Devoir non surveillé 6 - Correction

Thème : Projecteurs, noyaux itérés

Remarques générales

• Attention au vocabulaire :

- Pour introduire un objet avec lequel on va travailler (par exemple pour montrer une inclusion) : **Soit ... On se donne...**
Par exemple : « Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$*. »*
- Pour définir un nouvel objet à partir de ceux qui sont déjà introduit : **On pose...**
Par exemple : « Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$*. On pose* $y = f(x)$*. »*
Cela n'a aucun sens d'écrire : « On pose $f \circ p = p$ ».
- Lorsqu'on veut montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_1$ implique une propriété $\mathcal{P}_2$, on commence par : **On suppose...**
Par exemple : « On suppose que $f \circ p = p \circ f$*. »*

• Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, on évitera l'analyse-synthèse lorsque :

- on peut utiliser un argument de dimension
- on connaît déjà la décomposition

Cela permet une rédaction plus rapide. L'analyse/synthèse permet de trouver la décomposition lorsqu'elle n'est pas immédiate.

• Pour montrer que deux endomorphismes f et g de E sont égaux, il faut montrer que $\boxed{\forall x \in E}$ on a $f(x) = g(x)$. Cela ne suffit évidemment pas de le montrer pour $x \in \mathrm{Ker}(f)$ (ou bien pour $x \in \mathrm{Im}(f)$).

• Un raisonnement qui n'utilise pas $\mathcal{P}_k$ pour montrer $\mathcal{P}_{k+1}$ n'est pas une récurrence.

• Il n'y a pas de théorème de la limite monotone pour les suites croissantes d'espaces vectoriels...

Dans la question 2(a) de l'exercice 3, il fallait justifier l'existence d'un entier $p \in [\![1, n]\!]$ et pas seulement $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$. Pour le démontrer on avait besoin de la non-injectivité de f : $\dim(\mathrm{Ker}(f) \geq 1$, puis on pouvait raisonner par l'absurde. Si toutes les inclusions sont strictes, on obtient (par récurrence) que $\dim(\mathrm{Ker}(f^{n+1}) \geq n+1$, ce qui est impossible dans un espace vectoriel de dimension n.

Personne n'a vraiment bien écrit le raisonnement.

Exercice 1

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$ et $G = \{(x,y,z) \in E,\ 3x - y + 2z = 0\}$.

1. On donne deux méthodes.

   • **Avec un argument de dimension :**
   D'une part, si $u \in F \cap G$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = (a,a,0)$ et tel que $3a - a = 0$.
   On obtient $a = 0$, puis $u = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0,\}$.
   D'autre part, F est une droite vectorielle et G un plan vectoriel donc
   $$\dim(F) + \dim(G) = 1 + 2 = 3 = \dim(E).$$
   Par conséquent $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

- **Avec un raisonnement par analyse et synthèse :**

Analyse : Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Supposons connaître $v\in F$ et $w\in G$ tels que $u=v+w$.
On a $v\in F$ donc il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $v=(a,a,0)$. Alors $w=u-v=(x-a,y-a,z)\in G$ s'écrit :

$$3(x-a)-(y-a)+2z=0.$$

Par conséquent, $a=\dfrac{1}{2}(3x-y+2z)$ et

$$\begin{array}{rcl} v &=& \frac{1}{2}(3x-y+2z).(1,1,0) \\ w &=& u-v \;=\; \frac{1}{2}(-x+y-2z,-3x+3y-2z,2z) \end{array}$$

Ainsi, si v et w existent, ils sont uniquement déterminés par ces égalités.

Synthèse : On vérifie que v et w conviennent
D'une part, $v+w=(x,y,z)=u$.
D'autre part, $v=\dfrac{1}{2}(3x-y+2z).(1,1,0)\in F=\mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$.
Et enfin, $3\,\dfrac{-x+y-2z}{2}-\dfrac{-3x+3y-2z}{2}+2\dfrac{2z}{2}=0$ donc $w\in G$.

Conclusion : On a démontré que pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique $v\in F$ et un unique $w\in G$ tels que $u=v+w$. C'est la définition de $\boxed{\mathbb{R}^3=F\oplus G.}$

Remarque : Cette méthode est plus longue, mais le temps perdu ici sera récupéré dans la question suivante !

