Devoir surveillé 1 - Correction

Exercice 1

1. On a $\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}e^{3i\pi/4}$.
2. 0 n'est pas une racine cubique de l'unité. Soit $z = re^{i\theta}$ un complexe non nul. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} z^3 = \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{3i\pi/4} &\iff r^3e^{3i\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{3i\pi/4} \\ &\iff \begin{cases} r^3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ \text{et} \\ 3\theta \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Par $2i\pi$-périodicité de l'exponentielle complexe, il suffit de prendre $k = 0, 1$ et -1 pour obtenir les 3 racines cubiques de α :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{3i\pi/4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{11i\pi/12} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-5i\pi/4}.$$

3. Notons $z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{3i\pi/4}$ la première. On a bien $z_0^4 = \dfrac{1}{2^2}e^{3i\pi} = -\dfrac{1}{4} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient A, B, C trois points distincts du plan complexe dont on note a, b, c les affixes respectives.

1. A, B, C alignés $\iff \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$
2. Soit $Z \in \mathbb{C}$ et M le point d'affixe Z.. On a les équivalence suivantes.

$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\iff y = \mathcal{I}\mathrm{m}(Z) = 0 \\ &\iff Z - \bar{Z} = 0 \\ &\iff \bar{Z} = Z \\ &\iff \mathrm{Arg}(Z) \equiv 0\ [\pi] \\ &\iff M \in (0x) \end{aligned}$$

Celle concernant l'argument n'a de sens que si $Z \neq 0$.

3. En utilisant les questions précédentes, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
A(a), B(b), C(c) \text{ alignés} &\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \iff \frac{c-a}{b-a} = \frac{\bar{c}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} \\
&\iff (c-a)(\bar{b}-\bar{a}) = (\bar{c}-\bar{a})(b-a) \\
&\iff c\bar{b} - a\bar{b} - c\bar{a} + |a|^2 = \bar{c}b - \bar{a}b - \bar{c}a + |a|^2 \\
&\iff c\bar{b} - a\bar{b} - c\bar{a} = \bar{c}b - \bar{a}b - \bar{c}a \\
&\iff a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} = \bar{a}b + c\bar{b} + \bar{c}a = \overline{a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}} \\
&\iff a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. On note $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{a}\right)$.
   Puisque $a > 0$, il est clair que pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 0$. Autrement dit, l'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f. Puisque $u_0 > 0$, on peut calculer $u_1 = f(u_0) > 0$ et par une récurrence immédiate on montrerait que les termes u_n sont bien définis et tous strictement positifs.

   $$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n > 0.}$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_{n+1} = f(u_n) = u_0 = \alpha$. Cela revient à chercher les points fixes de f.

   $$\begin{aligned}
   \alpha = f(\alpha) &\iff \alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{\alpha}\right) \iff 2\alpha = \alpha + \frac{a}{\alpha} \\
   &\iff \alpha = \frac{a}{\alpha} \iff \alpha^2 = a \quad \text{car } \alpha \neq 0 \\
   &\iff \alpha = \sqrt{a} \quad \text{car } \alpha > 0
   \end{aligned}$$

   Et donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante si et seulement si } u_0 = \sqrt{a}.}$
   Dans toute la suite du problème, on supposera $u_0 \neq \sqrt{a}$.

3. (a) Soit $x > 0$. On a les équivalences suivantes.

   $$\begin{aligned}
   f(x) < x &\iff \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) < x \iff x + \frac{a}{x} < 2x \\
   &\iff \frac{a}{x} < x \iff a < x^2 \iff \sqrt{a} < x \quad \text{car } x > 0
   \end{aligned}$$

   Et finalement $\boxed{\{x \in]0, +\infty[,\ f(x) < x\} =]\sqrt{a}, +\infty[.}$

   (b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{x^2 - a}{2x^2}$.
   On a donc le tableau des variations de f suivant.

