Devoir non surveillé 7 - Correction

Remarques générales

• Le mot *voisinage* ne prend qu'un n...

• L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ est une intégrale de Riemann translatée (convergente) mais pas $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$.
Il faut s'y ramener avec une comparaison.

• L'étude de la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)dx$ a conduit à de nombreuses confusions. Il suffisait de comparer en 0 à $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

• Savoir reconnaître des « primitive à vue », c'est-à-dire du type $\displaystyle\int u'(x)F'(u(x))dx$ que l'on peut calculer directement, sans changement de variable.
Par exemple : $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ est du type $\dfrac{u'}{1+u^2}$ que l'on intègre en $\text{Arctan}(u)+C$.

• La définition de « f est une fonction croissante sur I » n'est pas : $\forall x \in I,\ f(x+1) = f(x)$...
Confusion avec les suites...

• De même, cela n'a aucun sens de faire une récurrence sur x quand x est la variable réelle.

• Le raisonnement pour montrer qu'une intégrale est **strictement** positive n'est toujours pas acquis par certains.
La positivité de l'intégrale ne donne que des inégalités larges a priori.

• Les hypothèses de changement de variables sont très souvent fausses ou incomplètes. Il faut revoir le cours et bien faire attention aux bornes.
Les hypothèses de l'intégration par parties dans une intégrale impropre sont aussi souvent incomplètes ($\lim u(t)v(t)$...)

• Ne pas écrire des comparaisons du type : $a(x) \leq b(x) \sim c(x)$ ou $a(x) \sim b(x) \leq c(x)$ car il n'y a pas de transitivité.
Il faut séparer. Par exemple : $a(x) \leq b(x)$ et $b(x) \sim c(x)$.
En revanche, on peut écrire : $a(x) \sim b(x) = o(c(x))$.

• Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, on n'a pas forcément $f(n) \sim f(n+1)$, même si f est décroissante, positive, continue...
Prendre par exemple $f(x) = e^{-x}$.

• De même, on a bien $x \underset{x\to+\infty}{\sim} E(x)$ (à démontrer avec un encadrement). Mais cela n'implique pas $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(E(x))$.
Prendre par exemple $f(x) = \sin(\pi x)$.

• Certaines questions de l'exercice 3 avaient été vues en classe (**(E1)** ou **(E2)**). C'est dommage de ne pas les refaire en DNS...

Exercice 1

• Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

↪ $\boxed{\text{En } 0 :}$ On a $\left|\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right| \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann) donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ l'est aussi.

↪ $\boxed{\text{En } +\infty :}$ On a $\left|\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right| = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (croissances comparées).

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ l'est aussi.

On a donc démontré que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \text{ est convergente.}}$

• Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-x}dx$.

La fonction $x \longmapsto x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

↪ $\boxed{\text{En } 0 :}$ On a $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x\ln(x)} = e^0 = 1$ donc $x \longmapsto x^{-x}$ est intégrable sur $]0,1]$ (prolongeable par continuité en 0).

↪ $\boxed{\text{En } +\infty :}$ On a $x^2x^{-x} = e^{-x\ln(x)+2\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $x^{-x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) donc, par comparaison, $x \longmapsto x^{-x}$ l'est aussi.

On a donc démontré que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{x}dx \text{ est convergente.}}$

• Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}dx$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

↪ $\boxed{\text{En } 0 :}$ On a $\left|\dfrac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}\right| \leq \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann) donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}$ l'est aussi.

↪ $\boxed{\text{En } +\infty :}$ On a $\left|\dfrac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2\ln(1+x)} = \dfrac{1}{x^{3/2}\ln(1+x)} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}$ l'est aussi.