2. On note p la projection sur G dans la direction de F.
En utilisant la première méthode : On sait que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$ donc pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, il existe un unique $u\in F$ et un unique $w\in G$ tels que $u=v+w$. Par définition de p, on a $w=p(u)$. Déterminons donc w.
On a $v\in F$ donc il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $v=(a,a,0)$. Alors $w=x-v=(x-a,y-a,z)\in G$ s'écrit :

$$3(x-a)-(y-a)+2z=0.$$

Par conséquent, $a=\dfrac{1}{2}(3x-y+2z)$ et

$$\begin{array}{rcl} v &=& \frac{1}{2}(3x-y+2z).(1,1,0) \\ w &=& u-v \;=\; \frac{1}{2}(-x+y-2z,-3x+3y-2z,-2z) \end{array}$$

On a donc $\boxed{p(u)=w=\dfrac{1}{2}(-x+y-2z,-3x+3y-2z,2z).}$

En utilisant la seconde méthode : Le raisonnement par analyse et synthèse nous donne directement :

$$\boxed{p(u)=w=\frac{1}{2}(-x+y-2z,-3x+3y-2z,2z).}$$

3. La matrice M de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est déterminée par $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x/2+y/2-z\\-3x/2+3y/2-z\\z\end{pmatrix}$.

On trouve $\boxed{M=\begin{pmatrix}-1/2&1/2&-1\\-3/2&3/2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q deux **projecteurs** de E.

1. Puisque p est un projecteur, on a $\boxed{E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p).}$

2. Montrons que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id)$ (résultat de cours + DNS0).

   On sait que $p \in \mathcal{L}(E)$ et que $p \circ p = p$. On raisonne par double inclusion.

   • Soit $y \in \text{Im}(p)$.
   Il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Et donc $(p - Id_E)(y) = p(y) - y = p(p(x)) - p(x) = p \circ p(x) - p(x) = 0$.
   Ainsi $y \in \text{Ker}(p - Id_E)$. On a donc déjà démontré l'inclusion $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(p - Id_E)$.

   • Soit $y \in \text{Ker}(p - Id_E)$. On a donc $y = p(y) \in \text{Im}(p)$. On a démontré l'inclusion $\text{Ker}(p - Id_E) \subset \text{Im}(p)$ d'où le résultat.

3. Montrons l'équivalence $\boxed{(1) \qquad p \circ q = p \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p).}$
   On raisonne par double implication.

   • Supposons que $p \circ q = p$
   Soit $x \in \text{Ker}(q)$. On a donc $q(x) = 0$ et donc $p(x) = p \circ q(x) = p(q(x)) = p(0) = 0$ car q est linéaire.
   Ainsi $x \in \text{Ker}(p)$.
   On a donc démontré l'inclusion $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$.

   • Supposons à présent que Ker $(q) \subset$ Ker (q).
   Pour montrer l'égalité d'applications $p \circ q = p$, on montre que pour tout $x \in E$, on a $p \circ q(x) = p(x)$.
   On sait aussi que q est un projecteur de E, on a donc

   $$E = \text{Ker}(q) \oplus \text{Im}(q).$$

   Soit $x \in E$. Il existe donc un unique $(x_q, y_q) \in \text{Ker}(q) \times \text{Im}(q)$ tel que $x = x_q + y_q$. On a alors

   $$\begin{aligned} p(x) &= p(x_q) + p(y_q) = p(y_q) \qquad \text{car } x_q \in \text{Ker}(p) = \text{Ker}(q) \\ p \circ q(x) &= p \circ q(x_q) + p \circ q(y_q) = p(0) + p(y_q) = p(x) \qquad \text{car } y_q \in \text{Im}(q) \text{ et donc } q(y_q) = y_q \end{aligned}$$

   Finalement, pour tout $x \in E$, on a $p \circ q(x) = p(x)$, et donc $p \circ q = p$.

   Autre rédaction plus rapide :

   $$\begin{aligned} p \circ q = p \quad &\Longleftrightarrow \quad p \circ (\text{Id} - q) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{Im}(\text{Id} - q) \subset \text{Ker}(p) \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p) \end{aligned}$$

   En effet, q est un projecteur, donc $\text{Id} - q$ aussi et par la question 2 :

   $$\text{Im}(\text{Id} - q) = \text{Ker}(\text{Id} - (\text{Id} - q)) = \text{Ker}(q).$$

   Montrons l'équivalence $\boxed{(2) \qquad q \circ p = p \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Im}(p) \subset \text{Im}(q).}$
   On raisonne par double implication.

