Devoir surveillé 3 - Correction

Problème 1

Partie I : une intégrale à paramètre.

On considère dans cette partie la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(ux)}{1+u^2} du$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $u \geq 0$, on pose $g(x,u) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(ux)}{1+u^2}$.

   - Pour tout $u \geq 0$: la fonction $x \longmapsto g(x,u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction $u \longmapsto g(x,u)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   - Hypothèse de domination : on a

   $$\forall (x,u) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[, \quad |g(x,u)| \leq \frac{\pi}{2(1+u^2)} = \varphi(u).$$

   Et φ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ (vu dans le cours).

   D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $F(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(-ux)}{1+u^2} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(ux)}{1+u^2} dt = -F(x)$.

   $$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est impaire.}}$$

   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Comparons $F(x)$ et $F(y)$. Pour tout $u \geq 0$, on a $xu \leq yu$ et comme Arctan est croissante :

   $$\forall u \in [0,+\infty[, \quad \frac{\mathrm{Arctan}(ux)}{1+u^2} \leq \frac{\mathrm{Arctan}(uy)}{1+u^2}.$$

   Par positivité de l'intégrale, on obtient $F(x) \leq F(y)$ et donc $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est croissante.}}$

3. Soit $x > 0$. Pour tout $u \in [0,+\infty[$, on a $\dfrac{\mathrm{Arctan}(ux)}{1+u^2} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, $F(x) \geq 0$.

   Si on a vait $F(x) = 0$, puisque $u \longmapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(ux)}{1+u^2}$ est **positive et continue** sur $[0,+\infty[$, on aurait :

   $$\forall u \in [0,+\infty[, \quad \frac{\mathrm{Arctan}(ux)}{1+u^2} = 0$$

   ce qui est évidemment faux. Donc $F(x) \neq 0$. On a bien démontré :

   $$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \text{ on a } F(x) > 0.}$$

4. On a clairement $\boxed{F(0) = 0}$ et

   $F(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{1+u^2} du = \left[\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}^2(u)\right]_{u=0}^{u\to+\infty} = \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty} \mathrm{Arctan}^2(u) - \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}^2(0)$.

   Il reste $\boxed{F(1) = \dfrac{\pi^2}{8}.}$

5. On reprend la fonction g définie en question 1.
   - Pour tout $\boxed{u > 0}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x, u) = \dfrac{\pi}{2(1+u^2)} = \ell(u)$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction $u \longmapsto g(x, u)$ et la fonction ℓ sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.
   - Hypothèse de domination : on a

$$\forall (x, u) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad |g(x, u)| \leq \frac{\pi}{2(1+u^2)} = \varphi(u).$$

   Et φ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ (vu dans le cours).

   D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2(1+u^2)} du.$$

   Après calculs : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{\pi^2}{4}.}$

6. Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $u \geq 0$, on pose encore $g(x, u) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(ux)}{1+u^2}$.
   Alors g admet une dérivée partielle par rapport à x et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall u \geq 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) = \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)}.$$

   - Pour tout $u \geq 0$: la fonction $x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, u)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   - Pour tout $x \in]0, +\infty[$:
     - la fonction $u \longmapsto g(x, u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ (question 1).
     - la fonction $u \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, u)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
   - Hypothèse de domination restreinte : Soit $J = [a, b] \subset]0, +\infty[$. On a

$$\forall (x, u) \in [a, b] \times [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) \right| = \left| \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)} \right| \leq \left| \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2a^2)} \right| = \psi_J(u).$$

   Et ψ_J est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Montrons qu'elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.
   Puisque $a > 0$, on a

$$|\psi_J(u)| = \left| \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2a^2)} \right| \underset{u \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2u^3}.$$

   Or, $u \longmapsto \dfrac{1}{a^2u^3}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann avec $\alpha = 3 > 1$), donc par comparaison, l'application $u \longmapsto \dfrac{u}{(1+u^2)(1+u^2a^2)}$ l'est aussi. Comme elle est continue sur $[0, 1]$, on a finalement

$$u \longmapsto \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.$$

   D'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $J \subset]0, +\infty[$, donc

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

   La formule de Leibniz donne $\boxed{\forall x > 0, \qquad F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)} du.}$

7. On suppose que $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Le calcul donne facilement

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \frac{u}{(1+u^2)(1+u^2x^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{u}{1+u^2} - \frac{x^2u}{1+u^2x^2}\right).$$