On a donc démontré que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}dx \text{ est convergente.}}$

• Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

La fonction $x \longmapsto \ln(x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\hookrightarrow$ $\boxed{\text{En } 0 :}$ On a

$$\begin{aligned}\left|\ln(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right| &= \left|\ln(x)\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right| \\ &= \left|\ln(x)\Big(\ln(1+x^2)-2\ln(x)\Big)\right| \underset{x\to 0}{\sim} 2\left|\ln^2(x)\right| = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\end{aligned}$$

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann) donc, par comparaison, $x \longmapsto \ln(x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ l'est aussi.

$\hookrightarrow$ $\boxed{\text{En } +\infty :}$ On a $\left|\ln(x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ (croissances comparées).

Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) donc, par comparaison, $x \longmapsto \ln(x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ l'est aussi.

On a donc démontré que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \text{ est convergente.}}$

Exercice 2

E3A PSI 2015 épreuve 1 (extrait)

d'après un corrigé de M. Devulder.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f_x : t \longmapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]1,+\infty[$. On a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 1 et de $+\infty$.
   - Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$ et il y a intégrabilité si et seulement si $x > 0$ (Riemann).
   - Au voisinage de 1^+, $f_x(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ est intégrable (Riemann translatée).

   La fonction f_x étant positive, l'existence de l'intégrable équivaut à l'intégrabilité de f_x sur $]1,+\infty[$ et donc
   $$\boxed{I = \mathbb{R}^{+*}.}$$

2. L'application $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente en $+\infty$ à e^{-x} et donc intégrable au voisinage de $+\infty$. L'intégrale proposée existe donc. On a
   $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \Big[\operatorname{Arctan}(e^x)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

3. L'application $u \longmapsto \operatorname{ch}(u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée ne s'annule pas. Il est donc licite de poser $t = \operatorname{ch}(u)$ dans l'intégrale qui définit $f(1)$. On obtient
   $$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)\sqrt{\operatorname{ch}^2(u)-1}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{e^u+e^{-u}} = \frac{\pi}{2}$$

4. Le même changement de variable donne

$$f(2) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\text{ch}^2(u)} = \left[\frac{\text{sh}(u)}{\text{ch}(u)}\right]_0^{+\infty} = 1$$

On a utilisé $\text{ch}(u) \sim e^u/2 \sim \text{sh}(u)$ *au voisinage de* $+\infty$.

5. $f(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive entre deux bornes « dans le bon sens ». Ainsi, par positivité de l'intégrale :

$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) \geq 0.}$$

Comme la fonction intégrée est continue, positive et non nulle, on peut même dire que

$$\forall x > 0,\ f(x) > 0$$

6. Si $x \leq y$ alors pour tout $t > 1$ on a $f_x(t) \geq f_y(t)$ (avec les notations utilisées en 1). On en déduit en intégrant que $f(x) \geq f(y)$. Ceci montre que :

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } I.}$$

Comme ci-dessus, on pourrait même montrer une stricte monotonie.

7. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres (ou de dérivation sous le signe intégrale).
   - $\forall x \in I,\ t \longmapsto f_x(t)$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.
   - $\forall t > 1,\ x \longmapsto f_x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I de dérivée $x \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.
   - $\forall x \in I,\ t \longmapsto -\dfrac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ est continue par morceaux sur $]1, +\infty[$.
   - **Hypothèse de domination restreinte :** Pour tout $[a, b] \subset I$, on a

$$\forall x \in [a, b],\ \forall t > 1,\quad \left|-\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\right| \leq \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}.$$

   Le majorant est continu sur $]1, +\infty[$, équivalent au voisinage de 1^+ à $\dfrac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{2}}$ et donc prolongeable par continuité en 1 (valeur 0), équivalent à $\dfrac{\ln(t)}{t^{a+1}}$ au voisinage de $+\infty$ et donc négligeable devant $\dfrac{1}{t^{1+a/2}}$ (croissances comparées puissance-logarithme). Comme $1 + a/2 > 0$, il y a aussi intégrabilité du majorant au voisinage de $+\infty$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et indique que $f \in C^1(I)$ avec $\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\, dt.}$

La fonction intégrée ci-dessus est positive et on a donc $f'(x) \leq 0$, on retrouve la décroissance de f sur I.