   • Supposons que $q \circ p = p$.
   Soit $y \in \text{Im}(p)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = p(x)$.

Alors $y = p(x) = q \circ p(x) = q(p(x)) \in \text{Im}(q)$.
On a donc démontré l'inclusion $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$.

• Supposons que $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$.
Si y est dans $\text{Im}(p)$ alors il est dans $\text{Im}(q)$ et donc $q(y) = y$.
Soit $x \in E$. Come précédemment, il existe donc un unique $(x_p, y_p) \in$Ker$(q)\times$Im(p) tel que $x = x_p + y_p$. On a alors :

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_p) + p(y_p) = p(y_p) = y_p \\ q \circ p(x) &= q(p(x)) = q(y_p) = y_p \qquad \text{car } y_p \in \text{Im}(p) \subset \text{Im}(q) \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in E$, on a $q \circ p(x) = p(x)$, et donc $q \circ p = p$.

Autre rédaction plus rapide :

$$\begin{aligned} q \circ p = p \quad &\iff \quad (\text{Id} - q) \circ p = 0 \\ &\iff \quad \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(\text{Id} - q) \\ &\iff \quad \text{Im}(p) \subset \text{Im}(p) \end{aligned}$$

4. Soit f un endomorphisme de E.
• Supposons que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par f : Soit $x \in E$. Il existe donc un unique $(x_p, y_p) \in$Ker$(q)\times$Im(p) tel que $x = x_p + y_p$. Puisque $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$, on a aussi $f(x_p) \in \text{Ker}(p)$ et $f(y_p) \in \text{Im}(p)$ et donc $p(f(x_p)) = 0$ et $p(f(y_p)) = f(y_p)$.
On obtient :

$$\begin{aligned} f \circ p(x) &= f(p(x)) = f(y_p) \\ p \circ f(x) &= p(f(x)) = p(f(x_p)) + p(f(y_p)) = f(y_p) \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in E$, on a $f \circ p(x) = p \circ f(x)$, et donc $p \circ f = f \circ p$.

• Supposons que $p \circ f = f \circ p$.
Si $x \in \text{Ker}(p)$. Alors $p(x) = 0$. Et donc $p(f(x)) = p \circ f(x) = f \circ p(x) = f(p(x)) = f(0) = 0$.
Donc $f(x) \in \text{Ker}(p)$.

Si $y \in \text{Im}(p)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et donc :
$f(x) = f \circ p(x) = f(p(x)) = f \circ p(x) = p \circ f(x) = p(f(x)) \in \text{Im}(p)$.

Et finalement, $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par f.

On a donc bien démontré :

$$\boxed{p \circ f = f \circ p \qquad \iff \qquad \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Im}(p) \text{ sont stables par } f}$$

Exercice 3

1. Généralités.
   (a) On suppose que f est injectif. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $\text{Ker}(f^k) = \{0\}$.
   Puisque f est injectif, on a $\text{Ker}(f) = \{0\}$. On a aussi $\text{Ker}(f^0) = \text{Ker}(\text{Id}_E) = \{0\}$.

   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ pour lequel on a $\text{Ker}(f^k) = \{0\}$.
   Prenons $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$. On a donc $f^{k+1}(x) = 0$ ou encore $f^k(f(x)) = 0$. Ainsi, $f(x) \in \text{Ker}(f^k)$ et par hypothèse de récurrence, $f(x) = 0$. Et comme f est injective, on obtient bien $x = 0$.

Par le principe de récurrence : $\boxed{\text{si } f \text{ est injectif, alors pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } \mathrm{Ker}(f^k) = \{0\}.}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, montrons que $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$. On a donc $f^k(x) = 0$ et comme f est linéaire :

$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0.$$

Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
On a bien démontré que $\boxed{\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}).}$

(c) Supposons qu'il existe un entier p tel que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.
On montre par une récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}$ que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+k})$.
Pour $k = 0$ et $k = 1$, on a déjà $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+k})$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathrm{Ker}(f^p) = \cdots = \mathrm{Ker}(f^{p+k-1}) = \mathrm{Ker}(f^{p+k})$.
Montrons que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+k+1})$.
D'après la question précédente, on a déjà : $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+k}) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+k+1})$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{p+k+1})$. On a donc $f^{p+k+1}(x) = 0$, ainsi, $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{p+k}) = \mathrm{Ker}(f^{p+k-1})$. Donc $f^{p+k-1}(f(x)) = f^{p+k}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(f^{p+k})$.