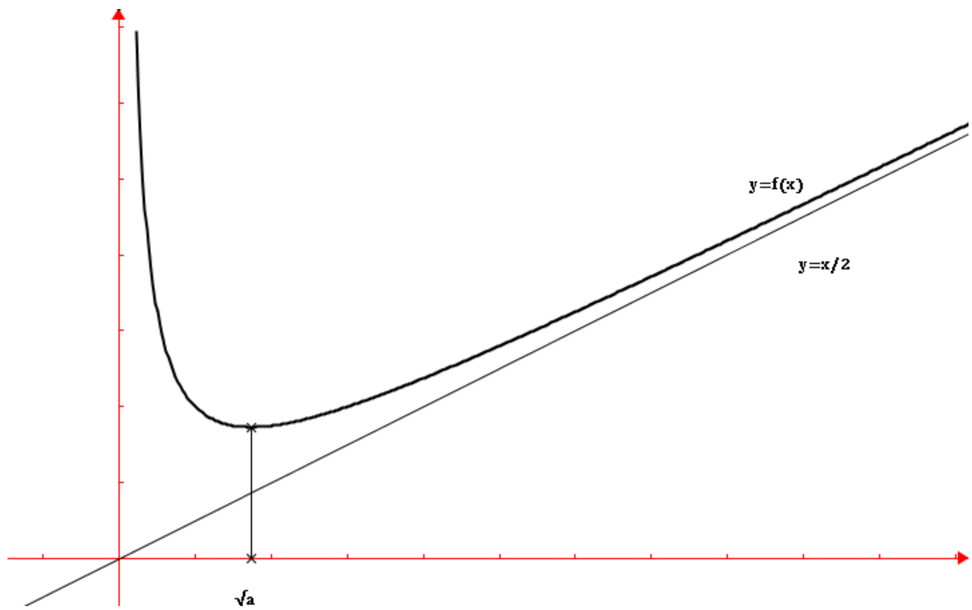
x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Lorsque $x \longrightarrow 0^+$, on a $f(x) \longrightarrow +\infty$ et donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote au graphe de f.

Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, on a $f(x) \longrightarrow +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$ donc le graphe de f présente une direction asymptotique d'axe $y = \dfrac{x}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \dfrac{x}{2}\right) = 0$ donc la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote au graphe de f.

(d)



4. (a) D'après le tableau des variations de f, on a

$$\forall x > \sqrt{a}, \quad f(x) > \sqrt{a}.$$

Or $u_0 \neq \sqrt{a}$ donc, d'après le tableau des variations de f, $u_1 = f(u_0) > \sqrt{a}$. Puis $u_2 = f(u_1) > \sqrt{a}$ et par une récurrence immédiate,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n > \sqrt{a}.}$$

(b) On a vu que si $x > \sqrt{a}$ alors $f(x) < x$. En particulier, avec $x = u_n > \sqrt{a}$, on trouve

$$f(u_n) = u_{n+1} < u_n.$$

Et donc $\boxed{\text{que la suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante.}}$

(c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, minorée par $\sqrt{a}$ donc elle est convergente. Notons ℓ sa limite. Puisque f est continue sur $]0, +\infty[$, si $(u_n)_{n\geq 1}$ converge c'est soit vers un point fixe de f, soit vers une extrémité de l'intervalle $]0, +\infty[$. Mais $\ell \geq \sqrt{a} > 0$ donc ℓ est nécessairement un point fixe de f.

En reprenant les équivalences de la question 3.(a), on montrerait que $f(x) = x$ si et seulement si $x = \sqrt{a}$. Ainsi

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ converge vers } \sqrt{a}.}$$

5. (a) On a $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{x^2}\right)$.

Or, pour tout $x \geq \sqrt{a}$, on a $0 \leq \dfrac{a}{x^2} \leq 1$ donc $\boxed{\forall x \geq \sqrt{a}, \quad 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}.}$

(b) Pour tout $x, y \in [\sqrt{a}, +\infty[$ avec $x < y$, on a

- f est continue sur $[x, y]$,

- f est dérivable sur $]x, y[$,
- $\forall t \in]x, y[, \quad 0 \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2}(y - x).$$

En particulier, avec $x = \sqrt{a}$ et $y = u_n > \sqrt{a} = x$, on trouve (puisque $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a}).}$$

(c) Par récurrence, on montrerait (à faire) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (u_1 - \sqrt{a}).$$

Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, donc par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}.}$$

6. On associe à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a les égalités suivantes.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{u_n^2 + 2\sqrt{a}u_n + a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2}.$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n^2.}$

(b) On a

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n-1}^2 = \left(v_{n-2}^2\right)^2 = v_{n-2}^{2\times 2} \\ &= \left(v_{n-3}^2\right)^{2^2} = v_{n-3}^{2\times 2^2} = v_{n-3}^{2^3} \\ &= \ldots = v_0^{2^n} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}.}$

(c) Or $|v_0| = \dfrac{|u_0 - \sqrt{a}|}{u_0 + \sqrt{a}}$. Et puisque $u_0 > 0$ et $\sqrt{a} > a$, on a

$$-u_0 - \sqrt{a} < u_0 - \sqrt{a} < u_0 + \sqrt{a}$$

ou encore $|u_0 - \sqrt{a}| < u_0 + \sqrt{a}$. Ainsi $|v_0| < 1$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} v_0^{2^n} = 0.}$

(d) Enfin,

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \iff v_n(u_n + \sqrt{a}) = u_n - \sqrt{a} \iff u_n = \sqrt{a}\frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$, on retrouve $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}.}$

Exercice 4

1. Construction de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^k$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction φ_p l'est aussi. On a en outre $\varphi_p(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_p(x) = +\infty$.