8. • $t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et $t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ en est une primitive.
   • $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{x+1}}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ de dérivée $t \mapsto -\dfrac{(x+1)}{t^{x+2}}$.
   • $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+1}}$ est de limite nulle en 1 et en $+\infty$.
   On peut donc intégrer par parties pour obtenir

$$\forall x > 0,\ f(x) = (x+1)\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}}\, dt$$

En écrivant que $\sqrt{t^2-1} = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ et comme toutes les intégrales existent, on a alors

$$\forall x > 0,\ f(x) = (x+1)\left(f(x) - f(x+2)\right)$$

On en déduit que $\boxed{f(x+2) = \dfrac{x}{x+1} f(x).}$

9. Montrons par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f(2p) = \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}$$

- **Initialisation :** le résultat est vrai pour $p = 1$ car $f(2) = 1$.
- **Hérédité :** soit $p \geq 2$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang $p-1$. On connaît alors $f(2p-2)$ et la question précédente donne $f(2p)$ en fonction de $f(2(p-1))$. On obtient le résultat au rang p en combinant les résultats.

10. Soit $x > 0$. On a

$$\phi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \phi(x)$$

11. ϕ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, comme f. On a donc, avec la question précédente,

$$\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim_{x\to 0^+} \phi(x+1) = \phi(1) = f(1)f(2) = f(1)$$

Or, $\phi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} xf(x)f(1)$ et donc $xf(x) \to 1$ quand $x \to 0^+$ et ainsi $\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}.}$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(n) = \phi(1) = \dfrac{\pi}{2}$ (périodocité de ϕ). Ceci s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$$

D'après la décroissance et positivité de f,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n+1)^2 \leq f(n)f(n+1) \leq f(n)^2$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{\pi}{2n} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2(n-1)}$$

Majorant et minorant étant tous deux équivalent à $\pi/2n$ au voisinage de $+\infty$, il en est de même de $f(n)^2$. Et comme on peut élever un équivalent à une puissance constante, par le théorème d'encadrement, on a finalement

$$\boxed{f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

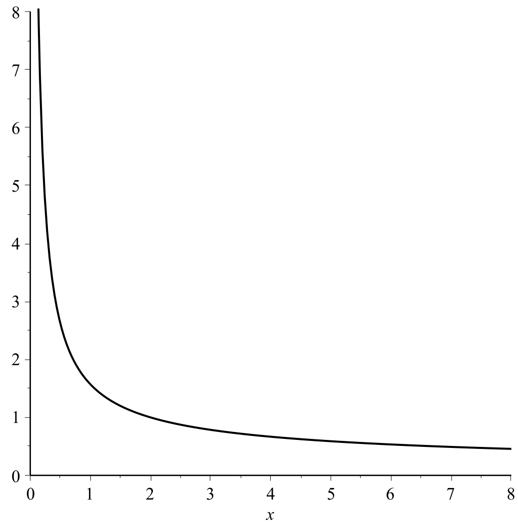
13. Toujours par décroissance de f, en notant $E(x)$ la partie entière de x, on a

$$\forall x \geq 1, \quad f(E(x)) \leq f(x) \leq f(E(x)+1).$$

Comme $E(x)$ et $E(x)+1$ équivalent tout deux à x au voisinage de $+\infty$ (ils diffèrent de x de moins de 1 qui est négligeable devant x) la question précédente donne que le majorant et le minorant sont tous deux équivalents à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ et donc, par encadrement,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.}$$

14. On a la décroissance de f. La courbe aux voisinage de 0 et de $+\infty$ est proche de celle des fonctions équivalentes trouvées.