Par le principe de récurrence forte, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}(f^p) = \cdots = \mathrm{Ker}(f^{p+k-1}) = \mathrm{Ker}(f^{p+k}).}$$

2. On suppose **désormais** que E est de dimension finie et on note $n = \dim(E)$ et que f n'est **pas injectif**.

(a) On raisonne par l'absurde. Supposons au contraire, que pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, on ait :

$$\mathrm{Ker}(f^p) \neq \mathrm{Ker}(f^{p+1}).$$

Les inclusions suivantes sont donc strictes (la première provient de la non-injectivité de f) :

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Ker}(f) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f^n) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^{n+1}).$$

Et donc, on a les inegalités strictes concernant les dimensions :

$$0 < \dim(\mathrm{Ker}(f)) < \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) < \cdots < \dim(\mathrm{Ker}(f^n)) < \dim(\mathrm{Ker}(f^{n+1})).$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 1$, puis $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \geq 2$, et par une récurrence immédiate :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^{n+1})) \geq n + 1.$$

Mais cette dernière minoration est impossible car $\mathrm{Ker}(f^{n+1})$ est un sous-espace vectoriel de E donc il est de dimension au plus $n = \dim(E)$.
Finalement, $\boxed{\text{il existe un entier } p \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } \mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1}).}$

En appliquant la formule du rang à f^p et à f^{p+1}, on obtient $\dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(\mathrm{Im}(f^{p+1}))$, et comme $\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p)$, on a aussi

$$\boxed{\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1}).}$$

(b) D'après la question 1.c, on a alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Ker}(f^{p+k}) = \mathrm{Ker}(f^p)$, et comme ci-dessus, en appliquant la formule de rang, on obtient $\mathrm{Im}(f^{p+k}) = \mathrm{Im}(f^p)$.

(c) On montre d'abord que $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0\}$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p)$. Ainsi, $f^p(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = f^p(z)$.
On a alors $f^p(x) = f^{2p}(z) = 0$ donc $z \in \mathrm{Ker}(f^{2p}) = \mathrm{Ker}(f^{p+p}) = \mathrm{Ker}(f^p)$ d'après ce qui précède avec $k = p$.

Ainsi, $x = f^p(z) = 0$.
On a donc bien $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0\}$. Et par la formule du rang, on a aussi :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f^p)) + \dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(E).$$

Finalement, on obtient bien $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p).}$

Problème

Mines-Ponts PC 2014

À partir des corrigés de Mme Sidaner et de M. Schnepf.

I - Traces et projecteurs

1. *C'est du cours !*
$$\mathrm{tr}\,(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i,j}a_{i,j} = \mathrm{tr}\,(\mathbb{B}\mathbb{A})$$
2. *C'est aussi du cours !*
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de X. Soient Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors :
$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}Q$$
En appliquant la question précédente avec $\mathbb{A} = Q^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ et $\mathbb{B} = Q$, on obtient :
$$\boxed{\mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}) = \mathrm{tr}\,(QQ^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_{\mathcal{B}}).}$$

Soit P un projecteur de X.

3. *C'est toujours du cours !*
   - Comme P est un endomorphisme de X, $R(P)$ et $N(P)$ sont deux sous-espaces vectoriels de X.
   - Comme X est de dimension finie, la théorème du rang donne :
   $$\dim(X) = \dim(R(P)) + \dim(N(P)).$$
   - Comme $R(P)$ et $N(P)$ sont deux sous-espaces vectoriels de X, le vecteur nul 0_X de X appartient à $R(P) \cap N(P)$.
   Réciproquement, si y est un élément de $R(P) \cap N(P)$, alors d'une part il existe $x \in X$ tel que $y = P(x)$, et d'autre part $P(y) = 0_X$.
   Ainsi, $P(P(x)) = 0_X$. Or $P^2 = P \circ P = P$, donc $P(x) = 0_X$, donc $y = 0_X$.
   Finalement, $R(P) \cap N(P) = \{0_X\}$.
   - On peut bien conclure que
   $$\boxed{X = R(P) \oplus N(P).}$$
4. *C'est aussi dans le cours...*
Soit x appartenant à $R(P)$. Il existe y tel que $x = P(y)$ aussi
$$P(x) = P(P(y)) = P^2(y) = P(y) = x\cdot$$
Soit r le rang de P. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition précédente :
$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
donc $\boxed{\mathrm{tr}\,P = r = \mathrm{tr}\,(\mathbb{P}_{\mathcal{B}}) = r = \mathrm{rg}\,P}$
On pose $P' = I - P$.

