Devoir surveillé $3^{\star}$ - Correction

Problème 1

Partie I : une intégrale à paramètre.

On considère dans cette partie la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(ux)}{1+u^2}du$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $u \geq 0$, on pose $g(x,u) = \dfrac{\text{Arctan}(ux)}{1+u^2}$.
   - Pour tout $u \geq 0$: la fonction $x \longmapsto g(x,u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction $u \longmapsto g(x,u)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   - Hypothèse de domination : on a

   $$\forall (x,u) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[, \quad |g(x,u)| \leq \frac{\pi}{2(1+u^2)} = \varphi(u).$$

   Et φ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ (vu dans le cours).

   D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $F(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(-ux)}{1+u^2}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(ux)}{1+u^2}dt = -F(x)$.

   $$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est impaire.}}$$

   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Comparons $F(x)$ et $F(y)$. Pour tout $u \geq 0$, on a $xu \leq yu$ et comme Arctan est croissante :

   $$\forall u \in [0,+\infty[, \quad \frac{\text{Arctan}(ux)}{1+u^2} \leq \frac{\text{Arctan}(uy)}{1+u^2}.$$

   Par positivité de l'intégrale, on obtient $F(x) \leq F(y)$ et donc $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est croissante.}}$

3. Soit $x > 0$. Pour tout $u \in [0,+\infty[$, on a $\dfrac{\text{Arctan}(ux)}{1+u^2} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, $F(x) \geq 0$.

   Si on a vait $F(x) = 0$, puisque $u \longmapsto \dfrac{\text{Arctan}(ux)}{1+u^2}$ est **positive et continue** sur $[0,+\infty[$, on aurait :

   $$\forall u \in [0,+\infty[, \quad \frac{\text{Arctan}(ux)}{1+u^2} = 0$$

   ce qui est évidemment faux. Donc $F(x) \neq 0$. On a bien démontré :

   $$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \text{ on a } F(x) > 0.}$$

4. On a clairement $\boxed{F(0) = 0}$ et

   $$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(u)}{1+u^2}du = \left[\frac{1}{2}\text{Arctan}^2(u)\right]_{u=0}^{u\to+\infty} = \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty}\text{Arctan}^2(u) - \frac{1}{2}\text{Arctan}^2(0).$$

   Il reste $\boxed{F(1) = \dfrac{\pi^2}{8}.}$

5. On reprend la fonction g définie en question 1.
   - Pour tout $\boxed{u > 0}$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x,u) = \frac{\pi}{2(1+u^2)} = \ell(u)$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction $u \longmapsto g(x,u)$ et la fonction ℓ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   - Hypothèse de domination : on a
   $$\forall (x,u) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \quad |g(x,u)| \leq \frac{\pi}{2(1+u^2)} = \varphi(u).$$
   Et φ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (vu dans le cours).

   D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a :
   $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2(1+u^2)} du.$$
   Après calculs : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi^2}{4}.}$

6. Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $u \geq 0$, on pose encore $g(x,u) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(ux)}{1+u^2}$.
   Alors g admet une dérivée partielle par rapport à x et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall u \geq 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,u) = \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)}.$$
   - Pour tout $u \geq 0$: la fonction $x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,u)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   - Pour tout $x \in]0,+\infty[$:
     - la fonction $u \longmapsto g(x,u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (question 1).
     - la fonction $u \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,u)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   - Hypothèse de domination restreinte : Soit $J = [a,b] \subset]0,+\infty[$. On a
   $$\forall (x,u) \in [a,b]\times[0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,u)\right| = \left|\frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)}\right| \leq \left|\frac{u}{(1+u^2)(1+u^2a^2)}\right| = \psi_J(u).$$
   Et ψ_J est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Montrons qu'elle est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Puisque $a > 0$, on a
   $$|\psi_J(u)| = \left|\frac{u}{(1+u^2)(1+u^2a^2)}\right| \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2u^3}.$$
   Or, $u \longmapsto \dfrac{1}{a^2u^3}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann avec $\alpha = 3 > 1$), donc par comparaison, l'application $u \longmapsto \dfrac{u}{(1+u^2)(1+u^2a^2)}$ l'est aussi. Comme elle est continue sur $[0,1]$, on a finalement
   $$u \longmapsto \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)} \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.$$