   (b) La fonction φ_p est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, par le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur son image $\varphi_p(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Comme 1 appartient à $\mathbb{R}^+$, il possède un unique antécédent x_p par φ_p dans $\mathbb{R}^+$. C'est-à-dire : $\boxed{(\mathcal{E}_p) \text{ possède une et une seule solution dans } \mathbb{R}^+.}$

   (c) On trouve $x_1 = 1$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. Nature de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

   (a) On a d'abord $x_p \geq 0$ et $\varphi_p(0) = 0 \neq 1$ donc $x_p \neq 0$. Ainsi, $x_p > 0$.
   On propose deux façons de démontrer que $x_p \leq 1$.

   • En utilisant la monotonie de φ_p :
   La fonction φ_p étant croissante, pour comparer deux éléments de $\mathbb{R}^+$, il suffit de comparer leurs images par φ_p.
   On a $\varphi_p(1) = p \geq 1 = \varphi_p(x_p)$. Or 1 et x_p sont dans $\mathbb{R}^+$ et φ_p est strictement croissante sur cet intervalle.
   Ainsi, si on avait $x_p > 1$, on aurait $\varphi_p(x_p) > \varphi_p(1)$, ce qui n'est pas le cas. On a donc nécessairement $\boxed{x_p \leq 1.}$

   • Par des manipulations algébriques :
   On sait que $x_p^p + x_p^{p-1} + \cdots + x_p^2 + x_p = 1$ donc :

   $$x_p \;=\; 1 - \underbrace{(x_p^p + x_p^{p-1} + \cdots + x_p^2)}_{\geq 0} \;\leq\; 1.$$

   Pour démontrer que $x_{p+1} < x_p$, on compare leurs images par φ_{p+1}. Mais des méthodes algébriques sont possibles.
   On a $\varphi_{p+1}(x_p) = x_p^{p+1} + \varphi_p(x_p) = x_p^{p+1} + 1 > 1 = \varphi_{p+1}(x_{p+1})$. Et comme φ_{p+1} est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a bien $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ x_{p+1} < x^p.}$

   (b) La suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle est convergente.

3. Limite de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

   (a) On sait que $x_p > 0$ et que pour $p \geq 2$, $x_p < x_2 < 1$. On a donc :

   $$\forall p \geq 2, \qquad 0 \leq (x_p)^p \leq (x_2)^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} (x_p)^p = 0.}$

   (b) Si $p = 1$, alors $x_p = 1$ et l'égalité demandée est immédiate.
   Si $p \geq 2$, alors $x_p < 1$ et dans ce cas :

   $$\varphi_p(x_p) = 1 = x_p^p + x_p^{p-1} + \cdots + x_p^2 + x_p = x_p\frac{1-x_p^p}{1-x_p}.$$

   En multipliant par $1 - x_p$, on a bien le résultat attendu.

   $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad x_p(1-x_p^p) = 1 - x_p.}$$

(c) On note $\ell = \lim\limits_{p\to+\infty} x_p$.
Par opération sur les limites, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} x_p(1-x_p^p) = \ell(1-0) = \ell$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}(1-x_p) = 1-\ell$. Et en passant à la limite dans l'égalité démontrée précédemment, on obtient $\ell = 1-\ell$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} x_p = \ell = \frac{1}{2}.}$$

4. Développement asymptotique de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$: on pose $y_p = 2x_p - 1$. On a donc $\lim\limits_{p\to+\infty} y_p = 0$.

(a) On a $x_p = \dfrac{y_p+1}{2}$.
On a montré l'égalité $x_p(1-x_p^p) = 1-x_p$, et donc $-x_p^{p+1} = 1-2x_p$, ce qui s'écrit en fonction de y_p :

$$\boxed{(1+y_p)^{p+1} = 2^{p+1}y_p.}$$

Par conséquent (puisque tous les facteurs sont >0), on a $(p+1)\ln(1+y_p) = (p+1)\ln(2) + \ln(y_p)$ et en multipliant par y_p, on trouve

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (p+1)y_p\Big(\ln(1+y_p) - \ln(2)\Big) = y_p\ln(y_p).}$$

(b) On sait que $\lim\limits_{p\to+\infty} y_p = 0$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty}(\ln(1+y_p) - \ln(2)) = -\ln(2) \neq 0$. Ainsi, pour p assez grand, $\ln(1+y_p) - \ln(2) \neq 0$ et :

$$(p+1)y_p = \frac{y_p\ln(y_p)}{\ln(1+y_p) - \ln(2)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$.
On a donc $(p+1)\ln(1+y_p) \sim_{p\to 0} (p+1)y_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et en composant par exp qui est continue sur $\mathbb{R}$, on trouve :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty}(1+y_p)^{p+1} = 1.}$$

(c) On a vu que $(1+y_p)^{p+1} = 2^{p+1}y_p$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty} 2^{p+1}y_p = 1$.