5. *Et ça aussi !*
On a vu précédemment que si $x \in R(P)$,$P(x) = x$ donc $P'(x) = 0$ aussi $R(P) \subset N(P')$. Réciproquement, si x est élément de $N(P')$, $P(x) = x$ donc $x \in R(P)$. Aussi $\boxed{R(P) = N(P')}$
On vérifie que P' est aussi un projecteur : comme P et I commutent,
$$P'^2 = (I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$$
En échangeant les rôles de P et de P' (puisque $P = I - P'$), on obtient $\boxed{R(P') = N(P)}$
En fait, le cours affirme que P' est le projecteur sur $N(P)$ parallèlement à $R(P)$, ce qui répond directement à la question.
6. L'application suivante une application linéaire dont l'image est $F + G$.
$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$$
Aussi par le théorème du rang
$$\boxed{\dim(F + G) = \dim(F \times G) - \dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) \leq \dim(F \times G) = \dim F + \dim G}$$
Remarque : on peut aussi exhiber une base d'une famille génératrice de $F + G$ obtenue en concaténant une base de F et une base de G ou utiliser la formule de Grassmann.
7. - Par linéarité de la trace, la trace de S et la somme des traces de P_1, ..., P_m.
   Or, d'après la question 4, la trace d'un projecteur de X est égal à son rang,
   donc $\mathrm{tr}\,(S) = \mathrm{rg}\,(P_1) + \cdots + \mathrm{rg}\,(P_m)$.
   Ainsi, comme somme d'entiers naturels, la trace de S est encore un entier naturel.
   - Si $y \in R\,(S)$, alors il existe $x \in X$ de sorte que $y = S\,(x) = P_1\,(x) + \cdots + P_m\,(x)$.
   Ainsi, $y \in (R\,(P_1) + \cdots + R\,(P_m))$.
   On vient de prouver que $R\,(S) \subset (R\,(P_1) + \cdots + R\,(P_m))$, donc, comme on travaille uniquement sur des espaces vectoriels de dimensions finies,
   $\dim\,(R\,(S)) \leqslant \dim\,(R\,(P_1) + \cdots + R\,(P_m))$, et donc, d'après la question 6,
   $\mathrm{rg}\,(S) \leqslant \dim\,(R\,(P_1)) + \cdots + \dim\,(R\,(P_m))$.
   Or $\dim\,(R\,(P_1)) + \cdots + \dim\,(R\,(P_m)) = \mathrm{rg}\,(P_1) + \cdots + \mathrm{rg}\,(P_m) = \mathrm{tr}\,(S)$,
   et donc :
$$\boxed{\mathrm{rg}\,(S) \leqslant \mathrm{tr}\,(S)}$$

II - Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

1. Soit f_1 un élément non nul de $R(P)$: c'est donc une base de $R(P)$ puisque $\mathrm{rg}\,P = 1$. Comme $P \circ T(f_1) = P\,(T \circ f_1)$, cet élément appartient à $R(P)$. Aussi :
$$\exists \mu \in \mathbb{R}, P \circ T(f_1) = \mu f_1$$
Or pour tout x de X, $P(x)$ est dans $R(P)$ donc $P(x)$ est colinéaire à f_1 : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = \alpha f_1$et donc
$$P \circ T \circ P(x) = P \circ T(\alpha f_1) = \mu\alpha f_1 = \mu P(x)$$
ce qui prouve que :

$$\boxed{P \circ T \circ P = \mu P.}$$

Soit $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ une base de X adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$.

