Devoir surveillé 2 - Correction

Exercice 1

E3A PSI 2016 maths 1

à partir d'un corrigé de C. Devulder

1. Questions préliminaires.

   (a) Soit $x \in]-1,1[$. Par croissance comparée, on a $|nx^{n-1}| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison (les termes sont positifs) :

$$\boxed{\text{Pour } x \in]-1,1[, \text{ la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nx^{n-1} \text{ est (absolument) convergente.}}$$

   (b) Pour $x \in]-1,1[$, puisque $x \neq 1$, on a :

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

   On peut dériver cette égalité sur $]-1,1[$.

$$s_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

   Puisque $|x|<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ et aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)x^n = 0$. Et donc, en passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.}$$

   (c) Pour $x \in]-1,1[$, on pose $c_n = d_n = x^n$ et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^n = (n+1)x^n.$$

   Les séries de terme géneral c_n et d_n convergent absolument, donc leur produit de Cauchy $\sum w_n$ également et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2.$$

   Or $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$. On retrouve donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.}$$

2. (a) La série proposée est géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$ et donc convergente. On en déduit aussi que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.}$$

(b) On a

$$b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

On utilise les questions préliminaires avec $x = \dfrac{1}{2} \in]-1,1[$. On trouve que $\sum b_n$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{4}{2} = 2.$$

3. (a) C'est un **(E1)**. La fonction $f \,:\, x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ étant décroissante sur $[2,+\infty[$, on peut effectuer une comparaion série-intégrale.

Soit $k \geq 2$ un entier. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \dfrac{1}{t\ln(t)} \leq \dfrac{1}{k\ln(k)}$.

Par positivité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)}\mathrm{d}t.$$

Ou encore : $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.

Pour $n \geq 2$ entier, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. En ajoutant les encadrements précédents pour $k = 1$ à n, on obtient :

$$S_{n+1} - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq S_n.$$

En particulier, l'inégalité de droite donne $\Big[\ln|\ln(t)|\Big]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n$.

Par minoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et donc $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge.}}$

(b) $na_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ si $n \geq 2$. On a donc directement $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0.}$

(c) On a $b_n = \dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$. On écrit que

$$\begin{aligned}
(n+1)\ln(n+1) &= (n+1)\left(\ln(n) + \ln(1+1/n)\right) \\
&= (n+1)\ln(n) + (n+1)\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= n\ln(n) + \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))
\end{aligned}$$

Ainsi, $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et donc $b_n \sim \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1}$.

Or d'après la question 3(a), la série $\sum a_n$ est divergente (donc $\sum a_{n+1}$ aussi).

Et comme il s'agit de séries à termes positifs, par comparaison, $\boxed{\sum b_n \text{ est aussi une série divergente.}}$

4. (a) Dans la somme définissant u_n, il y a n termes. Par décroissance de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, tous les termes sont plus grands que a_{2n}. On a donc $\boxed{na_{2n} \leq u_n.}$

(b) On a $u_n = A_{2n} - A_n$. La série $\sum a_n$ converge, on note A sa somme. Par définition, la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite A. A fortiori, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_{2n} = A$. Et en passant à la limite dans l'égalité $u_n = A_{2n} - A_n$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = A - A = 0$.

Enfin, par la question précédente on a $0 \leq na_{2n} \leq u_n$. Et le théorème d'encadrement donne :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0.}$$

(c) Posons $c_n = na_n$. On a $c_{2n} = 2(na_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question précédente.

De plus, par décroissance de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$0 \leq c_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}.$$

Comme $\sum a_k$ converge, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$. Le majorant ci-dessus est donc de limite nulle et, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} c_{2n+1} = 0.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} c_{2n} = 0$, on a aussi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0.}$

(d) On revient aux sommes partielles (puisque l'on est dans une situation théorique).

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)a_k \\ &= a_1 + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1))a_k - na_{n+1} = A_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1} \end{aligned}$$

On sait que la série $\sum a_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et on a aussiaussi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On vient aussi de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$. Les trois termes du membre de droite admettant une limite finie quand $n \to +\infty$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donc

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge.}}$$

Un passage à la limite dans l'identité précédente donne $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n.}$

Exercice 2

1. Pour $t \in [1, +\infty[$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

(a) La fonction $t \longmapsto t^\alpha$ est dérivable sur $[1, +\infty[$, sin l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composée puis quotient φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et par opérations, on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi'(t) = \frac{\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha) - \sin(t^\alpha)}{t^2} = -\frac{\sin(t^\alpha)}{t^2} + \alpha\frac{\cos(t^\alpha)}{t^{2-\alpha}}.$$

(b) Par inégalité triangulaire, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$|\varphi'(t)| = \frac{|\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha) - \sin(t^\alpha)|}{t^2} \leq \frac{|\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha)| + |\sin(t^\alpha)|}{t^2} \leq \frac{1 + \alpha t^\alpha}{t^2},$$

car $\alpha > 0$ et $|\sin(t)| \leq 1, |\cos(t) \leq 1$.