   D'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $J \subset]0,+\infty[$, donc
   $$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$
   La formule de Leibniz donne $\boxed{\displaystyle\forall x > 0, \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)} du.}$

7. On suppose que $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Le calcul donne facilement

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{u}{1+u^2} - \frac{x^2u}{1+u^2x^2}\right).$$

8. On suppose que $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Soit $X>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^X \left(\frac{u}{1+u^2} - \frac{x^2u}{1+u^2x^2}\right) du &= \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2u^2)\right]_0^X \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+X^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2X^2) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+X^2}{1+x^2X^2}\right) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \;=\; -\ln(x)\end{aligned}$$

En reportant dans l'expression intégrale de F', on obtient $\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.}$

En déduire que pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a $F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

9. On a vu que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc F' est continue en 1. Or, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1} \underset{x\to1}{\sim} \frac{\ln(x)}{2(x-1)} \underset{x\to1}{\longmapsto} \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\boxed{F'(1) = \frac{1}{2}.}$

10. On a les hypothèses suivantes :
   - F est continue sur $\mathbb{R}$
   - F est dérivable sur $]0,+\infty[$
   - $\lim\limits_{x\to0^+} F'(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{(x-1)} = +\infty$

   Par le théorème de la limite de la dérivée :
   La fonction F n'est pas dérivable en 0^+ et son graphe admet en ce point une demi-tangente verticale.

   La fonction F est impaire donc son graphe admet aussi une demi-tangente verticale en 0^-.

11. Graphe de F :

Partie II : calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

12. La fonction h est continue sur $]0,1[$.
   De plus $\lim\limits_{x\to0} h(x) = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to1} h(x) = \dfrac{1}{2}$ (car $\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} (x-1)$).
   Donc h est prolongeable en une fonction **continue** sur le **segment** $[0,1]$. Par conséquent $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est bornée sur }]0,1[}$

13. La fonction $x \longmapsto h(x)x^{2n}$ est continue sur $]0,1[$, et par la question précédente, il existe une constante $M \geq 0$ telle que :

$$\forall x \in]0,1[, \; |h(x)x^{2n}| \leq Mx^{2n}.$$

   Or $x \longmapsto Mx^{2n}$ est intégrable sur $[0,1]$, a fortiori sur $]0,1[$. Donc, par comparaison, $x \longmapsto h(x)x^{2n}$ l'est aussi d'où l'existence de I_n.

   Puis, par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale, on a :

$$|I_n| \leq \int_0^1 |h(x)x^{2n}|dx \leq M\int_0^1 x^{2n}dx = \frac{M}{2n+1}.$$

   Par le théorème d'encadrement, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.}$

14. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{2k} \ln(x)dx$.

La fonction $x \longmapsto x^{2k} \ln(x)$ est continue sur $]0,1]$ et $|x^{2k} \ln(x)| = \underset{x\to 0}{O}(\ln(x))$.

Or la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, donc par comparaison, $x \longmapsto x^{2k} \ln(x)$ l'est aussi.

L'intégrale a_k est donc bien définie. Pour la calculer, on effectue une intégration par parties.

On pose $u(x) = \ln(x), v(x) = \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et on a :

$$u(x)v(x) = \frac{x^{2k+1}\ln(x)}{2k+1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc effectuer l'intégration par parties directement dans l'intégrale impropre convergente.

$$a_k = \left[\frac{x^{2k+1}\ln(x)}{2k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{2k+1}\int_0^1 x^{2k}dx = 0 - \frac{1}{2k+1}\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1.$$

Finalement, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = -\dfrac{1}{(2k+1)^2}.}$

15. On justifie d'abord l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[$.

En 1 elle est prolongeable par continuité donc intégrable au voisinage de 1.

De plus, $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$. Comme ln est intégrable au voisinage de 0, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ l'est aussi d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$.

