Devoir non surveillé 5 - Correction

Thème : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Remarques générales

• Il y a deux catégories d'étudiants : ceux qui essaient de tenir compte des conseils donnés et qui connaissent leur cours (exemples, **(E)**...) et les autres. Pour ces derniers, il est grand temps de revoir les méthodes de travail.

• Confusions multiples entre f et $f(t)$. Il est incorrect d'écrire $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Cela devient encore plus problématique d'écrire : $e^{-sx}f(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. De quelle variable s'agit-il ?

• Si on a besoin d'une inégalité triangulaire en plus de la positivité de l'intégrale, il faut le préciser.

• « Opérations sur les fonctions intégrables »...Il n'y a guère que la combinaison linéaire de fonctions intégrables qui soit intégrable (inégalité triangulaire + comparaison).
Le produit de deux fonctions intégrables n'est pas toujours intégrable, la composée de deux fonctions intégrables n'est pas toujours intégrable... Chercher des contre-exemples !

• **Q1 :** On ne peut pas majorer $|1-\cos(t)|$ par 1.
La continuité (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ est souvent oubliée. Le signe des fonctions lorsqu'on utilise un théorème de comparaison n'est pas toujours évoqué. On travaillera de préférence avec des valeurs absolues.

• **Q2 :** Quelques uns ne prennent pas le temps de définir la fonction de deux variables, leur raisonnement est souvent incompréhensible.
Quelques confusions entre s et x.
Il manque souvent l'intégrabilité (et en particulier la continuité par morceaux) de $x \longmapsto f(x)e^{-sx}$. Quand elle est évoquée, elle n'est pas toujours démontrée. Et enfin, elle n'est valable que pour $s \in]0,+\infty[$.
Il fallait restreindre l'hypothèse de domination à $s \in [a,+\infty[$ avec $a>0$ fixé. On obtenait que φ est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$.
Le calcul explicite de $\varphi'(s)$ est plus simple avec l'écriture complexe, mais il faut justifier la limite du crochet en $+\infty$ ($s>0$).

• **Q3 (a) :** Pour la dérivabilité de G (on aura besoin de $\mathcal{C}^1$ ensuite), le raisonnement a été rédigé dans un exemple du cours avec une autre fonction (voir p125). Les erreurs et incohérences souvent répétées d'une copie à l'autre, montrent le niveau de connaissance et de réflexion de certains.
Pour la limite, il fallait revenir à la définition d'intégrale convergente. Ce raisonnement classique est à bien revoir.

• **Q3 (b) :** Les hypothèses de l'intégration par parties sont souvent incomplètes.
On ne fait pas l'intégration par parties (calculs) dans une intégrale dont on ne sait pas qu'elle converge. Si c'est le cas, on écrit d'abord l'équivalence du théorème.

• **Q3 (c) :** Les hypothèses du changement de variable sont souvent incomplètes (stricte monotonie). Ici, on pouvait simplement dire qu'il s'agit d'un changement de variable affine.
Le théorème de convergence dominée à paramètre continu est souvent connu mais il faut mentionner le résultat de la question **Q3 (a)** pour la limite.
L'hypothèse de domination est souvent fausse. Quand on ne sait pas comment faire, mieux vaut admettre le résultat...

• **Q4 :** Une majoration donnait plus facilement la réponse que l'application du théorème de convergence dominée. C'est d'ailleurs un **(E1)** du cours puisque f est bornée....

• **Q5 :** L'égalité $\varphi(s) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$ est valable (a priori) sur $]0, +\infty[$ seulement. Il fallait donc passer à la limite quand $s \to 0$ (avec argument de continuité) et non pas évaluer en $s = 0$.