15. Avec ce qui précède, ϕ tend vers $\pi/2$ quand $x \to +\infty$. Or, pour tout x on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(x) = \phi(x+n)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x > 0,\ \phi(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 3

Polynômes de Lagrange

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un $n-$uplet de réels que l'on suppose tous **distincts deux-à-deux**.
Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

1. (a) Par définition, on a $L_1(X) = \dfrac{X - a_2}{a_1 - a_2}$ et $L_2(X) = \dfrac{X - a_1}{a_2 - a_1}$. Comme $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, on obtient :

$$\boxed{L_1(X) = 1 - X \text{ et } L_2(X) = X.}$$

   (b) Montrons que (L_1, L_2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 &\iff \lambda_1(1 - X) + \lambda_2 X = 0 \\ &\iff \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)X = 0 \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \quad \iff \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, la famille (L_1, L_2) est libre. Comme elle est de cardinal $2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$, on a bien

$$\boxed{(L_1, L_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X].}$$

(c) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$. Il est clair que F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ et qu'il est non vide (il contient le polynôme nul). Montrons qu'il est stable par combinaisons linéaires.
Soient $(P, Q) \in F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $P(0) = P(1) = Q(0) = Q(1) = 0$.

$$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$$
$$(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$$

Ainsi, $(\lambda P + \mu Q)$ appartient à F.
On a bien démontré que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$

(d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Analyse : Supposons que P s'écrive $P = A + B$ avec $A(X) = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ et $B \in F$.
On a donc $B(0) = P(0) - A(0) = P(0) - b = 0$ et $B(1) = P(1) - A(1) = P(1) - (a + b) = 0$.
Par conséquent, $b = P(0)$ et $a = P(1) - P(0)$. Ainsi,

$$(*) \quad \begin{cases} A = (P(1) - P(0))X + P(0), \\ B = P - A \end{cases}$$

Ainsi, si A et B existent, ils sont uniquement déterminés par $(*)$.
Synthèse : Vérifions que A et B conviennent : on a clairement $A \in \mathbb{R}_1[X]$ et $P = A + B$.
Et pour finir : $B(0) = P(0) - A(0) = 0$ et $B(1) = P(1) - A(1) = P(1) - (P(1) - P(0)) - P(0) = 0$. Donc $B \in F$.
Conclusion : On a démontré :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \exists! A \in \mathbb{R}_1[X],\ \exists! B \in F, \quad P = A + B.$$

C'est la définition de $\boxed{\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus F.}$

2. On revient désormais au cas général. Calculons $L_i(a_j)$.

- Si $j \neq i$, alors le facteur $(X - a_j)$ apparaît dans l'écriture de L_i et donc a_j est racine de L_i : $L_i(a_j) = 0$.
- Si $j = i$, alors $L_i(a_i) = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$.

Ainsi $\boxed{\text{Pour tout } (i, j) \in \{1, \ldots, n\},\ L_i(a_j) = \delta_{i,j} \text{ où } \delta_{i,j} \text{ désigne le symbole de Kronecker.}}$

3. Tout d'abord, il est évident que $L_i(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(X) = 0$.
Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. On spécialise $X = a_j$.
On obtient $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{La famille } (L_1, \ldots, L_n) \text{ de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ est libre.}}$

4. D'autre part, cette famille est de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ donc

$$\boxed{(L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On sait que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par conséquent, P se décompose dans cette base :

$$\exists! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad P(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(X).$$

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. On spécialise $X = a_j$. On obtient $P(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$.

On a donc démontré : $\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \text{ on a } P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i(X).}$

6. Avec $P(X) = 1$, on obtient $\sum_{i=1}^{n} L_i(X) = 1$. Puis, avec $P(X) = X$, on trouve $\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(X) = X$.
7. Soit $\varphi : \ P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \Big(P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)\Big) \in \mathbb{R}^n$.
   Montrons que φ est une application linéaire.
   Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= \Big((\lambda P + \mu Q)(a_1), \ldots, (\lambda P + \mu Q)(a_n)\Big) \\ &= \lambda\Big(P(a_1), \ldots, P(a_n)\Big) + \mu\Big(Q(a_1), \ldots, Q(a_n)\Big) \ = \ \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{On a démontré que } \varphi \text{ est une application linéaire.}}$
8. On désigne par φ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Montrons que $\varphi_n \ : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \longmapsto \Big(P(a_1), \ldots, P(a_n)\Big) \in \mathbb{R}^n$ est bijective.