2. Comme f_1 est dans $R(P)$, d'après ce qui précède, $P(f_1) = f_1$.
   De plus, puisque $\mathcal{C}$ est une base de X, on peut trouver $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que
   $$T(f_1) = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n.$$
   Il reste donc à démontrer que $\mu = \alpha_1$.
   On a $PT(f_1) = \alpha_1 P(f_1) + \underbrace{\alpha_2 P(f_2) + \cdots + \alpha_n P(f_n)}_{=0} = \alpha_1 f_1$.
   D'autre part, $f_1 = P(f_1)$ donc $PT(f_1) = PTP(f_1) = \mu f_1$.
   Et comme $f_1 \neq 0$, on obtient $\alpha_1 = \mu$, et donc $\mathbb{T}_{\mathcal{C}}$ est de la forme :
   $$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mu & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \star & & & \end{pmatrix}.$$
   Autre rédaction possible : $PT(f_1) \in R(P)$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PT(f1) = \mu f_1 = \mu P(f_1)$.
   On a alors $P(T(f_1) - \mu f_1) = 0$ et donc $T(f_1) - \mu f_1 \in N(P) =$Vect$\{f_2, \cdots, f_n\}$. On retrouve le même résultat.
3. Par définition de P', et par choix de $\mathcal{C}$, on a $\mathbb{P}'_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix}$. Si on écrit de la même façon, $\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & \mathbb{B} \end{pmatrix}$, un calcul en blocs donne alors :
   $$\mathbb{P}'_{\mathcal{C}}\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ C & \mathbb{B} \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbb{P}'_{\mathcal{C}}\mathbb{T}_{\mathcal{C}}\mathbb{P}'_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \mathbb{B} \end{pmatrix}$$
   Aussi
   $$P' \circ T \circ P' = \alpha P' \Longleftrightarrow \mathbb{P}'_{\mathcal{C}}\mathbb{T}_{\mathcal{C}}\mathbb{P}'_{\mathcal{C}} = \alpha \mathbb{P}'_{\mathcal{C}} \Longleftrightarrow \mathbb{B} = \alpha \mathbb{I}_{n-1}.$$
   On a ainsi vérifié par contraposition que :
   $$\boxed{\mathbb{B} \text{ n 'est pas la matrice d'une homothétie si et seulement si } P' \circ T \circ P' \text{ n'est pas proportionnel à } P'}$$
   Remarque : il suffisait d'une implication donc de montrer que si $\mathbb{B} = \alpha \mathbb{I}_{n-1}$ alors $P' \circ T \circ P' = \alpha P'$.

III - Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l 'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

1. D'après l'exercice 11 (2c) de la feuille 4 (traité en classe), si pour tout $x \in X$, on a $(x, T(x))$ liée, alors T est une homothétie. Par contraposée :
   $$\boxed{\text{Il existe un vecteur } x \in X \text{ tel que } x \text{ et } T(x) \text{ ne soient pas liés.}}$$
2. Soit e_1 un élément tel que e_1 et $T(e_1)$ ne soient pas colinéaires (un tel vecteur existe par la question précédente). On peut compléter cette famille libre en $\boxed{\text{une base } \mathcal{B} = (e_1, T(e_1), e_3, \cdots, e_n) \text{ de } X}$ et dans cette base T a la matrice recherchée.

3. Procédons par récurrence.

• Initialisation : $n=2$. On a trouvé dans la question précédente une base $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

or $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} = \mathrm{a}$ donc $a=0$. La base $\mathcal{B}$ convient.

• Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n-1 \geq 1$.On a montré dans la question précédente l'existence d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-1}$. Comme $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{A})$, $\mathrm{tr}\,(\mathbb{A}) = 0$.

Si $\mathbb{A}$ est de la forme $\alpha \mathbb{I}_{n-1}$, $\alpha = 0$ et la base $\mathcal{B}$ convient.

Sinon :

• Méthode 1 : avec un endomorphisme.

Soit T_1 l'endomorphisme de $X_1 = \mathrm{Vect}\{e_2, \cdots, e_n\}$ de matrice $\mathbb{A}$ dans la base $\mathcal{B}_1 = \{e_2, \cdots, e_n\}$.
Cet endomorphisme n'est pas une homothétie et est de trace nulle.
Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_1' = \{e_2', \cdots, e_n'\}$ dans laquelle $\mathbb{A}_1$ la matrice de T_1 a une diagonale (principale) de 0. Soit $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2', \cdots, e_n'\}$ base de X. Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de T n'a que des 0 sur la diagonale. En effet :

$\hookrightarrow$ Par la matrice précédente, $T(e_1) \in X_1$ ce qui justifie que dans $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ ait un 0 en ligne 1 colonne 1.