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}\ln(x)}{x^2-1}dx = 0$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^{2k}\ln(x)dx = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}x^{2k}\right)\ln(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^{2(n+1)}\ln(x)}{1-x^2}dx = \int_0^1\frac{\ln(x)}{1-x^2}dx - \int_0^1\frac{x^{2(n+1)}\ln(x)}{1-x^2}dx \\ &= -\int_0^1\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx + I_n \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx.}$

16. Si $0 < a < b < 1$, puisque pour tout $x \in [a,b]$, $F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}dx$, on a :

$$\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Et comme F est continue en 0 et en 1, lors que $a \to 0$ et $b \to 1$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = F(1) - F(0) = \frac{\pi^2}{8}.}$$

17. Cela donne en particulier avec les questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1\frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les termes pairs et impairs, on a :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2}.$$

Si on note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, lors que $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient $S = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{S}{4}$ et donc :

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^6}{8}.}$$

Problème 2

à partir de Centrale PSI 2005

Résultats préliminaires

1. On se propose de démontrer le résultat suivant :

$$\ll \text{ deux matrices de } \mathcal{M}_n \text{ semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n \gg.$$

Soit donc A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P un élément de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

(a) Notons R (resp. J) la matrice dont le coefficient générique est la partie réelle (resp. imaginaire) de P. On a alors $P = R + iJ$.

(b) $AP = PB$ devient, avec les notations de la question précédente,

$$AR + iAJ = RB + iJB$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire de chaque coefficient, on a donc $AR = RB$ et $AJ = JA$. En combinant ces relations, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{C},\ A(R + tJ) = AR + tAJ = RB + tJB = (R + tJ)B$$

(c) En développant successivement par rapport à une ligne, on montrerait par récurrence $Q(X) = \det(R + XJ)$ est un polynôme $\mathbb{R}[X]$.
On peut évaluer ce polynôme en $i \in \mathbb{C}$. On a $Q(i) = \det(R + iJ) \neq 0$ car $P = R + iJ$ est inversible.
Et donc $\boxed{Q(X) = \det(R + XJ) \text{ est un polynôme non nul de } \mathbb{R}[X].}$

(d) Q n'est pas le polynôme nul donc il a un nombre fini de racines. Comme $\mathbb{R}$ est infini, on a bien :

$$\boxed{\text{il existe } t_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \det(R + t_0 J) \neq 0.}$$

(e) Soit $Q = R + t_0 J$. La question 1.b montre que $AQ = QB$ et, comme Q est inversible,

$$Q^{-1}AQ = B$$

ce qui montre que $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n.}$

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. C'est une fonction polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$. La condition sur le degré montre qu'en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction admet des limites infinies de signes opposés. Le théorème des valeurs intermédiaires indique alors que P s'annule sur $\mathbb{R}$.
Remarque : alternativement, il existe un nombre impair de racines complexes comptées avec les multiplicités. Comme ces racines sont deux à deux conjuguées, il doit y en avoir une réelle.

(b) Si n est impair et $A \in \mathcal{M}_n$ son polynôme caractéristique est réel de degré impaire et possède une racine réelle. Il y a donc une valeur propre réelle. En contraposant ceci, on voit que n doit être pair quand (P_A) est vérifiée.

Dans toute la suite du problème, on suppose n pair et on note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

I - Première partie

I.A. Dans cette sous-partie, on se place dans $\mathbb{R}^2$ et on désigne par (e_1, e_2) la base canonique, avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

3. On considère la matrice $M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on désigne par u l'endomorphisme associé.

   (a) On a $s(e_1) = e_1$ et $s(e_2) = -e_2$ et donc
   $$Mat(s_1, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Le cours indique alors que
   $$Mat(u \circ s_1, (e_1, e_2)) = M(0,1)Mat(s_1, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Soit s_2 l'endomorphisme tel que $Mat(s_2, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Comme $A^2 = I_2$, s_2 est une symétrie et
   $$u = (u \circ s_1) \circ s_1 = s_2 \circ s_1.$$

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

   (a) Le calcul donne $Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A^2 e_1 = A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$.

   (b) On cherche une base (f_1, f_2) telle que $Af_1 = f_2$ et $Af_2 = -f_1$. On prend donc $f_1 = e_1$ ce qui impose $f_2 = Ae_1$. On pose donc :
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   P est inversible ($\det(P) = 1$) donc (f_1, f_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Et par Q4(a), on a donc $P^{-1}AP = M(0,1)$.
   On a alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) On peut écrire, avec $I.A.3$, que $M(0,1) = A_2 A_1$ avec A_2 et A_1 matrices de symétrie. On a donc
   $$A = S_2 S_1 \quad \text{avec} \quad S_2 = PA_2P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_1 = PA_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Comme $A_2^2 = A_1^2 = I_2$, on a aussi $S_1^2 = S_2^2 = I_2$ et S_1, S_2 sont des matrices de symétrie.

