# Devoir non surveillé 9 - Correction

## Remarques générales

- Pour l'exercice 1 :
  - Pour cet exercice très basique donné en temps libre, il n'est pas acceptable de faire des erreurs de calculs, ni de se tromper d'énoncé...
  - Il faut toujours vérifier la cohérence des valeurs propres avec la trace, mais aussi que les vecteurs propres trouvés sont bien des vecteurs propres (calculer $AX$)...
  - Si on a fait une erreur dans la recherche des valeurs propres, on doit obtenir un sous-espace propre associé égal à $\{0\}$ (impossible !) et réaliser qu'on a fait une erreur.
  - Il faut justifier que $A$ est diagonalisable : son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (cela suffit...).
  - Il faut aussi justifier que $B$ est diagonalisable : c'est possible dès qu'on connaît la dimension de $E_{-2}(B)$ en utilisant rigoureusement une CNS du cours.
  - Pour la $n$-ième fois, il ne suffit pas de trouver un vecteur dans un noyau pour en obtenir une base, on a besoin d'un argument supplémentaire portant par exemple sur la dimension.
- La première partie du problème demandait davantage de réflexion et de recherche.
  - IA est dans le cours, pas toujours su...
  - Quand on demande 3 (ou 4) sous-espaces stables par $f$ et qu'on en trouve 3 (ou 4), il faut encore s'assurer qu'ils sont bien distincts.
  - Les contre-exemples donnés sont souvent corrects, mais rares sont ceux qui justifient pourquoi ils répondent bien à la question.
  - Il y a parfois confusion entre un polynôme non scindé sur $\mathbb{R}$ et un polynôme qui n'a aucune racine réelle, ce n'est pas la même chose...
  - IC2 La difficulté de cette question portait sur le caractère infini du nombre de droites stables. C'est souvent affirmé sans aucune justification...
  - Le théorème de la base incomplète a des hypothèses... il convient de les vérifier...

## Exercice

- On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

  Le calcul donne $\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \det(A - \lambda I_3) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Et donc, les valeurs propres de $A$ sont

$$\boxed{\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 \text{ et } \lambda_3 = 3.}$$

  Le polynôme caractéristique de $A$ est scindé à racines simples et donc $A$ est diagonalisable : chacun de ses sous-espaces propres est une droite vectorielle. La recherche des sous-espaces propres donne :

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } E_3(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

  Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, les formules de changement de base donnent

$$\boxed{D_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.}$$

- On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Le calcul donne $\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \det(B - \lambda I_3) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$. Et donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{-2, 4\} \text{ avec } m_{-2}(B) = 2 \text{ et } m_4(B) = 1.}$$

• **Sous-espace propre associé à 4 :** puisque $m_4(B) = 1$, on a $\dim(E_4(B)) = 1$.
On a les équivalences suivantes.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(B) \iff BX = 4X$$

$$\iff \begin{cases} -x - y + 2z &= 4x \\ -x - y - 2z &= 4y \\ 2x - 2y + 2z &= 4z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x - y + 2z &= 0 \\ -x - 5y - 2z &= 0 \\ 2x - 2y - 2z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= -x \\ z &= 2x \end{cases}$$

Et donc $E_4(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

•**Sous-espace propre associé à -2 :** Puisque $m_{-2}(B) = 2$, il peut être de dimension 1 ou 2.
La matrice $B + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc son noyau $E_{-2}(B)$ est de dimension 2. On a les relations suivantes sur les colonnes : $C_1 + C_2 = 0$ et $2C_2 + C_3 = 0$. Donc :

$$E_{-2}(B) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

•**Conclusion :** $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(E_4(B)) + \dim(E_{-2}(B)) = 1 + 2 = 3$ donc $B$ est diagonalisable.
Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, les formules de changement de base donnent

$$\boxed{D_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}BP.}$$

# Problème

*Centrale PC 2015*

*Un corrigé de Jean-Christophe Bourgoin et Sophie Sidaner*

## I - Première partie

**I.A -** • Si $F = \mathrm{vect}(u)$ est stable par $f$, $f(u) \in \mathrm{vect}(u)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Puisque $F$ est une droite vectorielle engendré par $u$, $u$ est non nul donc $u$ est bien un vecteur propre de $f$.