8. On suppose que $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Soit $X > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^X \left(\frac{u}{1+u^2} - \frac{x^2u}{1+u^2x^2}\right) du &= \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2u^2)\right]_0^X \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+X^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2X^2) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+X^2}{1+x^2X^2}\right) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \;=\; -\ln(x)\end{aligned}$$

En reportant dans l'expression intégrale de F', on obtient $\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.}$

En déduire que pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a $F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

9. On a vu que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc F' est continue en 1. Or, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a

$$F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1} \underset{x\to1}{\sim} \frac{\ln(x)}{2(x-1)} \underset{x\to1}{\longmapsto} \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $\boxed{F'(1) = \frac{1}{2}.}$

10. On a les hypothèses suivantes :
   - F est continue sur $\mathbb{R}$
   - F est dérivable sur $]0,+\infty[$
   - $\lim\limits_{x\to0^+} F'(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{(x-1)} = +\infty$

   Par le théorème de la limite de la dérivée :
   La fonction F n'est pas dérivable en 0^+ et son graphe admet en ce point une demi-tangente verticale.

   La fonction F est impaire donc son graphe admet aussi une demi-tangente verticale en 0^-.

11. Graphe de F :

Partie II : calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

12. La fonction h est continue sur $]0,1[$.
   De plus $\lim\limits_{x\to0} h(x) = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to1} h(x) = \dfrac{1}{2}$ (car $\ln(x) \underset{x\to1}{\sim} (x-1)$).
   Donc h est prolongeable en une fonction **continue** sur le **segment** $[0,1]$. Par conséquent $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est bornée sur }]0,1[}$

13. La fonction $x \longmapsto h(x)x^{2n}$ est continue sur $]0,1[$, et par la question précédente, il existe une constante $M \geq 0$ telle que :

$$\forall x \in]0,1[, \; |h(x)x^{2n}| \leq Mx^{2n}.$$

   Or $x \longmapsto Mx^{2n}$ est intégrable sur $[0,1]$, a fortiori sur $]0,1[$. Donc, par comparaison, $x \longmapsto h(x)x^{2n}$ l'est aussi d'où l'existence de I_n.
   Puis, par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale, on a :

$$|I_n| \leq \int_0^1 |h(x)x^{2n}|dx \leq M\int_0^1 x^{2n}dx = \frac{M}{2n+1}.$$

   Par le théorème d'encadrement, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.}$

14. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \int_0^1 x^{2k} \ln(x) dx$.
La fonction $x \longmapsto x^{2k} \ln(x)$ est continue sur $]0, 1]$ et $|x^{2k} \ln(x)| = \underset{x \to 0}{O}(\ln(x))$.
Or la fonction ln est intégrable sur $]0, 1]$, donc par comparaison, $x \longmapsto x^{2k} \ln(x)$ l'est aussi.
L'intégrale a_k est donc bien définie. Pour la calculer, on effectue une intégration par parties.
On pose $u(x) = \ln(x), v(x) = \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$ et on a :

$$u(x)v(x) = \frac{x^{2k+1} \ln(x)}{2k+1} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc effectuer l'intégration par parties directement dans l'intégrale impropre convergente.

$$a_k = \left[\frac{x^{2k+1} \ln(x)}{2k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{2k+1} \int_0^1 x^{2k} dx = 0 - \frac{1}{2k+1} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1.$$

Finalement, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = -\dfrac{1}{(2k+1)^2}.}$

15. On justifie d'abord l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ est continue sur $]0, 1[$.
En 1 elle est prolongeable par continuité donc intégrable au voisinage de 1.
De plus, $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1} \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$. Comme ln est intégrable au voisinage de 0, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ l'est aussi d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.

On sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{x^2-1} dx = 0$
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^{2k} \ln(x) dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\right) \ln(x) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1 - x^{2(n+1)} \ln(x)}{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)} \ln(x)}{1-x^2} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx + I_n
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx.}$

16. Si $0 < a < b < 1$, puisque pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} dx$, on a :

$$\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Et comme F est continue en 0 et en 1, lors que $a \to 0$ et $b \to 1$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = F(1) - F(0) = \frac{\pi^2}{8}.}$$

17. Cela donne en particulier avec les questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les termes pairs et impairs, on a :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2}.$$

Si on note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, lors que $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient $S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$ et donc :

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^6}{8}.}$$

Problème 2

Partie I : une caractérisation

1. On suppose que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
   (a) Puisque E est de dimension finie, par le théorème du rang :

   $$\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \dim(E).$$

   Et puique $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$, on obtient $n = 2\mathrm{rg}(f)$ est un entier pair.
   On a donc aussi $\mathrm{rg}(f) = \frac{n}{2}$.

