Devoir surveillé 2

le mercredi 02 Octobre (14h-18h)

Les calculatrices, les téléphones portables et objets connectés (montres...) ne sont pas autorisés.

Vérification du travail personnel

Les question suivantes sont indépendantes.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)dt$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$ est strictement positif.
3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln^2(n)}$.
4. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right)$.

Exercice 1

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. Questions préliminaires.
   (a) Démontrer que pour $x \in]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nx^{n-1}$ est convergente. On note $S(x)$ sa somme.
   (b) Pour $x \in]-1,1[$, on pose $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. Que vaut $s_n(x)$?

   En dérivant les deux expressions de $s_n(x)$, démontrer que : $\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

   (c) Retrouver ce résultat, en effectuant le produit de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ par elle-même pour $x \in]-1,1[$.
2. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (a) Vérifier que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.
   (b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge et calculer sa somme.
3. On prend **dans cette question**, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.
   (a) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} a_n$?
   (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} na_n$.
   (c) Démontrer que $\Big((n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} b_n$.

4. On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{2n} \leq u_n$.

   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

   (c) Démontrer alors que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}$

   (e) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Exercice 2

Dans tout cet exercice, α est un élément de $]0,1[$. On se propose d'étudier la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ avec $a_n = \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n}$.

1. Pour $t \in [1,+\infty[$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t^\alpha)}{t}$.

   (a) Justifier que φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et déterminer φ'.

   (b) Montrer que : $\forall t \in [1,+\infty[,\ |\varphi'(t)| \leq \dfrac{1+\alpha t^\alpha}{t^2}$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t-n|.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)dt$.

   Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n - a_n| \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

3. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

4. À l'aide d'un changement de variable, démontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}dt$ converge.

5. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

6. Prouver que la série de terme général $u_n - a_n$ est absolument convergente.

7. Déduire des questions précédentes que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ converge.

8. **On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|$ est convergente.**

   (a) En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.

   Indication : on pourra utiliser une comparaison.

   (b) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}dx$ converge.

   (c) On admet alors, en procédant comme précédemment, que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est convergente.

   Que peut-on en conclure sur la série $\sum a_n$?

   Indication : on pourra utiliser une formule de trigonométrie exprimant $\cos(2\theta)$ *en fonction de* $\sin(\theta)$.

Exercice 3

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}dt$.

1. (a) Montrer que φ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   (c) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$ et prolonger φ par continuité en 0.
   (d) Etablir enfin que φ admet une limite en $+\infty$ que l'on calculera.

2. (a) Démontrer que pour $u \geq 0$, on a l'inégalité $\ln(1+u) \leq \sqrt{u}$.
   (b) En déduire que f est bien définie sur $[0, +\infty[$.
   (c) Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
   On pourra restreindre l'hypothèse de domination à des intervalles $[0, A]$.

3. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   On pourra restreindre l'hypothèse de domination à des intervalles $[\varepsilon, +\infty[$.
   (b) Pour tout $x \geq 0$, déterminer $\alpha(x)$ tel que $\forall t \geq 0$, $\quad \dfrac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = \alpha(x)\left(\dfrac{-x}{1+xt} + \dfrac{t+x}{1+t^2}\right)$.
   (c) En déduire l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.

4. Exprimer f à l'aide de φ.
5. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
6. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Quelle est la tangente au graphe de f en 0 ?