Devoir surveillé $2^\star$ - Correction

Exercice 1

1. Pour $t \in [1, +\infty[$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

   (a) La fonction $t \longmapsto t^\alpha$ est dérivable sur $[1, +\infty[$, sin l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composée puis quotient φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et par opérations, on a :
$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi'(t) = \frac{\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha) - \sin(t^\alpha)}{t^2} = -\frac{\sin(t^\alpha)}{t^2} + \alpha \frac{\cos(t^\alpha)}{t^{2-\alpha}}.$$

   (b) Par inégalité triangulaire, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :
$$|\varphi'(t)| = \frac{|\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha) - \sin(t^\alpha)|}{t^2} \leq \frac{|\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha)| + |\sin(t^\alpha)|}{t^2} \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2},$$
   car $\alpha > 0$ et $|\sin(t)| \leq 1, |\cos(t) \leq 1$.

   (c) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, n+1]$ et :
$$\forall t \in [n, n+1], \ |\varphi'(t)| \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{\alpha}{t^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}.$$
   Et donc, par l'inégalité des accroissements finis, pour tous $a, b \in [n, n+1]$, ona :
$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right) |b - a|.$$
   En particulier, avec $a = n$ et $b = t \in [n, n+1]$, on obtient :
$$\boxed{\forall t \in [n, n+1], \quad |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right) |t - n|.}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t) dt$.

   On a donc $u_n - a_n = u_n - \varphi(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} (\varphi(t) - \varphi(n)) dt$. Par inégalité triangulaire, puis par positivité de l'intégrale avec la majoration précédente valable sur l'intervalle d'intégration $[n, n+1]$, on obtient :
$$|u_n - a_n| \leq \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n))| dt \leq \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right) \underbrace{|t - n|}_{\leq 1} dt \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}.$$

3. C'est un **(E1)** du moins une partie.

   La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

   On pose $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos(t)$.

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et comme v est bornée, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$.

   Par intégration par parties dans une intégrale impropre, on a donc l'équivalence :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{-\cos(t)}{t^2} dt \text{ converge} .$$
   Or, pour tout $t \geq 1$, on a $\left|\dfrac{-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$. Et par Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge , donc par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-\cos(t)}{t^2} dt$ converge (absolument). Finalement, $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge.}}$

4. On veut poser dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, $t = x^\alpha = \varphi(x)$.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante (car $\alpha > 0$) sur $[1, +\infty[$ et $\varphi([1, +\infty[) = [1, +\infty[$.
Par changement de variable dans une intégrale impropre convergente, on obtient que l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\alpha} \varphi'(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\alpha} \alpha x^{\alpha-1} dx = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x} dx.$$

On a aussi l'égalité (mais ça n'est pas demandé) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x} dx.$$

5. Par définition d'intégrale convergente, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$.
Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \varphi(t) dt = \int_1^{n+1} \varphi(t) dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t} dt$.
Par définition de série convergente, on a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$

6. Par la question 2, on a $|u_n - a_n| \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.
Or puisque $2 > 1$ et $2 - \alpha > 1$, les séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ convergent, et leur somme aussi.
Par les théorèmes de comparaison, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (u_n - a_n) \text{ converge absolument.}}$$

7. Puisque la convergence absolue entraîne la convergence, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (u_n - a_n)$ converge, comme $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge, leur différence aussi et finalement :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \text{ converge.}}$$

8. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |a_n|$ est convergente.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sin(n^\alpha)| \leq 1$ et donc $\sin^2(n^\alpha) \leq |\sin(n^\alpha)|$. On a donc :

   $$0 \leq \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leq |a_n|.$$

   Or par hypothèse, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |a_n|$ est convergente, donc par comparaison :

   $$\boxed{\text{La série } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \text{ est convergente.}}$$

   (b) C'est le même raisonnement que pour la question 3. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
   On pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et comme v est bornée, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0$.
   Par intégration par parties dans une intégrale impropre, on a donc l'équivalence :

   $$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dt \text{ converge .}$$

Or, pour tout $x \geq 1$, on a $\left|\dfrac{\sin(2x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$. Et comme précédemment, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2} dx$ converge (absolument). Finalement,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx \text{ converge.}}$$

(c) On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

On a $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et donc :

$$\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}}_{\text{converge}} = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}}_{\text{diverge}} - 2 \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}}_{\text{converge}}$$

Contradiction !

Et donc l'hypothèse faite en début de question est fausse : $\boxed{\sum a_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

Exercice 2

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt$.

1. (a) Soit $x > 0$. L'application $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, x]$ donc l'intégrale $\varphi(x)$ est impropre en 0.