Exercice

1. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour $t > 0$, $h(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$.
   f est un quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ donc f est continue sur cet intervalle.
   Par limite usuelle, $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = \dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et par conséquent intégrable sur $]0, 1]$.
   Pour tout $t > 0$, $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ donc $0 \leq h(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$. L'application $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann) et, par comparaison, h est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   On peut alors conclure que

$$\boxed{t \longmapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$$

2. On démontre directement que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

   On définit l'application $g : (s, x) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[\longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x} e^{-sx}$. On a :

   • Pour tout $x \in]0, +\infty[$: $s \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x} e^{-sx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a $\dfrac{\partial g}{\partial s}(s, x) = -\sin(x) e^{-sx}$.

   • Pour tout $s \in]0, +\infty[$: les applications $x \longmapsto g(s, x)$ et $x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial s}(s, x)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$ et on a les majorations suivantes.

$$|g(s, x)| = \left| \frac{\sin(x)}{x} e^{-sx} \right| = e^{-sx} \frac{|\sin(t)|}{t} \leq e^{-sx} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial s}(s, x) \right| = |-\sin(x) e^{-sx}| \leq e^{-sx}.$$

   Et puisque $s > 0$, l'application $x \longmapsto e^{-sx}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc par comparaison, les applications $x \longmapsto g(s, x)$ et $x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial s}(s, x)$ le sont aussi.

   • Hypothèse de domination restreinte : Soit $A > 0$. Pour tout $s \in [A, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial s}(s, x) \right| \leq e^{-sx} \leq e^{-Ax}$$

   et $x \mapsto e^{-Ax}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, l'hypothèse de domination est satisfaite.
   D'après le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $[A, +\infty[\subset]0, +\infty[$. Elle l'est donc sur $]0, +\infty[$ et la formule de Leibniz donne :

$$\forall s > 0, \qquad \varphi'(s) = -\int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-sx} dt.$$

   On a en particulier, que $\forall s > 0$, $\varphi'(s) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-sx} dt$.

On a $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$ et donc (par linéarité du passage à l'intégrale)

$$\begin{aligned}\forall X > 0, \quad \int_0^X \sin(x)e^{-sx}\, dt &= \mathrm{Im}\left(\int_0^X e^{x(i-s)}dt\right) \\ &= \mathrm{Im}\left[\frac{e^{x(i-s)}}{i-s}\right]_{x=0}^{x=X} = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{X(i-s)}}{i-s}\right) - \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-s}\right)\end{aligned}$$

On a $\left|e^{X(i-s)}\right| = e^{-Xs} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc lorsque X vers $+\infty$ pour $s > 0$ fixé, on obtient $\varphi'(s) = \dfrac{-1}{1+s^2}$.

$$\boxed{\forall s > 0, \quad \varphi'(s) = -\frac{1}{1+s^2}.}$$

3. (a) Soit $G : t \in [0, +\infty[\longmapsto \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

On a pour tout $t \geq 0$, $G(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du$.

Or f définie en début de sujet est continue sur $[0, +\infty[$ donc, par le théorème fondamental de l'analyse, l'application $t \longmapsto \displaystyle\int_1^t \frac{\sin(u)}{u} du$ est sa primitive qui s'annule en 0. En particulier, cette fonction est dérivable sur $[0, +\infty[$ et de dérivée f.

Par opération sur les fonctions dérivable, $\boxed{G \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } G' = -f.}$

De plus, on sait que l'intégrale de Dirichlet est convergente, donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du - \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} I - I = 0.}$$

(b) On pose dans l'intégrale de droite, $u = G$ et $v(t) = e^{-st}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} G(t)e^{-st} = 0$.

Par intégration par parties, les intégrales suivantes sont de même nature :

$$-\int_0^{+\infty} G(t)se^{-st}dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} G'(t)e^{-st}dt = -\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

Et la seconde converge d'après la question 2. On obtient :

$$-\int_0^{+\infty} G(t)se^{-st}dt = \Big[G(t)e^{-st}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = -G(0) + \varphi(s).$$

En enfin, $G(0) = I = \varphi(0)$, donc

$$\boxed{\forall s \geq 0,\ \varphi(s) - \varphi(0) = -\int_0^{+\infty} G(t)se^{-st}dt.}$$

(c) Soit $s > 0$. On pose $u = st$ (changement de variable affine). On obtient :

$$\forall s > 0, \quad \varphi(s) - \varphi(0) = -\int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{s}\right) e^{-u}du.$$

La fonction G est continue sur $[0, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc elle est bornée. Soit $m > 0$ tel que pour tout $x \geq 0$, on ait $|G(x)| \leq m$.