5. Soit α et β des nombres réels tels que $\beta^2 - \alpha^2 = 1$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

   (a) La méthode est la même qu'en 4. On note cette fois $Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Q est inversible car $\beta \neq 0$ (sinon on aurait $\alpha^2 = -1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ce qui est exclus) et $B \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ indique alors que
   $$Q^{-1}BQ = M(0,1)$$

   (b) Avec les notation de la question 3(c), on a donc
   $$B = T_2 T_1 \quad \text{avec} \quad T_2 = PA_2P^{-1} \quad \text{et} \quad T_1 = PA_1P^{-1}$$
   Comme $A_2^2 = A_1^2 = I_2$, on a aussi $T_1^2 = T_2^2 = I_2$ et T_1, T_2 sont des matrices de symétrie.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2$.

(a) Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$$

La condition (P_A) est vérifiée si et seulement si χ_A n'a pas de racines réelles, c'est à dire si son discriminant est < 0. La condition est donc

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$$

(b) Si $A \in \mathcal{M}_2$ vérifie (P_A), alors elle possède deux valeurs propres complexes conjuguées et non réelles z_0 et $\bar{z}_0$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et semblable à une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont z_0 et $\bar{z}_0$.
Comme ces deux matrices sont semblables, elles on meme déterminant, on en déduit que $\det(A) = z_0.\bar{z}_0 = |z_0|^2 > 0$.

On aurait aussi pu utiliser $(a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$.
Cela donne en effet immédiatement $4\det(A) = 4(ad-bc) > (a+d)^2 \geq 0$.

I.B. Dans cette sous-partie, on se donne une matrice B de $\mathcal{M}_p$ vérifiant $B^2 = I_p$. On rappelle que $n = 2p$.
Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n$ définie par blocs sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 2B & -5B \\ B & -2B \end{pmatrix}$$

7. Comme $B^2 = I_p$, B est la matrice dans la base canonique d'une symétrie. Notons E_1 et E_2 les sous-espaces associés à B et $\mathcal{C}$ une base adaptée à $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^p$. La matrice de la symétrie est représentée dans $\mathcal{C}$ par $\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$ où q est la dimension de E_1 et r celle de E_2. Matriciellement, cela signifie qu'en notant Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{C}$ on a

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$$

On convient que cette matrice vaut I_p lorsque $r = 0$ et $q = p$ et qu'elle vaut $-I_p$ lorsque $q = 0$ et $r = p$.

8. Par analogie avec $4(b)$, on introduit la matrice $P = \begin{pmatrix} I_p & 2I_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. On vérifie (calcul par blocs) que P est inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & -2I_p \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Un nouveau calcul par blocs donne

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

9. Notons cette fois $R = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ où Q est la matrice de $B.1$. R est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et un calcul par blocs donne

$$R^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}R = \begin{pmatrix} 0 & -Q^{-1}BQ \\ Q^{-1}BQ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Par transitivité, A est semblable à la matrice du membre de droite (par le biais de la matrice de passage PR).

10. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à B. La question précédente donne l'existence d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_{2p})$ telle que

$$Mat(u, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\mathcal{D} = (e_1, e_{p+1}, e_2, e_{p+2}, \dots, e_q, e_{p+q}, e_{p+q+1}, e_{q+1}, e_{p+q+2}, e_{q+2} \dots, e_{2p}, e_{p-1})$$

C'est une base de $\mathbb{R}^{2p}$ (on n'a fait que réordonner les termes de $\mathcal{C}$) telle que

$$Mat(u, \mathcal{D}) = diag(M(0,1), M(0,1), \dots, M(0,1))$$

A est donc semblable à cette dernière matrice.

II - Deuxième partie

II.A. Dans cette sous-partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n$ telle que $A^2 = -I_n$.