   Or, on a $\left|\dfrac{\ln(t)}{1+t^2}\right| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|$ et ln est intégrable sur $]0, 1]$ donc, par comparaison, $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ l'est aussi. Et par conséquent,

$$\boxed{\varphi \text{ est définie sur }]0, +\infty[.}$$

   (b) Pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \varphi(1) + \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

   Or, $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ en est la primitive qui s'annule en 1. Et donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ \varphi'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.}$$

   (c) Pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt - \int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$. Or, par définition de la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ ou encore :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0.}$$

   On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

   (d) Il s'agit de vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ est convergente. C'est un **(E1)**.

   Le problème en 0 a déjà été étudié.

$\boxed{\text{En } +\infty :}$ $\left|\dfrac{\ln(t)}{1+t^2}\right| \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) donc, par comparaison, $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ l'est aussi.

Par définition de cette convergence, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

Montrons que I est nulle. On effectue le changement de variable $t = \phi(u) = \dfrac{1}{u}$. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]0,+\infty[$, on a donc :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\frac{-du}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}du = -I.$$

Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = I = 0.}$

2.

$$\forall x > 0, \quad g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{1+u} = \frac{(1-\sqrt{u})^2}{\sqrt{u}(1+u)} \geq 0.$$

Ainsi, g est croissante et puisque $g(0) = 0$, elle est positive sur $[0,+\infty[$. On a donc

$$\boxed{\forall u \geq 0, \quad \ln(1+u) \leq \sqrt{u}.}$$

Soit $x \geq 0$. D'après la question précédente, on a $\forall t \geq 0, \quad \left|\dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{\sqrt{xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{t^{3/2}}$.

Or, $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) donc, par comparaison, $t \longmapsto \dfrac{\sqrt{xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ également. Par conséquent,

(a) $\boxed{f \text{ est définie sur } [0,+\infty[.}$

(b) On pose pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, $h(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$.

- Pour tout $t \geq 0$, l'application $x \longmapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$
- Pour tout $x \geq 0$, l'application $t \longmapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et on a vu qu'elle est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- Hypothèse de domination restreinte : Soit $A > 0$. Pour tout $(x,t) \in [0,A] \times [0,+\infty[$, on a

$$|h(x,t)| = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \leq \frac{\ln(1+At)}{1+t^2} = \phi_A(t).$$

Et ϕ_A est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion :
Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, f est continue sur tout $[0,A] \subset [0,+\infty[$ et donc :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

3. (a) On reprend la fonction h définie précédemment. Elle admet une dérivée partielle par rapport à la variable x donnée par :

$$\forall (x,t) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[, \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}.$$

On a les assertions suivantes.

- Pour tout $t \geq 0$, l'application $x \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$

• Pour tout $x > 0$, les applications $x \longmapsto h(x,t)$ et $x \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$ et on a vu que la première est intégrable sur $[0,+\infty[$. On a de plus :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{x(1+t^2)}\frac{xt}{1+xt} \leq \frac{1}{x(1+t^2)}$$

Or $t \longmapsto \dfrac{1}{x(1+t^2)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc, par comparaison, $t \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ l'est aussi.

• Hypothèse de domination restreinte : Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x,t) \in [\varepsilon,+\infty[\times[0,+\infty[$ on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{x(1+t^2)}\frac{xt}{1+xt} \leq \frac{1}{x(1+t^2)} \leq \frac{1}{\varepsilon(1+t^2)} = \psi_\varepsilon(t)$$

et ψ_ε est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.

Conclusion : Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[\varepsilon,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

En outre, la formule de Leibniz donne $\forall x > 0,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}dt.$

(b) Le calcul donne facilement :

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \forall t \geq 0, \quad \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{-x}{1+xt} + \frac{t+x}{1+t^2}\right).}$$

(c) On a donc pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{t+x}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt}\right)dt.$
Soit $X > 0$, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
\int_0^X \left(\frac{t+x}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt}\right)dt &= \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + x\mathrm{Arctan}(t) - \ln(1+xt)\right]_0^X \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+X^2) + x\mathrm{Arctan}(X) - \ln(1+xX) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+X^2}{(1+xX)^2}\right) + x\mathrm{Arctan}(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{x\pi}{2}
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{x\pi}{2} - \ln(x)\right).}$

4. On a démontré que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ et donc, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{\pi}{4}\ln(1+x^2) - \varphi(x) + C.$$

On a démontré que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ et puisque f est continue en 0 (question 2.(c)), on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. En passant à la limite dans l'égalité précédente, on trouve $C = 0$ et donc

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{\pi}{4}\ln(1+x^2) - \varphi(x).}$$

5. On a $f(x) = \dfrac{\pi}{4}\ln(1+x^2) - \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x) + \dfrac{\pi}{4}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) - \varphi(x).$
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - \varphi(x)\right) = 0$, on a $\left(\dfrac{\pi}{4}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\right) = \underset{x\to+\infty}{o}(\ln(x))$, et donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\ln(x).}$$

6. La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x\pi}{2} - \ln(x)\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f n'est pas dérivable en 0 et son graphe admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