• Réciproquement si $u$ est un vecteur propre de $f$ associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. $u \neq 0_E$ donc $\mathrm{vect}(u)$ est une droite vectorielle. De plus, si $v \in \mathrm{vect}(u)$, il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $v = ku$. Par suite, $f(v) = \lambda k u$ donc $f(v) \in \mathrm{vect}(u)$. $\mathrm{vect}(u)$ est donc stable par $f$.

**I.B -**

**I.B.1)** Les sous-espaces $\{0_E\}$ et $E$ sont clairement stables par $F$, et distincts par hypothèse. Il y a donc au moins deux sous-espaces stables par $F$.

Considérons l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $F$ est un sous-espace vectoriel stable autre que $\{0_E\}$ et $E$ alors $\dim(F) = 1$. D'après I.A, $f$ admet alors un vecteur propre associé à une valeur propre réelle.

Le polynôme caractéristique de $f$ est $X^2 + 1$. Celui-ci n'a pas de racines réelles, $f$ n'admet donc pas de valeurs propres réelles puisqu'elles sont racines du polynôme caractéristique.

$\boxed{f \text{ n'a donc que } \{0_E\} \text{ et } E \text{ comme sous-espaces propres stables.}}$

**I.B.2)** Ici $n \geq 2$. Si $f$ est non nul, $\mathrm{Ker}(f) \neq E$ et si $f$ est non injective $f \neq \{0_E\}$. De plus, $f(\mathrm{Ker}(f)) = \{0_E\}$ donc $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par $f$. Ainsi $f$ admet au moins trois sous-espaces stables, $\boxed{\{0_E\},\ E \text{ et } \mathrm{Ker}(f).}$

**Remarque :** $n \geq 2$ est nécessaire car sinon on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ou $\mathrm{Ker}(f) = E$.

Supposons de plus $n$ impair.

D'après le cours $\mathrm{Im}(f)$ est stable par $f$.

Comme $f$ est non injective, $f$ étant un endomorphisme sur un espace de dimension finie $f$ est non surjective donc $\mathrm{i}(f) \neq E$. $f$ est non nul donc $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$. D'après le théorème du rang $n = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Par suite, si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ on a $n = 2rg(f)$ et donc $n$ est pair. Ce n'est pas le cas donc $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi,

$\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est un quatrième sous-espace stable qui s'ajoute au trois autres.}}$

Considérons l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$f$ est non nul, non injective car $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(e_1)$ donc $f$ admet au moins trois sous-espaces stables. Supposons que $F$ soit un autre sous-espace stable par $f$. On a alors $\dim(F) = 1$ et de I.A. $F$ est engendré par un vecteur propre de $f$. Le polynôme caractéristique de $f$ est $X^2$. $f$ admet donc comme seule valeur propre 0 donc $F = \mathrm{Ker}(f)$.

$\boxed{\text{Il n'y a donc que trois sous-espaces stables par } f.}$

**I.C -**

**I.C.1)** Soient $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ une famille de $k$ vecteurs propres de $f$ associés respectivement à des valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ et $F = \text{vect}(u_1, u_2, \cdots, u_k)$

Soit $u \in F$. Il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$. On a alors $f(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i u_i$ donc $f(u) \in F$. Ainsi $\boxed{F \text{ est stable par } f.}$

L'endomorphisme induit par $f$ sur un sous-espace propre $F$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ est $\boxed{\lambda Id_F.}$

**I.C.2)** Soit $F$ un sous-espace stable de $f$ de dimension au moins 2. Soit $(u, v)$ une famille libre de $F$. On vérifie alors que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{K}^*)^2$ avec $a \neq b$, la famille $(u + av, u + bv)$ est libre (à faire !)

La famille $(\text{vect}(u + av))_{a \in \mathbb{K}^*}$ est donc une famille de droites vectorielles deux à deux distinctes, il y en a donc une infinité. De plus, $u$ est $v$ sont des vecteurs propres donc, d'après I.C.1) $\text{vect}(u + av)$ est stable par $f$ pour tout $a \in \mathbb{K}^*$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ admet une infinité de droites vectorielles stables par } f.}$

**I.C.3)** Si tout sous-espace vectoriel de $f$ est stable par $f$ toute droite vectorielle l'est aussi et donc tout vecteur de $E$ est vecteur propre de $f$. Montrons que $f$ admet une seule valeur propre.

Soit, pour tout $u \in E$, $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$. Soit $(u, v) \in E^2$.