11. (a) λ est valeurr propre de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
 (b) Si λ est valeur propre de A, et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul est tel que $AX = \lambda X$, alors $A^2X = A.AX = A.\lambda X = \lambda^2 X$. Et comme $A^2 = -I_n$, on a aussi $A^2X = -X$.
 Ainsi $-X = \lambda^2 X$ et comme $X \neq 0$, on a bien : $\boxed{\lambda^2 = -1.}$
 (c) $\lambda^2 = -1$ n'a pas de solution réelle, donc A n'a pas de valeur propre réelle. Ainsi (P_A) est réalisée.
12. Soit E une matrice d'opération élémentaire.
 a. Si cette opération est $L_i \leftrightarrow L_j$ alors on passe de E à I_n faisant l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$. E^{-1} correspond donc à cette opération. Ainsi, EAE^{-1} s'obtient à partir de A en changeant les lignes i et j puis les colonnes i et j.
 b. Si cette opération est $L_i \leftarrow \alpha L_i$ alors alors on passe de E à I_n en faisant l'opération $C_i \leftarrow \alpha^{-1} C_i$. E^{-1} correspond donc à cette opération. EAE^{-1} s'obtient à partir de A en multipliant la ligne i par α puis la colonne i par α^{-1}.
 c. Si cette opération est $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ alors alors on passe de E à I_n en faisant l'opération $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$. E^{-1} correspond donc à cette opération. EAE^{-1} s'obtient à partir de A en effectuant successivement $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ puis $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$.
13. (a) Le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ n'étant pas un vecteur propre (puisqu'il n'y a aucun vecteur propre réel d'après Q11), la première colonne de A n'est pas colinéaire à e_1. Ainsi, il existe $i \geq 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.
 (b) Soit $i \geq 2$ un indice tel que $A_{i,1} \neq 0$. Soit E_1 la matrice correspondant à $L_i \leftrightarrow L_2$. La matrice $B = E_1 A E_1^{-1}$ sera telle que $B_{2,1} = A_{i,1} \neq 0$ (on échange les lignes 2 et i ce qui amène le coefficient en place puis on permute C_2 et C_i ce qui ne change pas la colonne 1 et laisse le coefficient en place.
 Soit E_2 la matrice de l'opération $L_2 \leftarrow B_{2,1}^{-1} L_2$ et $C = E_2 B E_2^{-1}$. On a alors $C_{2,1} = 1$ (on multiplie la ligne 2 pour obtenir un coefficient 1 puis on change la colonne 2 ce qui laisse le 1 en place).
 Soit E_3 la matrice de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - C_{1,1} L_2$ et $D = E_3 C E_3^{-1}$. On a alors $D_{1,1} = 0$ et $D_{2,1} = 1$ (on opère sur la ligne 1 pour amener un 0 puis sur la colonne 2 ce qui laisse en place le 0 et le 1).
 On continue avec des matrices d'opérations élémentaires $E_4, \dots, E_{n+1}$ du type $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_2$ pour obtenir

$$A' = PAP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = E_{n+1} E_n \dots E_1$$

 avec $A'_{i,1} = 0$ si $i \neq 2$ et $A'_{2,1} = 0$.

 Remarque : bien plus simplement, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, on a $(e_1, u(e_1))$ qui est libre et peut être complétée en une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, u est représentée par une matrice du type voulu. En passant aux matrices, on obtient la similitude demandée.
 (c) Soit v l'endomorphisme canoniquement associé à A'. On a $v(e_1) = e_2$. Par ailleurs,

$$A'^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}(-I_n)P = -I_n$$

 et donc $v(e_2) = v^2(e_1) = -e_1$. La seconde colonne de A' est donc $(-1, 0, \dots, 0)$.
14. Soit F la matrice d'une opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 + \lambda C_2$ et $B = F^{-1} A' F$. A'' est obtenue en effectuant les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + \lambda C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_3$. Etant donnée la forme des deux premières colonnes de A', la matrice