   (b) Soit $x \in E$. On a donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent, $f(f(x)) = 0$.
   On a démontré que pour tout $x \in E$, $f \circ f(x) = 0$. C'est la definition de

   $$\boxed{f \circ f = 0 \text{ (endomophisme nul).}}$$

2. On suppose que $f \circ f = 0$ et que $n = 2\mathrm{rg}(f)$.
   - Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
     Puisque $f \circ f = 0$, on a donc $f(y) = f \circ f(x) = 0$ et pas suite $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
     On a donc démontré $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   - Par le théorème du rang, on a $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \dim(E) = 2\mathrm{rg}(f)$.
     Et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$.

   Conclusion : les deux points précédents donnent bein $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f).}$

3. **Application :** Par un produit par bloc, on a donc $B^2 = \begin{pmatrix} A^2 - I_n & 0_n \\ 0_n & A^2 - I_n \end{pmatrix}$.
   Les résultats précédents démontrés pour les endomorphismes s'adaptent pour les matrices.
   - Supposons que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(B)$. Par la question 1, on a $B^2 = 0_{2n}$. On a donc $A^2 = I_n$ ce qui signifie que que A est la matrice d'une symétrie.
   - Supposons que A est la matrice d'une symétrie. On a donc $A^2 = I_n$ et $B^2 = 0_{2n}$.
     On veut utiliser la question 2. Il reste donc à montrer que $\mathrm{rg}(B) = \frac{2n}{2} = n$.
     On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -A & I_n \end{pmatrix}$. Un produit par blocs donne :

     $$BC = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ -I_n & A \end{pmatrix}.$$

     Or, la matrice C est inversible (car de rang $2n$) donc $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(BC) = n$, ce qu'on voulait.
     On a donc bien par la question 2, $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(B)$.

   On a bien démontré $\boxed{\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(B) \text{ si et seulement si } A \text{ est la matrice d'une symétrie.}}$

Partie II : cas où $n = 2$

4. (a) Si on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, par définition on a donc :
   - $f(e_1) = \alpha e_1 + \dfrac{\alpha}{\beta} e_2 = \dfrac{\alpha}{\beta}(\beta e_1 + e_2) \neq 0$ car α, β sont non nuls.
   - $f(e_2) = -\alpha\beta e_1 - \alpha e_2 = -\alpha(\beta e_1 + e_2)$ colinéaire à $f(e_1)$.

   Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\{f(e_1), f(e_2)\} = 1$.
   De plus, par un calcul rapide, on trouve $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)^2 = 0$ et donc $f \circ f = 0$.

   Par la question 2, on a donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f).}$

   (b) On calcule le polynôme caractéristique de f (qui est aussi celui de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$).

$$\chi_(f)(X) = (-1)^2 \det(f - XId) = \begin{vmatrix} \alpha - X & -\alpha\beta \\ \alpha/\beta & -\alpha - X \end{vmatrix} = (\alpha - X)(-\alpha - X) + \alpha^2 = X^2.$$

   Les valeurs propres de l'endomorphisme f sont les racines de χ_f et donc $\mathrm{Sp}(f) = \{0\} = \mathrm{Sp}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))$.
   Si f était diagonalisable, il existerait un base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, avec des coefficiants diagonaux nuls et donc f serait l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas puisque $\mathrm{rg}(f) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

5. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$. On note M sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$.
   Par la question 1, on a $\mathrm{rg}(f) = 1$. Donc les colonnes de M sont liées : elles sont toutes deux dans $\mathrm{Vect}\{C\}$ pour un certain $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul.

   Ainsi, il existe λ et μ réels, tels que $M = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix}$.

   Toujours par la question 1, on a $M^2 = 0$ ce qui donne après calculs $(\lambda a + \mu b) \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix} = (\lambda a + \mu b)M = 0$.

   Comme $M \neq 0$ (elle est de rang 1), on a donc $\lambda a + \mu b = 0$.
   - Si on $a = 0$: alors on aurait $b \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix}$. Mais alors, dans ce cas $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et donc :

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Im}(M) \iff \mu b = 0 \iff \mu = 0$$

   Dans ce cas, M est bien de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec α non nul.