• Si $(u, v)$ est libre. On a $f(u + v) = \lambda_{u+v}(u + v) = \lambda_u u + \lambda_v v$ donc $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0_E$. La liberté de $(u, v)$ impose $\lambda_{u+v} = \lambda_u = \lambda_v$.

• Si $(u, v)$ est liée. Si $u = 0_E$, on a $f(u) = \lambda_v 0_E$ et on peut convenir que $\lambda_u = \lambda_v$. On peut conclure la même chose si $v = 0_E$.

Si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $v = \alpha u$. Par suite, $f(v) = \alpha f(u) = \alpha \lambda_u u$ et $f(v) = \lambda_v v = \alpha \lambda_v u$. Comme $u \neq 0_E$, $\alpha \lambda_u = \alpha \lambda_v$ et comme $\alpha \neq 0$, $\lambda_u = \lambda_v$.

Ainsi, $f$ n'admet qu'une seule valeur propre et comme tout vecteur de $E$ est vecteur propre

$$\boxed{f \text{ est une homothétie vectorielle de rapport cette valeur propre.}}$$

**I.D -**

**I.D.1)** Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une base de vecteurs propres de $f$. Cette famille existe puisque $f$ est diagonalisable.

Soit $F$ un sous-espace par $f$. Si $F = \{0_E\}$ ou $F = E$, on a immédiatement des sous espaces stables par $f$ et supplémentaire de $F$ à savoir respectivement $E$ et $\{0_E\}$. Supposons $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$.

Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ une base de $F$, $k$ étant donc la dimension de $F$. D'après le théorème de la base incomplète, puisque $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ est libre et puisque $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de $E$, on peut adjoindre des vecteurs de $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ à $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ de sorte à obtenir une base de $E$.

Soit $(u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_{n-k}})$ une telle famille de vecteurs. Par suite, $\text{vect}((u_{i_1}, \cdots, u_{i_2}, \cdots, u_{i_{n-k}}))$ est un supplémenta de $F$ et d'après I.C.1) est stable par $f$.

**I.D.2)** Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Donc le polynôme caractéristique de $f$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ et $f$ admet au moins un vecteur propre. Soit $F$ la somme directe des sous-espaces propres de $f$. $F \neq \{0_E\}$ d'après ce qui précède.

Supposons $F \neq E$. $F$ admet un supplémentaire $G$ stable par $G$ et $G \neq \{0_E\}$ car $F \neq E$. L'endomorphisme $f_{|G}$ a aussi un polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{C}$ et donc un vecteur propre $u$. $u$ est alors immédiatement vecteur propre de $f$ et est donc dans $F$. Or, $F$ et $G$ sont supplémentaires donc $u = 0_E$ ce qui est contradictoire avec $u$ vecteur propre. Ainsi $F = E$ et donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

$\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \text{ on ne peut pas conclure que } f \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$. Prenons par exemple l'endomorphisme de la question I.B.1) pour lequel les seuls sous-espaces stables sont $\{0_E\}$ et $E$ et donc tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable et cet endomorphisme n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

## II - Deuxième partie

**II.A -)**

**II.A.1)** Soot $u \in F$. Il existe $(u_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}} \in \prod_{i=1}^{p}(F\cap E_i)$ tel que $u = \sum_{i=1}^{p} u_i$. Par suite, $f(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.
Comme, pour tout $i \in \{1,\cdots,p\}$, $F$ et $E_i$ sont des sous-espaces vectoriels $F\cap E_i$ l'est aussi et donc $\lambda_i u_i \in F\cap E_i$. Ainsi $f(u) \in \bigoplus_{i=1}^{p} F\cap E_i$.

$$\boxed{F = \bigoplus_{i=1}^{p} F\cap E_i \text{ est donc stable par } f.}$$

**II.A.2)** Les valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}}$ dont deux à deux distinctes donc les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}}$ sont en somme directe. De plus, $f$ est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{il existe } (x_i)_{1\leq i\leq p} \in \prod_{i=1}^{p} E_i \text{ unique tel que } x = \sum_{i=1}^{p} x_i.}$$

**II.A.3)** $(x_1,\cdots,x_r)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc c'est une famille libre. De plus, $(x_1,\cdots,x_r)$ est immédiatement une famille génératrice de $\mathrm{vect}(x_1,\cdots,x_r)$ donc $\boxed{(x_1,\cdots,x_r) \text{ est une base de } V_x.}$

**II.A.4)** On a, pour tout $j \in \{1,\cdots,r\}$, $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i \in V_x$.

La matrice de $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}$.

