\boxed{R^4 = (R^2)^2 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{3,1}}$ (matrice élémentaire) donc $\boxed{R^6 = R^4R^2 = J_3E_{3,1} = 0.}$ Comme R est nilpotente, $\chi_R = X^3$ d'après la question 14, donc $R^3 = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On en déduit que $R^4 = R^3R = 0$ ce qui est incompatible avec $R^4 = E_{3,1}$.

$$\boxed{\text{Il n'existe donc aucune solution de l'équation } R^2 = J_3 \text{ dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).}$$