   Si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$ alors P est un polynôme de degré strictement inférieur à n et s'annulant en n points distincts : $a_1, \ldots, a_n$. Ainsi P est le polynôme nul.
   Par suite, $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0\}$ et φ_n est injective.

   D'une part, φ_n est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ et d'autre part, ces deux espaces vectoriels sont de même dimension n. Par conséquent, $\boxed{\varphi_n \text{ est bijective.}}$
9. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par définition, $\varphi_n^{-1}(e_i)$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui vérifie $P(a_j) = 0$ si $j \neq i$ et $P(a_i) = 1$.

   En utilisant la question 5, on obtient $\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \varphi_n^{-1}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} P(a_j) L_j(X) = L_i(X).}$
10. Par linéarité de φ_n^{-1}, on a immédiatement

$$\boxed{\forall u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_n^{-1}(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_n^{-1}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i(X).}$$

11. On utilise le cours. On sait que

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad &\iff \quad \varphi(P) = 0 \\ &\iff \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(a_i) = 0, \\ &\iff \quad P_0 = (X - a_1) \ldots (X - a_n) \text{ divise } P \qquad\qquad \text{car } a_1, \ldots, a_n \text{distincts.} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = P_0.\mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P_0) = n$.

   Or par définition de la division euclidienne de P par P_0,

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \exists ! Q \in \mathbb{R}[X], \ \exists ! R \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad P(X) = Q(X)P_0(X) + R(X).$$

   C'est la définition de $\boxed{\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus P_0.\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus \mathrm{Ker}(\varphi).}$

Problème
Centrale PC 2016 maths 2 (extraits)

à partir d'un corrigé d'A. Pichoff

Partie I : Opérateur de translation

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).
   Alors, $\tau(P)$ est de la forme :
   $$P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$
   Comme $a_d \neq 0$:
   $$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P)}$$
2. Notons que $\tau^0(P) = \mathrm{Id}(P) = P$.
   Et que si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
   Ainsi, par récurrence
   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$
3. D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h+1$),
   $$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$$
   M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc
   $$\boxed{\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ M_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$
4. **(5/2)** La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres (répétées avec multiplicités) sont ses coefficients diagonaux. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$. Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres,
   $$\boxed{\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}}$$
   Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité. Ainsi,
   $$\boxed{M \text{ et } \tau \text{ ne sont pas diagonalisable}}$$
5. Pour les 5/2 : 0 n'étant pas valeur propre de τ,
   $$\boxed{\tau \text{ est bijective}}$$
   Pour tous : La matrice M est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Donc M est inversible et donc $\boxed{\tau \text{ est bijective}}$

Puis si on considère $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \longmapsto P(X-1)$,
on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{Id}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \tau(\overline{\tau}(P))(X) = \overline{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\overline{\tau}(P))(X)$$

Donc

$$\boxed{\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)}$$

Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$.
Donc la formule est toujours vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

6. Avec l'expression de τ^{-1}, on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$$\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\dbinom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

7. La $k+1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est justement $v_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$.

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \dbinom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc

$$\boxed{Q = M^T}$$

8. M est inversible, donc $Q = M^T$ également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.
Puis par équivalence : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$.
La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})^T\right)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})\right)_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \left((M^{-1})\right)_{j+1,k+1} v_j$$

$$\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j}$$

9. On a alors $\boxed{v_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k}$

On vérifie bien : $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k}$

Partie II : Opérateur de différence

10. Avec les mêmes notations qu'en $1.A.1$), avec P *non constant* on a :

$$\delta(P)(X) = a_dX^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_kX^k - a_dX^d - a_{d-1}X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_kX^k = da_dX^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_kX^k$$

Comme $a_d \neq 0$: $\boxed{\text{si } P\text{, non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \mathrm{cd}(P)}$

11. D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.
Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$. Donc

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

12. Si $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$.

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leqslant (j-1) + 1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!],\ \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

Si $P \in \mathrm{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.
Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leqslant n - j$.
Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

13. Notons Δ, la matrice de δ dans la base (P_k).
Par construction de $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$.