**II.A.5)** Le déterminant de la matrice de $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est un déterminant de Vandermonde qui vaut : $\prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i)$. Comme $(\lambda_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est une famille de scalaires deux à deux distincts, ce déterminant est non nul.
Par suite, la famille $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ est libre et étant de cardinal à égal à $r$, dimension de $V_x$, on a :

$$\boxed{\text{c'est une base de } V_x.}$$

**II.A.6)** Soit $i \in [\![1,p]\!]$. D'après II.A.5) il existe $(\alpha_{i,j})_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ tel que $x_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{i,j} f^{j-1}(x)$. Comme $F$ est stable par $f$, $F$ est de façon immédiate stable par $f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $x \in F$, on a donc $f^{j-1}(x) \in F$ pour tout $j \in \{1,\cdots,r\}$. Par suite, $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{i,j} f^{j-1}(x) \in F$ et donc $\boxed{x_i \in F, \text{ ceci pour tout } i \in \{1,\cdots,p\}.}$. On a donc $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} F\cap E_i$, ceci étant aussi immédiatement vrai pour $0_E$, on déduit que $F \subset \bigoplus_{i=1}^{p} F\cap E_i$ puis par double inclusion immédiate on a $\boxed{F = \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i}$

**II.B -)**

**II.B.1)** Soit $i \in \{1, \cdots, p\}$. Comme $p = n$ et que $(\lambda_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$ sont deux à deux distincts, $\lambda_i$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité un. Par suite, $\boxed{\dim(E_i) = 1.}$

**II.B.2)** D'après II.B.1), pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $E_i$ est engendré par un vecteur propre et donc d'après I.A $E_i$ est stable par $f$. De plus, si $D$ est une droite vectorielle stable par $f$, elle est engendrée par un vecteur propre d'après encore I.A et est donc l'un des sous-espaces propres $E_i$ puisque pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\dim(E_i) = \dim(D) = 1$. Par conséquent, $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont les seules droite vectorielles stables par $f$. $\boxed{\text{Il y en a donc } n.}$

**II.B.3)** Montrons que $F$ est stable par $f$ et $\dim(F) = k$ si et seulement si il existe $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $\mathrm{card}(H) = k$ tel que $F = \bigoplus_{i \in H} E_i$.

Soit $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $\mathrm{card}(H) = k$.

Soit, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, un vecteur propre $u_i \in E$ tel que $E_i = \mathrm{vect}(u_i)$.

On a donc $\bigoplus_{i \in H} E_i = \mathrm{vect}((u_i)_{i \in H})$. D'après I.C-1), $\mathrm{vect}((u_i)_{i \in H})$ est stable par $f$ donc $\bigoplus_{i \in H} E_i$ l'est aussi.

Soit $F$ un sous-espace de dimension $k$ et stable par $f$.

D'après II.A.6), $F = F \subset \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i$.. Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$. Comme $\dim(E_i) = 1$, on a ou bien $F \cap E_i = E_i$ ou bien $F \cap E_i = \{0_E\}$. Soit $H = \{i \in [\![1, n]\!]\,;\, F \cap E_i = E_i\}$. On a donc $F = \bigoplus_{i \in H} E_i$. De plus,

$$\dim(F) = \dim(\bigoplus_{i \in H} E_i) = \sum_{i \in H} \dim(E_i) = \mathrm{card}(H)$$

, donc $\mathrm{card}(H) = k$. $F$ est donc stable par $f$ et $\dim(F) = k$ si et seulement si il existe $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $\mathrm{card}(H) = k$ tel que $F = \bigoplus_{i \in H} E_i$.

On déduit que le nombre de sous-espaces stables par $f$ et de dimension $k$ est le nombre de $k$-combinaisons de $\{1, \ldots, n\}$ c'est-à-dire, $\boxed{\binom{n}{k}.}$

**II.B.4)** Si $n = 2$, d'après II.B.2), $\boxed{\text{Les sous-espaces stables sont } \{0_E\},\ E,\ E_1 \text{ et } E_2.}$

Si $n \geq 3$, d'après II.B.2) et II.B.3), il y a $1 + \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} + 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \boxed{2^n}$, cette formule étant d'ailleurs valable pour $n = 2$ et $n = 1$.