Exercice 3

à partir de Centrale MP maths 1 2024

I - Égalité de la moyenne

Q 0. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, elle y admet des primitives. Soit F l'une d'elles.
La fonction F est dérivable sur $[a,b]$ (a fortiori continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$) donc par l'égalité des accroissments finis :

$$\exists c \in]a,b[, \quad F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}.$$

Or $F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $F'(c) = f(c)$ donc, on a bien démontré :

$$\boxed{\exists c \in]a,b[,\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.}$$

II - Inégalité intégrale de Jensen

Q 1. On utilise le théorème sur les sommes de Riemann. Puisque f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, on a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

De même, puisque φ est continue sur J et puisque f est à valeurs dans J, $\varphi \circ f$ est bien définie et continue sur $[a,b]$, d'où :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\circ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Puisque φ est convexe sur J, on a pour tous réels $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ de J :

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(x_k).$$

En particulier, en posant $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad x_k = f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$:

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Par la question **Q 0**, il existe $c \in]a,b[$, tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et donc $\alpha = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(c) \in J$.

Pour montrer que $\alpha \in J$, on pouvait aussi faire le raisonnement suivant.
L'image continue d'un segment est un segment. Comme f est continue sur $[a,b]$, il existe c,d tels que $f([a,b]) = [c,d] \subset J$.
Pour tout $t \in [a,b],\ c \leq f(t) \leq d$ et par positivité de l'intégrale,

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq d(b-a).$$

En divisant par $b-a>0$, on obtient $\alpha \in [c,d] \subset J$.

On reprend le raisonnement. Par continuité de φ en α, on peut passer à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente.

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt\right) &= \varphi\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right) &\underset{\varphi \text{ est continue en } \alpha}{=} &\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)\\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) &= &\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\ dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\ dt.}$$

III - Une égalité intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue, strictement positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $x>0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\ dt \ \text{ et } h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$$

Q 2. f est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$.
Donc $\exists M>0,\ \forall t\in[0,1],\ 0\leqslant f(t)\leqslant M$. Pour $x\in[0,1]$:

$$0 \leqslant g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\ dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x tM\ dt = \frac{M}{x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{M}{x}\ \frac{x^2}{2} = \frac{M}{2}x \underset{x\to0}{\to} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x\to0} g(x) = 0.}$

On pouvait aussi, puisque $t \longmapsto tf(t)$ est continue, utiliser le théorème fondamental de l'analyse et reconnaître un taux d'accroissement (cf exercice de TD).

Q 3.

Q 3(a).

Soit $t\in[0,+\infty[$ fixé. Pour x assez grand, on a $x \geq t$ et donc $t\in[0,x]$. Et donc pour tout $x\geq t$, on a $h(x,t) = \dfrac{1}{x}tf(t)$.
Et lorsque $x\to+\infty$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall t\in[0,+\infty[,\ \lim_{x\to+\infty} h(x,t) = 0.}$$

On aurait aussi pu remarquer, en distinguant les cas $t\leq x$ et $t>x$, que pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$|h(x,t| \leq \frac{1}{x}|tf(t)|$$

Et utiliser le théorème d'encadrement.

Q 3(b). On applique **le théorème de convergence dominée** à paramètre continu.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est **continue par morceaux** sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Par la question 3(a), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x,t) = \ell(t) = 0$.
La fonction $\ell : t \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) **Hypothèse de domination.** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{cases} \text{si } t \leq x \text{ alors } |h(x,t)| = \dfrac{1}{x}|tf(t)| \leq |f(t)| \\ \\ \text{si } t > x \text{ alors } |h(x,t)| = 0 \leq |f(t)| \end{cases}$$

Puisque f est positive, on en déduit l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \boxed{0 \leqslant |h(x,t)| \leqslant f(t).}$$

La fonction f est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par **le théorème de convergence dominée** : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)\ dt = \int_0^{+\infty} 0\ dt = 0$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$

Q 4. Soient $0 < a < b$.

Par hypothèse, $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\ dt$ est son unique primitive s'annulant en 0.

On effectue une intégration par parties, les fonctions F et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. En remarquant que $g(x) = \dfrac{1}{x}F(x)$, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b \frac{1}{x} \times (xf(x))\ dx = \left[\frac{1}{x}F(x)\right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{1}{x^2}\right) F(x)\ dx = \Big[g(x)\Big]_a^b + \int_a^b h(x)\ dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b h(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - g(b) + g(a).$$

Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale partielle $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ admet une limite finie lorsque $a \to 0$ et $b \to +\infty$.

D'après la question **Q2.**, $\lim\limits_{a\to 0} g(a) = 0$.

D'après la question **Q3.**, $\lim\limits_{b\to+\infty} g(b) = 0$.

Donc l'intégrale partielle $\displaystyle\int_a^b h(x)\ dx$ admet une limite finie lorsque $a \to 0$ et $b \to +\infty$.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\ dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} h(x)\ dx.}$

Remarque : on aurait pu utiliser le théorème du cours et faire directement l'intégration par parties dans l'intégrale impropre.