   - Si on $a \neq 0$: alors $\lambda = -\dfrac{b}{a}\mu$. On reporte dans M.

   On obtient $M = \begin{pmatrix} -b\mu & \mu a \\ -\frac{b^2}{a}\mu & \mu b \end{pmatrix}$. On pose alors $\alpha = -b\mu$. On obtient $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{a}{b}\alpha \\ \frac{b}{a}\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$.

   Il reste à poser $\beta = \dfrac{a}{b}$, et on obtient bien la forme attendue : $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha\beta \\ \alpha/\beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

Partie III : cas où E est de dimension n.

6. Par la partie I, on a $p = n/2$.
7. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. On se donne une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F.

   (a) **Méthode 1 :** par la preuve du théorème du rang, f induit un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}(f)$.
   Et donc l'image d'une base de F par f est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Ce qu'on voulait !

   Méthode 2 : Montrons que $\mathcal{F} = (f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre.
   Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_p f(e_p) = 0$.
   Par linéarité de f, on a donc $f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p) = 0$ et donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$ est un vecteur de E qui est à la fois dans F et dans $\mathrm{Ker}(f)$. Comme ces espaces sont en somme directe, leur intersection est nulle :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0$$

   Et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre (base de F), on a bien $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Ainsi, $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est libre.
$\mathcal{F}$ est une famille libre de $\text{Im}(f)$ et $\text{card}(\mathcal{F}) = p = \dim(\text{Im}(f))$ donc $\boxed{(f(e_1), \ldots, f(e_p)) \text{ est une base de } \text{Im}(f).}$

(b) Par la partie I, on a $f \circ f$ et donc, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $f(e_{p+i}) = f(f(e_i)) = 0$.

(c) Par les questions précédentes, $(e_{p+1}, \ldots, e_{2p}) = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une base de $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.
De plus $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F. Comme $E = F \oplus \text{Ker}(f)$, on a bien :

$$\boxed{\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{2p}) \text{ est une base de } E.}$$

Et par construction (matrice par blocs) : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Partie IV : un exemple en dimension infinie

8. Il suffit de montrer la linéarité. Elle est immédiate car pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q)(X) &= X\Big((\lambda P + \mu Q)((X) + (\lambda P + \mu Q)((-X)\Big) \\ &= \lambda X\Big(P(X) + P(-X)\Big) + \mu\Big(Q(X) + Q(-X)\Big) \;=\; \Big(\lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)\Big)(X) \end{aligned}$$

9. P est dans $\text{Ker}(\varphi)$ si et seulement si $P(X) + P(-X) = 0$ autrement dit si et seulement si P est un polynôme impair.
Montrons que $\text{Im}(\varphi) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-X) = -P(X)\}$.
Si $P \in \text{Im}(\varphi)$ alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ telque $P = \varphi(Q)(X) = X\Big(Q(X) + Q(-X)\Big)$ donc P est un polynôme impair (raisonnement à préciser).
Réciproquement, si P est un polynôme impair, alors il s'écrit : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} X^{2k+1}$.
Et donc $P(X) = X \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} X^{2k} = \frac{X}{2} \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(X^{2k} + (-X)^{2k}) = \varphi(Q)(X)$ avec $Q(X) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} X^{2k}$. Donc $P \in \text{Im}(\varphi)$.
Finalement, on a bien démontré que $\boxed{\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(-X) = -P(X)\} \text{ (polynômes impairs)}}$

Problème 3

Partie I : cas où $n = 2$

1. Un calcul rapide donne : $\chi_{M_2}(X) = (1 - X)^2 - a_1 b_1 = (X - 1)^2 + 1$.
2. Si a_1 et b_1 sont réels : Le polynôme caractéristique de M_2 n'admet aucune racine réelle donc il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc M_2 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Si a_1 et b_1 sont complexes : $\chi_{M_2}(X) = (X - 1)^2 + (X - 1 + i)(X - 1 - i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc M_2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
4. On a facilement : $\det(M_2) = 1 - a_1 b_1 = 2$.

Partie II : calcul du déterminant de M_n.