$\hookrightarrow$ Si $x \in X_1$,$T(x) = \alpha_x e_1 + T_1(x)$; aussi, la composante de $T(e_i')$ sur e_i' est la même que celle de $T_1(e_i')$; elle est donc nulle. Tous les termes diagonaux de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ sont donc nuls.

• Méthode 2 : avec des produits par blocs.

Par hypothèse de récurrence, A est semblable à une matrice dont tous les coefficents diagonaux sont nuls.
Ainsi il existe une matrice inversible $\mathbb{Q}_1$ telle que $A_1 = \mathbb{Q}_1^{-1} A \mathbb{Q}_1$ n'ait que des 0 sur sa diagonale principale.

On pose alors $\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $\mathbb{Q}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

En effectuant le produit par bloc, on montre que $\mathbb{Q}\mathbb{Q}' = I_n$ donc $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}^{-1}$. Et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}\mathbb{Q} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1^{-1} & \\ \star & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{Q}_1^{-1}A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ \star & & & \end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

Et M est une matrice dont la diagonale est composée d'un 0 suivi des éléments diagonaux de $\mathbb{A}_1$ nuls par construction.

Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe une base dans laquelle la matrice de } T \text{ n'a que des 0 sur sa diagonale.}}$$

Soit t_i avec $i = 1, \ldots, n$ une suite de n nombres réels vérifiant $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{t_i}$.

4. Soit $T' = T - t_1 I$. Cet endomorphisme n'est ni une homothétie ni l'endomorphisme nul puisque T n'est pas colinéaire à I. Par la question II.2, il existe $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathbb{T}'_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

où $a = \mathrm{tr}\,\mathrm{T}' = \mathrm{tr}\,\mathrm{T} - \mathrm{t_1 tr}\,\mathrm{I} = (\mathrm{t_1} + \mathrm{t_2}) - 2\mathrm{t_1} = \mathrm{t_2} - \mathrm{t_1}$ d'où

$$\boxed{\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & t_2 - t_1 \end{pmatrix} + t_1 \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} t_1 & b \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geq 3$, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $LTL = tL$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$.

5. Par la propriété admise avec $t = t_1$,, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $LTL = t_1 L$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$. Par la question II.2, dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à la décomposition $E = R(L) \oplus N(L)$

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} & \\ \mathrm{x} & & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & & \\ \mathrm{x} & & & & \end{pmatrix}.$$

et par la question II.3 comme $L'Tl'$ n'est pas proportionnel à I, $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice colinéaire à I.

6. La récurrence est suggérée et a été initialisée pour $n = 2$ en question II.4. Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n - 1 \geq 2$ et démontrons la à l'ordre n. Par la question précédente, il existe $\mathcal{C} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ telle que :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} & \\ \mathrm{x} & & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & & \\ \mathrm{x} & & & & \end{pmatrix}.$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice d'homothétie et $\mathrm{tr}\,(\mathbb{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) - \mathrm{t_1} = \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} \mathrm{t_i}$.

Soit T_1 l'endomorphisme de $\mathrm{Vecte_2}, \cdots, \mathrm{e}_n$ de matrice $\mathbb{B}$ dans la base $\mathcal{C}_1 = \{\mathrm{e_2}, \cdots, \mathrm{e}_n\}$. T_1 n'est donc pas une homothétie et par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{C}''$ telle que $\mathbb{T}_{1,\mathcal{C}''} = \mathbb{B}'$ est une matrice de termes diagonaux $T_2, \cdots, t_n$.

Soit $\mathcal{B}'' = \{e_1\}_{\cup}\mathcal{C}''$. La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}''$ est $\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_1 \end{pmatrix}$ où $\mathbb{Q}_1$ est la matrice de passage de

$\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}''$ et $\mathbb{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_1^{-1} \end{pmatrix}$. Un calcul en blocs identique à celui de la question 13 donne alors :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}''} = \mathbb{Q}^{-1} \begin{pmatrix} t_1 & \mathrm{x} & \cdots & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \mathrm{x} & & & \end{pmatrix} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} t_1 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{B}' & \\ \times & & & \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice a bien comme éléments diagonaux $t_1, \cdots, t_n$. Ainsi on a vérifié par récurrence que :

$\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B}'' \text{ dans laquelle la diagonale de } \mathbb{T}_{\mathcal{B}''} \text{ ait pour éléments diagonaux les } t_i \text{ où } i \in \{1, \dots, n\}.}$

Remarque : on pouvait là aussi raisonner avec des produits matricile par blocs.