$\boxed{\text{Les sous-espaces stables de } f \text{ sont } \{0_E\},\ E_i,\ i \in [\![1, n]\!] \text{ et } \bigoplus_{i \in H} E_i, \text{ avec } H \subset \{1, \cdots, n\}\ 2 \leq \mathrm{card}(H) \leq n-1.}$

## III - Troisième partie

**III.A -)**

**III.A.1)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si $deg(P) \leq 0$, $P' = 0$ et donc $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. Si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$ donc $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. $\boxed{\mathbb{K}_n[X] \text{ est donc stable par } D.}$

On a $\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$.

**III.A.2)**

a) Soit $L = \{p \in \mathbb{N}\,;\, \exists P \in F \text{ avec } deg(P) = p\}$. Cet ensemble est non vide vu que $F$ est de dimension non nulle, il contient un polynôme non nul dont le degré est dans $L$. Supposons $L$ non majorée.
En ce cas, il existe une suite $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de polynômes tous non nuls de $F$ et de degré strictement croissant. Cette famille est donc de degré echelonné donc est libre. Ce qui impose $F$ de dimension infinie. Or, $\dim(F)$ est finie, donc $L$ est majorée. $L \subset \mathbb{N}$ donc $L$ admet un plus grand élément. Soit $n$ celui-ci.
Par suite, $\boxed{\text{il existe } R \in F \text{ tel que } \deg(R) = n.}$
De plus, pour tout $P \in F$, $\deg(P) \leq n$ donc $\boxed{F \subset \mathbb{K}_n[X].}$.

b) Pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, on montre par récurrence que $deg(D^i(R)) = n - i$. Or, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, $0 \leq n - i \leq n$. Par suite, $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$ est une famille de polynômes tous non nuls et de degré échelonné donc $\boxed{(D^i(R))_{0\leq i\leq n} \text{ est libre.}}$

c) La famille $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$ est libre d'après la question précédente. Elle possède $n+1$ éléments qui sont tous dans $\mathbb{K}_n[X]$ et $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathbb{K}_n[X] = \text{vect}(D^i(R))_{0\leq i\leq n})$. Par suite, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$. De l'inclusion de III.A.1.a), on a $\boxed{F = \mathbb{K}_n[X]}$.

**III.A.3)** D'après III.A.1) et III.A.2) $F$ est un sous-espace de dimension finie stable par $D$ si et seulement si $F = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F = \mathbb{K}_n[X]$.
Soit à présent $F$ un sous espace stable par $D$ de dimension infinie. Montrons que $D = \mathbb{K}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P$ est nul, $P \in D$.
Supposons $P$ non nul. Comme $F$ est de dimension infinie il existe $Q \in F$ avec $\deg(Q) > \deg(P)$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $F \subset K_p[X]$, où $p = \deg(P)$ et $F$ serait de dimension finie. Soit $q = \deg(Q)$. Comme $F$ et $\mathbb{K}_q[X]$ sont stables, $F \cap \mathbb{K}_q[X]$ l'est aussi. De plus, $\mathbb{K}_q[X] \cap F$ est de dimension finie donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{K}_q[X] \cap F = \mathbb{K}_r[X]$. On a donc $\mathbb{K}_r[X] \subset \mathbb{K}_q[X]$ donc $r \leq q$. De plus, $Q \in \mathbb{K}_q[X] \cap F$ donc $Q \in \mathbb{K}_r[X]$ donc $q \leq r$. Ainsi $r = q$ donc $\mathbb{K}_q[X] \cap F = \mathbb{K}_q[X]$. Or, $\deg(P) < \deg(Q)$ donc $P \in \mathbb{K}_q[X]$ donc $P \in F$. Ainsi $\mathbb{K}[X] \subset F$ et par double inclusion immédiate, $F = \mathbb{K}[X]$.
$\boxed{\text{Les sous espaces stables de } \mathbb{K}[X] \text{ par } D \text{ sont donc les sous-espaces } 0_{\mathbb{K}[X]},\ \mathbb{K}_n[X],\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \mathbb{K}[X].}$