(c) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, n+1]$ et :

$$\forall t \in [n, n+1],\ |\varphi'(t)| \leq \frac{1+\alpha t^\alpha}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{\alpha}{t^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}.$$

Et donc, par l'inégalité des accroissements finis, pour tous $a, b \in [n, n+1]$, ona :

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|b-a|.$$

En particulier, avec $a = n$ et $b = t \in [n, n+1]$, on obtient :

$$\boxed{\forall t \in [n, n+1], \quad |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t-n|.}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)dt$.

On a donc $u_n - a_n = u_n - \varphi(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} (\varphi(t) - \varphi(n))dt$. Par inégalité triangulaire, puis par positivité de l'intégrale avec la majoration précédente valable sur l'intervalle d'intégration $[n, n+1]$, on obtient :

$$|u_n - a_n| \leq \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n))|dt \leq \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)\underbrace{|t-n|}_{\leq 1}dt \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}.$$

3. C'est un **(E1)** du moins une partie.

La fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

On pose $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = -\cos(t)$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et comme v est bornée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.

Par intégration par parties dans une intégrale impropre, on a donc l'équivalence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{-\cos(t)}{t^2}dt \text{ converge .}$$

Or, pour tout $t \geq 1$, on a $\left|\dfrac{-\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$. Et par Riemann, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge , donc par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-\cos(t)}{t^2}dt$ converge (absolument). Finalement,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt \text{ converge.}}$$

4. On veut poser dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$, $t = x^\alpha = \varphi(x)$.

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante (car $\alpha > 0$) sur $[1, +\infty[$ et $\varphi([1, +\infty[) = [1, +\infty[$.

Par changement de variable dans une intégrale impropre convergente, on obtient que l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\alpha}\varphi'(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\alpha}\alpha x^{\alpha-1}dx = \alpha\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x}dx.$$

On a aussi l'égalité (mais ça n'est pas demandé) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \alpha\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x}dx.$$

5. Par définition d'intégrale convergente, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin(t^\alpha)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}dt.$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \varphi(t)dt = \int_1^{n+1} \varphi(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}dt.$

Par définition de série convergente, on a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$

6. Par la question 2, on a $|u_n - a_n| \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

   Or puisque $2 > 1$ et $2-\alpha > 1$, les séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ convergent, et leur somme aussi.
   Par les théorèmes de comparaison, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - a_n) \text{ converge absolument.}}$$

7. Puisque la convergence absolue entraîne la convergence, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - a_n)$ converge, comme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge, leur différence aussi et finalement :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \text{ converge.}}$$

8. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|$ est convergente.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sin(n^\alpha)| \leq 1$ et donc $\sin^2(n^\alpha) \leq |\sin(n^\alpha)|$. On a donc :

$$0 \leq \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leq |a_n|.$$

   Or par hypothèse, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|$ est convergente, donc par comparaison :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \text{ est convergente.}}$$

   (b) C'est le même raisonnement que pour la question 3. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos(2x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

   On pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.
   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et comme v est bornée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$.

   Par intégration par parties dans une intégrale impropre, on a donc l'équivalence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}dx \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{x^2}dt \text{ converge .}$$

   Or, pour tout $x \geq 1$, on a $\left|\dfrac{\sin(2x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$. Et comme précédemment, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2}dx$ converge (absolument).
   Finalement,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}dx \text{ converge.}}$$

   (c) On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

   On a $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et donc :

$$\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}}_{\text{converge}} = \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}}_{\text{diverge}} - 2 \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}}_{\text{converge}}$$

Contradiction !

Et donc l'hypothèse faite en début de question est fausse : $\boxed{\sum a_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

Exercice 3

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}dt$.

1. (a) Soit $x > 0$. L'application $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,x]$ donc l'intégrale $\varphi(x)$ est impropre en 0.

   Or, on a $\left|\dfrac{\ln(t)}{1+t^2}\right| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|$ et ln est intégrable sur $]0,1]$ donc, par comparaison, $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ l'est aussi. Et par conséquent,

   $$\boxed{\varphi \text{ est définie sur }]0,+\infty[.}$$

   (b) Pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \varphi(1) + \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

   Or, $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc $x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ en est la primitive qui s'annule en 1. Et donc :

   $$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ \varphi'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.}$$

   (c) Pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt - \int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$. Or, par définition de la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ ou encore :

   $$\boxed{\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0.}$$

   On prolonge φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

   (d) Il s'agit de vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ est convergente. C'est un **(E1)**.

   Le problème en 0 a déjà été étudié.

   $\boxed{\text{En } +\infty :}$ $\left|\dfrac{\ln(t)}{1+t^2}\right| \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) donc, par comparaison, $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ l'est aussi.