IV - Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de X vérifiant $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) \geq \mathrm{rg}\,(\mathrm{T})$. *On pose $\rho = \mathrm{rg}\,(T)$ et $\theta = \mathrm{tr}\,(\mathrm{T})$.*

1. Par le théorème du rang, $\dim N(T) = n - \rho$. Soit X_1 un supplémentaire de $N(T)$ et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base adaptée à la décomposition $X = F \oplus N(T)$.

$$\boxed{\text{Dans cette base } \mathcal{B},\ \mathbb{T}_{\mathcal{B}} \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}.}$$

Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie.

2. Soit T_1 l'endomorphisme de X_1 de matrice $\mathbb{T}_1$ dans la base $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \cdots, e_\rho\}$.
Comme $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_{\mathcal{B}}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_1) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_1)$, $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_1)$ est élément de $\mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}_1) \geq \rho$.
Soient $t_i = 1$ pour $i \in \{1, \dots, \rho - 1\}$ et $t_\rho = \mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) - (\rho - 1) \geq 1$. Ces ρ nombres sont des entiers naturels non nuls dont la trace est égale à $\mathrm{tr}\,(\mathbb{T}_1)$. Par la question III.6, T' n'étant pas une homothétie, il existe $\mathcal{B}_1''$ une base de X_1 où $\mathbb{T}_1'$ la matrice de T' dans la base $\mathcal{B}_1''$ admet comme éléments diagonaux $t_1, \cdots, t_\rho$. Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1'' \cup \{e_{\rho+1}, \cdots, e_n\}$.

$$\boxed{\text{Dans la base } \mathcal{B}', \text{ la matrice de } T \text{ a la forme } \begin{pmatrix} \mathbb{T}_1' & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2' & \mathbb{O} \end{pmatrix} \text{ où } \mathbb{T}_1' \text{ a pour éléments diagonaux des entiers non nuls.}}$$

3. Soient $C_1, \cdots, C_\rho$ les premières colonnes de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$. Soit P_i l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathbb{P}_{i\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{t_i} C_i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice ayant un 1 en place (i, i), on a $\mathbb{P}_i^2 = \mathbb{P}_i$, ce qui prouve que les P_i sont des projecteurs. Ainsi

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{\rho} t_i P_i = \underbrace{P_1 + \cdots P_1}_{t_1 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{P_\rho + \cdots + P_\rho}_{t_\rho \text{ fois}}.}$$

On suppose maintenant que T_1 est la matrice d'une homothétie.

4. Comme $\mathbb{T}_1 = \alpha \mathbb{I}_\rho$, $\mathrm{tr}\,(\mathrm{T}) \geq \rho$ donne $\alpha \geq 1$. Si $\alpha = 1$, on peut utiliser la méthode précédente (on peut même l'utiliser si $\alpha \in \mathbb{N}$) en décomposant en somme de ρ projecteurs de rang 1 .

Si $\alpha > 1$, soit P_0 de matrice $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{O} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ dans la bas $\mathcal{B}'$. Alors $T - P_0$ a pour matrice :

$(\mathbb{T}-\mathbb{P}_0)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_1'' & 0 \\ \mathbb{T}_2' & 0 \end{pmatrix}$ où T_1'' est une matrice ayant pour éléments diagonaux $(\alpha-1, \alpha, \cdots, \alpha)$: ce n'est donc pas une matrice d'homothétie. De plus, $T-P_0$ est de rang au plus ρ (sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ a $n-\rho$ colonnes nulles). Ainsi $T-P_0$ vérifie

$$tr(T-P_0) = \rho\alpha - 1 > \rho - 1 \Longrightarrow tr(T-P_0) \geq \rho \geq \operatorname{rg}(T-P_0)$$

donc on peut appliquer la question précédente. $T' = T - P_0$ est une somme de projecteurs et comme $T = P_0 + (T - P_0)$:

$$\boxed{T \text{ est une somme de projecteurs}}$$

On a ainsi prouvé que T est une somme de projecteurs si et seulement si sa trace est un entier naturel supérieur ou égal à son rang.