Puis comme M commute avec I_{n+1}, alors d'après la formule de Newton : $\Delta^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M^j$.

Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\ \delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j}$$

14. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = [\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P)](X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

il s'agit bien du polynôme nul.

Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$: $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$

15. (a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$. Donc

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}}$$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors
$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$
Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$. Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

(c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$. Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.
Considérons alors A, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.
Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbf{R}_1[X]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

16. (a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que On a vu (question 12) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.
Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0).

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \operatorname{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

(b) Soit V stable par δ.
Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \operatorname{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^n(P)) \subset V$.
Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...
V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.
Notons $(e_0, \dots e_d)$ une base de V. Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d.
Sinon, on aurait une famille libre de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible.
Donc il existe P dans V de degré $r \geqslant d$.
Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \operatorname{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d+1$. Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions :

$$\boxed{\text{il existe } d \in [\![0, n]\!] \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X]}$$

Partie III : Polynômes de Hibert

Généralités

17. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(H_k) = k$.
    Donc la famille $(H_0, H_1, \dots H_n)$ est une famille de degrés échelonnés, donc elle est libre.
    Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$\boxed{(H_0, H_1, \dots H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

18. $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$. Et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\delta(H_k)(X) &= H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left((X+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) - (X-k+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)
\end{aligned}$$

$$\delta(H_k) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)((X+1)-(X-k+1)) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right) \times k = H_{k-1}$$

Bilan :

$$\boxed{\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \delta(H_k) = H_{k-1}}$$

19. Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.
    Ainsi M' est exactement la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n$. Par conséquent,

$$\boxed{M \text{ et } M\prime \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes)}}$$

20. Pour tout $k, \ell \in [\![0,n]\!]$, on a (*par récurrence pour* $\ell \geqslant k$) :

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si} \quad \ell \geqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis comme $h \neq 0$, $H_h(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$.
Par conséquent :

$$\boxed{\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

21. Puisque (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
    il existe $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell H_\ell$. Puis, par linéarité :

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell}^{n} a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

Donc

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) H_k}$$

Polynômes à valeurs entières

22. Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.
Si $k < 0$, en notant $p = -k$, on a :

$$\begin{aligned} H_n(k) &= \frac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1)) = \frac{1}{n!}(-p)(-(p+1))\dots(-(p+n-1)) \\ &= \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{H_n(k) = \begin{cases} \dbinom{k}{n} & \text{si} \quad k \geqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k \in [\![0, n-1]\!] \\ (-1)^n\dbinom{n-1-k}{n} & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}}$$

23. Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisqu'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}}$$

24. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(P)}$$

25. Si P est à valeurs entières sur les entiers,
alors par récurrence (sur $h \in \mathbb{N}$), pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$;
et donc en particulier $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entières.
Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers,
alors $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i H_i$, puis $P(k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).
Bilan :

$$\boxed{P \text{ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans } (H_k) \text{ sont entières}}$$

26. Supposons que P, de degré d, est à valeurs entières sur les entiers,

Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i H_i$.

Et donc

$$d!P = \sum_{i=0}^{d} a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^{d}\left(a_i \times d(d-1)\dots(i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1}(X-j)\right)$$

$$\boxed{\text{Il s'agit bien d'un polynôme } d!P \text{ à coefficients entiers.}}$$

Comme le montre le polynôme $P = \dfrac{1}{2}X^2$, de degré 2 :
on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{La réciproque est donc fausse.}}$$