   Par définition de cette convergence, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

   Montrons que I est nulle. On effectue le changement de variable $t = \phi(u) = \dfrac{1}{u}$. L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]0,+\infty[$, on a donc :

   $$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\frac{-du}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}du = -I.$$

   Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = I = 0.}$

2.
$$\forall x > 0, \quad g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{1+u} = \frac{(1-\sqrt{u})^2}{\sqrt{u}(1+u)} \geq 0.$$

Ainsi, g est croissante et puisque $g(0) = 0$, elle est positive sur $[0, +\infty[$. On a donc

$$\boxed{\forall u \geq 0, \quad \ln(1+u) \leq \sqrt{u}.}$$

Soit $x \geq 0$. D'après la question précédente, on a $\forall t \geq 0, \quad \left|\frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\sqrt{xt}}{1+t^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{t^{3/2}}.$

Or, $t \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann) donc, par comparaison, $t \longmapsto \frac{\sqrt{xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $t \longmapsto \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ également. Par conséquent,

(a) $\boxed{f \text{ est définie sur } [0, +\infty[.}$

(b) On pose pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[$, $h(x, t) = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$.

- Pour tout $t \geq 0$, l'application $x \longmapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$
- Pour tout $x \geq 0$, l'application $t \longmapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et on a vu qu'elle est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- Hypothèse de domination restreinte : Soit $A > 0$. Pour tout $(x, t) \in [0, A] \times [0, +\infty[$, on a

$$|h(x, t)| = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \leq \frac{\ln(1+At)}{1+t^2} = \phi_A(t).$$

Et ϕ_A est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Conclusion :
Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, f est continue sur tout $[0, A] \subset [0, +\infty[$ et donc :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

3. (a) On reprend la fonction h définie précédemment. Elle admet une dérivée partielle par rapport à la variable x donnée par :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times[0, +\infty[, \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}.$$

On a les assertions suivantes.

- Pour tout $t \geq 0$, l'application $x \longmapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $x > 0$, les applications $x \longmapsto h(x, t)$ et $x \longmapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $[0, +\infty[$ et on a vu que la première est intégrable sur $[0, +\infty[$. On a de plus :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{1}{x(1+t^2)} \frac{xt}{1+xt} \leq \frac{1}{x(1+t^2)}$$

Or $t \longmapsto \frac{1}{x(1+t^2)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc, par comparaison, $t \longmapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ l'est aussi.

- Hypothèse de domination restreinte : Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x, t) \in [\varepsilon, +\infty[\times[0, +\infty[$ on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{1}{x(1+t^2)} \frac{xt}{1+xt} \leq \frac{1}{x(1+t^2)} \leq \frac{1}{\varepsilon(1+t^2)} = \psi_\varepsilon(t)$$

et ψ_ε est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Conclusion : Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[\varepsilon,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

En outre, la formule de Leibniz donne $\forall x>0,\ f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}dt.$

(b) Le calcul donne facilement :

$$\boxed{\forall x\geq 0,\ \forall t\geq 0,\qquad \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{-x}{1+xt}+\frac{t+x}{1+t^2}\right).}$$

(c) On a donc pour tout $x>0$, $f'(x)=\displaystyle\frac{1}{1+x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t+x}{1+t^2}-\frac{x}{1+xt}\right)dt.$
Soit $X>0$, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\int_0^X\left(\frac{t+x}{1+t^2}-\frac{x}{1+xt}\right)dt &= \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+x\mathrm{Arctan}(t)-\ln(1+xt)\right]_0^X\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+X^2)+x\mathrm{Arctan}(X)-\ln(1+xX)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+X^2}{(1+xX)^2}\right)+x\mathrm{Arctan}(X)\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{x\pi}{2}\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall x>0,\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{x\pi}{2}-\ln(x)\right).}$

4. On a démontré que pour tout $x>0$, $\varphi'(x)=\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ et donc, il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x>0,\qquad f(x)=\frac{\pi}{4}\ln(1+x^2)-\varphi(x)+C.$$

On a démontré que $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$ et puisque f est continue en 0 (question 2.(c)), on a $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$. En passant à la limite dans l'égalité précédente, on trouve $C=0$ et donc

$$\boxed{\forall x>0,\qquad f(x)=\frac{\pi}{4}\ln(1+x^2)-\varphi(x).}$$

5. On a $f(x)=\dfrac{\pi}{4}\ln(1+x^2)-\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}\ln(x)+\dfrac{\pi}{4}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)-\varphi(x).$
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)-\varphi(x)\right)=0$, on a $\left(\dfrac{\pi}{4}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)\right)=\underset{x\to+\infty}{o}(\ln(x))$, et donc

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}\ln(x).}$$

6. La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x\pi}{2}-\ln(x)\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}+\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f n'est pas dérivable en 0 et son graphe admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.