A'' aura encore des colonnes comme A'. En choisissant $\lambda = A'_{1,3}$, elle vérifiera en outre $B_{1,3} = 0$.
On itère le processus pour obtenir une matrice B semblable à A' et de la forme suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & ? & \dots & ? \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & ? & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Comme $A^2 = -I_n$ et B semblable à A, on a $B^2 = -I_n$. En regardant la première ligne de B^2, ceci impose que $B_{2,i} = 0$ si $i \geq 3$. On a donc une matrice de la forme voulue semblable à A' et donc à A.
Remarque : avec les notations ci-dessus, on a $A''_{1,i} = A'_{1,i}$ pour $i \geq 4$. Il est ainsi facile de voir quelles opérations on doit effectuer. Si on considère la matrice $R = F_3 \dots F_n$ où F_i est la matrice de l'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i + A'_{1,i}C_2$, on a

$$R^{-1}A'R = B$$

La matrice Q de l'énoncé est donc égale à $R^{-1} = F_n^{-1} \dots F_3^{-1}$. Notons que F_i^{-1} est la matrice de l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - A'_{1,i}L_i$. A ce niveau, on obtient

$$ZAZ^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où Z est un produit de matrices correspodant à des opérations élémentaires sur les lignes. On obtient Z en effectuant ces opérations à partir de I_n.

15. Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$$

Or, on sait que cette matrice vaut $-I_n$. On a donc $B^2 = -I_{n-2}$. On est amenés à faire une récurrence sur p (avec $n = 2p$).

- Si $p = 1$ alors $n = 2$ alors on a déjà le résultat voulu avec $A.4$ (B est un bloc de taille nulle).
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $p - 1 \geq 1$. Avec $A3$ et $A4$ on trouve N et B telles que

$$NAN^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B^2 = -I_{n-2}$$

L'hypothèse de récurrence donne P telle que PBP^{-1} est bloc-diagonale avec des blocs de $M(0,1)$. On pose $Q = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. C'est une matrice inversible d'inverse $\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et on a

$$QNAN^{-1}Q^{-1} = \begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & PBP^{-1} \end{pmatrix} = diag(M(0,1), \dots, M(0,1))$$

ce qui clôt la récurrence.

II.B. Dans cette sous-partie, A est une matrice de $\mathcal{M}_n$ vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n = 0$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

16. Par un raisonnement analogue à la question 11, on montrerait que siλ est valeur propre de A alors λ est racine de $(X - \alpha)^2 + \beta^2$. Mais ce polynôme n'a pas de racine réelle (car $\beta > 0$). A n'a donc pas de valeur propre réelle et (P_A) est vérifiée.
17. La matrice $C = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I)$ vérifie $C^2 = -I_n$. On peut trouver M telle MCM^{-1} est bloc-diagonale avec des blocs égaux à $M(0,1)$. On en déduit alors que

$$MAM^{-1} - \alpha I_n = M(\beta C)M^{-1} = \beta MCM^{-1} = diag(M(0,\beta), \dots, M(0,\beta))$$

et donc

$$MAM^{-1} = \alpha I_n + diag(M(0,\beta), \dots, M(0,\beta)) = diag(M(\alpha,\beta), \dots, M(\alpha,\beta))$$

18. Deux matrices semblables ont même déterminant. On sait calculer les déterminants bloc-diagonaux. On obtient

$$\det(A) = \det(M(\alpha, \beta))^p = (\alpha^2 + \beta^2)^p > 0$$

II.C.

19. La linéairité est immédiate. De plus pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $u(X^i) = (-1)^i X^{n-1-i} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par linéarité de u, on a $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ u(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc :

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

20. $\forall i,\ u(X^i) = (-1)^i X^{n-1-i}$. Le plan $Vect(X^i, X^j)$ est stable par u ssi

$$n-1-i, n-1-j \in \{i, j\}$$

n étant pair, on ne peut avoir $n-1-i = i$ ou $n-1-j = j$. La condition cherchée est ainsi

$$i + j = n - 1$$

21. Avec le calcul ci-dessus, on a

$$u \circ u(X^i) = u((-1)^i X^{n-1-i}) = (-1)^i (-1)^{n-1-i} X^{n-1-(n-1-i)} = -X^i$$

et donc $u^2 = -Id$.
La partie $II.A$ indique que la matrice de u dans n'importe quelle base est semblable à $diag(M(0,1), \ldots, M(0,1))$.
Or, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, cette matrice est la matrice A proposée (tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur l'antidiagonale où alternent des -1 et des 1). On a ainsi le résultat demandé.