5. On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
   (a) On a immédiatement $F_2 = F_0 + F_1 = 2$.
   (b) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 1 = 0$, dont les racines sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = a\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

En écrivant que $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$, on obtient que (a, b) est la solution d'un système 2x2 et après calculs, on trouve :

$$a = \frac{1+1/\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad b = \frac{1-1/\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.}$

6. On a $d_1 = 1$ et $d_2 = 2$.
   En développant suivant la première colonne, ou bien par la règle de Sarrus : $d_3 = 1 - a_1b_1 - a_2b_2 = 3$.
7. Il s'agit d'un déterminant tridiagonal. Le calcul est similaire à celui du cours **(E1)**. En développant suivant la dernière ligne, puis suivant la dernière colonne du deuxième déterminant, on trouve :

$$\forall n \geq 3,\ d_n = d_{n-1} - a_nb_nd_{n-2} = d_{n-1} + d_{n-2}.$$

   Et donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_{n+2} = d_{n+1} + d_n.}$
8. C'est la même relation de récurrence que celle définissant $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Comme $F_1 = d_1 = 1$ et $F_2 = d_2 = 1$, on montrerait par une récurrence double que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.}$$

Partie III : réduction de la matrice M_3.

9. On a $M_3 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$. Le colonnes C_1 et C_3 sont colinéaires, et comme a_1 et b_1 sont non nuls, C_1 et C_2 sont indépendantes. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(M_3 - I_3) = 2.}$
   M_3 est une matrice 3x3 et $\mathrm{rg}(M_3 - I_3) = 2 < 3$. Par cararactérisation, $\alpha = 1$ est valeur propre de M_3.
10. Par définition, $\chi_{M_3}(X) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1-X & b_1 & 0 \\ a_1 & 1-X & b_2 \\ 0 & a_2 & 1-1 \end{vmatrix}$. Puisque $a_2 \neq 0$, on effectue $L_1 \longleftarrow L_1 - \dfrac{b_1}{a_1}L_3$. On obtient :

$$\chi_{M_3}(X) = -\begin{vmatrix} 1-X & 0 & -\frac{b_1}{a_1}(1-X) \\ a_1 & 1-X & b_2 \\ 0 & a_2 & 1-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{b_1}{a_1} \\ a_1 & 1-X & b_2 \\ 0 & a_2 & 1-1 \end{vmatrix}.$$

   En effectuant $C_3 \longleftarrow C_3 - C_1$ puis en développant selon L_1, on obtient bien :

$$\boxed{\chi_{M_3}(X) = (X-1)\Big((X-1)^2 - a_2\Big(b_2 + \tfrac{a_1b_1}{a_2}\Big)\Big) = (X-1)\Big((X-1)^2 + 2\Big).}$$

11. Les valeur propres de M_3 sont exactement les racines de $\chi_{M_3}(X) = (X-1)(X-1-i\sqrt{2})(X-1+i\sqrt{2})$.
   Et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(M_3) = \{1, 1+i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2}\}.}$
   Le polynôme $\chi_{M_3}(X)$ est scindé à racines simples (sur $\mathbb{C}$) donc $\boxed{M_3 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).}$
   On peut aussi préciser que tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
12. On remarque que $\begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 1 de M_3. Comme $E_1(M_3)$ est de dimension 1, on a :

$$\boxed{E_1(M_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix}\right\}.}$$

13. On obtient facilement $M_3 \times \begin{pmatrix} b_1 \\ i\sqrt{2} \\ a_2 \end{pmatrix} = (1+i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} b_1 \\ i\sqrt{2} \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $M_3 \times \begin{pmatrix} b_1 \\ -i\sqrt{2} \\ a_2 \end{pmatrix} = (1-i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} b_1 \\ -i\sqrt{2} \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} b_1 \\ i\sqrt{2} \\ a_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $1+i\sqrt{2}$ de M_3, et $\begin{pmatrix} b_1 \\ -i\sqrt{2} \\ a_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $1-i\sqrt{2}$ de M_3. Les sous-espaces propres de M_3 sont tous de dimension 1 donc :

$$\boxed{E_{1+i\sqrt{2}}(M_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ i\sqrt{2} \\ a_2 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } E_{1-i\sqrt{2}}(M_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ -i\sqrt{2} \\ a_2 \end{pmatrix}\right\}.}$$

14. On pose $P = \begin{pmatrix} b_2 & b_1 & b_1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ -a_1 & a_2 & a_2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C})$.

Les formules de changement de base donnent : $\boxed{D = P^{-1}M_3P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+i\sqrt{2} \end{pmatrix}}$.