**III.B. -**

**III.B.1)** Soit $M = \{u \in E\,;\, \mathcal{B}_{f,u} \text{ est un base de } E\}$. Montrons que $M = E\backslash\text{Ker}(f^{n-1})$.
Si $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de $E$, $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ donc $u \in E\backslash\text{Ker}(f^{n-1})$. L'inclusion $M \subset E\backslash\text{Ker}(f^{n-1})$ s'en déduit.
Soit $u \in E\backslash\text{Ker}(f^{n-1})$. Montrons que $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre.
Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f^{n-i}(u) = 0_E$. Supposons $a_1, \cdots, a_n$ non tous nuls. Soit alors $i_0 = max\{i \in [\![1, n]\!]\,;\, a_i \neq 0\}$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_0} a_i f^{n-i}(u) = 0_E$. Comme $f^n = 0$, $f^k = 0$ pour tout $k \geq n$, en

composant par $f^{i_0-1}$ à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient donc $a_{i_0} f^{n-1}(u) = 0_E$. Comme $f^{n-1}(u) \neq 0_E$, $a_{i_0} = 0$ ce qui contredit $a_{i_0} \neq 0$. Par suite, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_i = 0$ et donc $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre. Il s'agit d'une famille de $n$ vecteurs et comme $\dim(E) = n$, $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de $E$. Ainsi $E \backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1}) \subset M$ et par double inclusion $\boxed{M = E \backslash \mathrm{Ker}(f^{n-1}).}$

**III.B.2)** La matrice de $f$ dans $\mathcal{B}_{f,u}$ est : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}.$

**III.B.3)** Soit $u \in E$ tel que $\mathcal{B}_{f,u}$ soit une base de $E$.

Soit $\boxed{\mathcal{B}'_{f,u} = ((i-1)! f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}.}$ $\mathcal{B}'_{f,u}$ est alors clairement aussi une base de $E$. De plus, pour tout $i \in \{2, \cdots, n\}$, $f((i-1)! f^{n-i}(u)) = (i-1) \left(((i-1)-1)! f^{n-(i-1)}(u)\right)$ et pour $i = 1$, $f((i-1)! f^{n-i}(u)) = 0_E$. Par conséquent, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans } \mathcal{B}'_{f,u} \text{ est bien } A_{n-1}.}$

**III.B.4)** Soit $u \in E$ tel que $\mathcal{B}_{f,u}$ soit une base de $E$. D'après III.B.3), $f$ et $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$ ont la même matrice représentative dans respectivement les bases $(X^{i-1})_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B}'_{f,u} = (u_{i-1})_{1 \leq i \leq n}$, où on a noté, $u_{i-1} = (i-1)! f^{n-i}(u)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Soit $g$ l'unique application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ telle que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $g(X^{i-1}) = u_{i-1}$. $g$ est un isomorphisme puisque $g$ transforme une base en une base et la matrice de $g$ dans la base $\mathcal{B}'_{f,u}$ et la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est la matrice identité $I_n$. De plus, $g^{-1} o f = D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]} o g^{-1}$ puisque la matrice représentative de ces deux applications linéaires est $A_{n-1}$.

Si $F$ est un sous-espace de $E$ stable par $f$, $g^{-1}(f(F)) \subset g^{-1}(F)$. Et donc $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}(g^{-1}(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $g^{-1}(F)$ est stable par $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$. Réciproquement si $F$ est un sous-espace de $E$ tel que $g^{-1}(F)$ soit stable par $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$, on a $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}(g^{-1}(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $g^{-1}(f(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $gog^{-1}((f(F)) \subset g(g^{-1}(F))$ donc $f(F) \subset F$ donc $F$ est stable par $f$. Ainsi $F$ est un sous-espace stable par $f$ si et seulement si $g^{-1}(F)$ est stable par $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$. D'après III.A.3), $F$ est un sous-espace stable par $f$ si et seulement si $g^{-1}(F) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ ou $g^{-1}(F) = \mathbb{K}_r[X]$, où $r \in [\![0, n-1]\!]$. Par définition de $g$,

$\boxed{F \text{ est donc un sous-espace stable par } f \text{ équivaut à } F = \{0_E\} \text{ ou } F = \mathrm{vect}((u_{i-1})_{i \in \{1, \cdots, r\}}), \text{ où } r \in [\![1, n]\!].}$ $\boxed{\text{Il y}}$

Pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$ $\mathrm{Ker}(f^i)$ est un sous-espace stable par $f$. En effet, si $u \in \mathrm{Ker}(f^i)$, $f^i(u) = 0_E$ donc $f(f^i(u)) = 0_E$ donc $f^i(f(u)) = 0_E$ donc $f(u) \in \mathrm{Ker}(f^i)$.

De plus, clairement $\mathrm{Ker}(f^i) \subset \mathrm{Ker}(f^{i+1})$.