Ce qui s'écrit $\boxed{y_p \sim_{p\to 0} \dfrac{1}{2^{p+1}}.}$

(d) D'après la question précédente, on a $y_p = \dfrac{1}{2^{p+1}} + \underset{p\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{2^p}\right)$.

Et comme $x_p = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}y_p$, on obtient le développement asymptotique suivant.

$$\boxed{x_p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{p+2}} + \underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^p}\right).}$$

Exercice 5

PC centrale maths 1 2024 partie IIIA

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que f' ne s'annule pas sur I.

1. f a au plus un point d'annulation sur I. En effet, si f possède deux points d'annulation c_1 et $c_2 \in I$, avec $c_1 < c_2$. On a $f(c_1) = f(c_2) = 0$. f étant continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$ alors d'après le théorème de Rolle , il existe $c_3 \in]c_1, c_2[$, $f'(c_3) = 0$ absurde car f' ne s'annule pas sur I. thé
Ro

2. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I donc f'' est continue sur le segment J_r donc f'' est bornée sur J_r (et ses bornes sont atteintes) donc $\sup\limits_{J_r}|f''|$ est bien défini (et c'est un max).
   De même f' est continue sur le segment J_r, donc $|f'|$ aussi (par composée de fonctions continues) et donc $|f'|$ est bornée, et elle atteint ses bornes : $i_r = \inf\limits_{J_r}|f'| = \min\limits_{J_r}|f'|$ est bien défini (et l'inf est atteint). De plus, f' ne s'annule pas sur I, donc ne s'annule pas sur J_r donc $i_r = \min\limits_{J_r}|f'| > 0$.
3. I est un intervalle ouvert non vide et $c \in I$ donc il existe $r_0 > 0$ tel que $J_{r_0} \subset I$.
   De plus, on a pour tout $r \in]0, r_0]$, $J_r \subset J_{r_0}$ donc $s_r \leq s_{r_0}$ et $i_r \geq i_{r_0}$ et par conséquent, $K_r \leq K_{r_0}$.
   Si $K_{r_0} = 0$, alors $r = r_0$ vérifie $rK_r = 0$ donc $0 \leq rK_r < 1$.
   Si $K_{r_0} > 0$, alors on considère $r \in \left]0, \frac{1}{K_{r_0}}\right[$. On a alors $0 \leq rK_r \leq rK_{r_0} < 1$.
   Autre rédaction : on a pour tout $r \in]0, r_0[$, $0 \leq rK_r \leq rK_{r_0}$ donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{r \to 0^+} rK_r = 0$ donc il existe $r > 0$ tel que $rK_r < 1$.
4. cf cours
5. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J_r et $|f''| \leq s_r$. Donc on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :

$$\left|\underbrace{f(c)}_{=0} - f(c_n) - f'(c_n)(c - c_n)\right| \leq \frac{s_r}{2}|c - c_n|^2$$

   Par conséquent, en utilisant $|f'(c_n)| > i_r$,

$$|c_{n+1} - c| = \left|\frac{f'(c_n)c_n - f(c_n) - f'(c_n)c}{f'(c_n)}\right| \leq \frac{s_r}{2|f'(c_n)|}|c_n - c|^2 \leq \frac{s_r}{2i_r}|c_n - c|^2 = K_r|c_n - c|^2$$

   On a $c_n \in J_r$ donc $|c_n - c| \leq r$ d'où

$$|c_{n+1} - c| \leq K_r|c_n - c|^2 \leq K_r r^2 = \underbrace{(rK_r)}_{<1} r \leq r$$

   Par conséquent, $c_{n+1} \in [c - r, c + r] = J_r$.
6. On procède par récurrence sur n.
   Initialisation : l'inégalité est une égalité pour $n = 0$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|c_n - c| \leq \dfrac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$ et $c_n \in J_r$.
   On a alors par la question précédente, $c_{n+1} \in J_r$ et

$$|c_{n+1} - c| \leq K_r|c_n - c|^2 \leq K_r\left(\frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}\right)^2 = \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^{n+1}}}{K_r}$$

   Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

   De plus, $c_0 \in J_r$ donc $|c_0 - c| \leq r$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |c_n - c| \leq \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r} \leq \frac{(rK_r)^{2^n}}{K_r}$$

   Or $0 \leq rK_r < 1$ d'après Q22, $\lim\limits_{n \to +\infty} (rK_r)^{2^n} = 0$ donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} |c_n - c| = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to +\infty} c_n = c$$