Montrons que cette inclusion est stricte pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$. Soit $i \in \{0, \cdots, n-1\}$. Supposons que $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})$. Soit $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0_E$. On a $f^n(u) = f^{i+1}(f^{n-i-1}(u))$ et $f^n(u) = 0_E$. Par conséquent $f^{n-i-1}(u) \in \mathrm{Ker}(f^{i+1})$. Comme $\mathrm{Ker}(f^{i+1}) = \mathrm{Ker}(f^i)$, $f^{n-i-1}(u) \in \mathrm{Ker}(f^i)$ donc $f^i(f^{n-i-1}(u)) = 0_E$ donc $f^{n-1}(u) = 0_E$. Or, $f^{n-1}(u) \neq 0_E$. On a donc une contradiction, ainsi l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^i) \subset \mathrm{Ker}(f^{i+1})$ est stricte. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f^i)$ sont donc deux à deux distincts pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, il y en a donc $n+1$ et ils sont tous stables par $f$.

Par suite, $\boxed{\text{les sous-espaces stables par } f \text{ sont les sous-espaces } \mathrm{Ker}(f^i), \text{ où } i \in \{0, \cdots, n\}.}$

## IV - Quatrième partie

**IV.A -)** $MX_i$ étant la colonne $i$ de $M$, par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base,

$$\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans } \mathcal{B}_n \text{ est } M.}$$

**IV.B -)** Le polynôme caractéristique $\chi_f$ de $f$ étant unitaire de degré $n$, il tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ ; comme il change de signe et est une fonction continue réelle, il admet au moins une racine réelle donc $\boxed{f \text{ a au moins une valeur propre.}}$

**IV.C -)**

**IV.C.1)** $X$ et $Y$ sont bien des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ puisque pour tout $i$, $x_i = \Re e(z_i)$ et $y_i = \mathrm{Imm}(z_i)$.
Soient $(a, b)$ un couple de réels tels que $aX + bY = 0$ ce qui équivaut à $(a - ib)Z + (a + ib)\overline{Z} = 0$. comme $MZ = \lambda Z$, $M\overline{Z} = \overline{\lambda Z}$. $Z$ et $\overline{Z}$ sont des vecteurs propres de $M$ associés à deux valeurs propres distinctes (car $\lambda \notin \mathbb{R}$), ils forment une famille libre donc $a - ib = a + ib = 0$ ce qui équivaut à $a = b = 0$ ce qui prouve que $\boxed{(X, Y) \text{ est libre.}}$

**IV.C.2)** On a immédiatement :

$$\begin{cases} 2MX = MZ + M\overline{Z} = 2\Re e\left((\alpha + i\beta)(X + iY)\right) = 2(\alpha X - \beta Y) \\ 2MY = \frac{1}{i}\left(MZ - M\overline{Z}\right) = 2\mathrm{Imm}\left((\alpha + i\beta)(X + iY)\right) = 2(\beta X + \alpha Y) \end{cases}$$

ainsi le plan vectoriel $F$ est stable par $f$ et la matrice de $f_F$ dans $(X, Y)$ est $\boxed{M_F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}}$

**IV.D -)** Soit $E$ un espace vectoriel de **dimension** $n$ **non nulle** et un endomorphisme $f$ de $E$ admet de matrice $M$ dans une base $\mathcal{B}$ donnée de $E$. Si $f$ a une valeur propre réelle $\lambda$, tout vecteur propre de $f$ associé à $\lambda$ engendre une droite stable par $f$.
Si $f$ n'a pas de valeur propre réelle, sa matrice $M$ admet au moins une valeur propre complexe $\lambda$ ($n \neq 0$). En reprenant les notations de la question $C$, les vecteurs $x$ et $y$ de $E$ de matrices $X$ et $Y$ dans la base $\mathcal{B}$ engendrent un plan stable par $E$.Ainsi :

$$\boxed{\text{tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle admet une droite ou un plan stable.}}$$

**IV.E -)** Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = PX$. Si $P$ est non nul, $\deg(f(P)) = \deg(P) + 1$ donc $f(P)$ ne peut pas être colinéaire à $P$ ; de plus $P, f(P), f^2(P)$ est une famille libre (car étagée en degré) donc $P$ ne peut pas appartenir à un plan stable.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme de } \mathbb{R}[X] \text{ défini par } f(P) = PX \text{ n'admet ni droite ni plan stable.}}$$