On définit la fonction $h : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,u) & \longmapsto & G\left(\dfrac{u}{s}\right)e^{-u} \end{array} \right.$

On a :

- Pour tout $s \in]0,+\infty[$, $u \longmapsto h(u,s)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t) = 0$, on a :

$$\forall u \geq 0, \quad \lim_{s\to O^+} h(u,s) = 0.$$

- Hypothèse de domination :

$$\forall s \in]0,+\infty[,\ \forall u \in [0,+\infty[, \quad |h(s,u)| = \left|G\left(\frac{u}{s}\right)e^{-u}\right| \leq me^{-u}.$$

La fonction majorante est (continue par morceaux) intégrable sur $[0,+\infty[$, donc par le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$\lim_{s\to0}\int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{s}\right)e^{-u}du = \int_0^{+\infty}\lim_{s\to0} G\left(\frac{u}{s}\right)e^{-u}du = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{s\to0}\varphi(s) = \varphi(0)$, c'est la définition de :

$$\boxed{\varphi \text{ est continue en } 0.}$$

4. On en déduit qu'il existe une constantce $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $s \in]0,+\infty[$, on ait $\varphi(s) = -\mathrm{Arctan}(s)+c$.

   Or, si $s > 0$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $\left|\dfrac{\sin(x)}{x}e^{-sx}\right| = e^{-sx}\dfrac{|\sin(t)|}{t} \leq e^{-sx}$. Et donc :

$$|\varphi(s)| \leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}e^{-sx}\right|dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-sx}dx = \frac{1}{s}.$$

   Par le théorème d'encadrement, on trouve $\boxed{\lim\limits_{s\to+\infty}\varphi(s) = 0.}$

   En passant à la limite quand $s \to +\infty$ dans l'égalité $\varphi(s) = -\mathrm{Arctan}(s)+c$, on trouve $c = \dfrac{\pi}{2}$.

   Et finalement, $\boxed{\forall s > 0, \quad \varphi(s) = -\mathrm{Arctan}(s) + \dfrac{\pi}{2}.}$

5. Et puisque que φ est continue en 0, lorsque s tend vers 0, on obtient :

$$\boxed{\varphi(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$$

Problème

Centrale PC 2018 maths 1 (extrait)

Un corrigé de E. Le Naguard

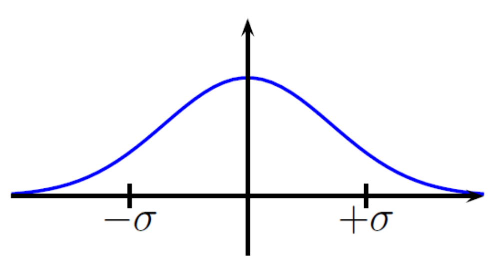
I - Préliminaires

IA - Quelques propriétés de g_σ

1. Pour tout $\sigma > 0$, la fonction g_σ est définie continue positive sur $\mathbb{R}$.
   Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\, g_\sigma(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\, g_\sigma(x)$ donc $g_\sigma(x) = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2}) = O_{-\infty}(\frac{1}{x^2})$.
   Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sont des intégrales de Riemann convergentes, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\sigma(x)|\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\ \mathrm{d}x$ converge. <u>conclusion</u> : $\boxed{g_\sigma \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.
2. On considère le changement de variable $t = \dfrac{x}{\sqrt{2}\,\sigma}$ qui est licite car réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On obtient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\ \mathrm{d}t = 1$ <u>conclusion</u> : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\ \mathrm{d}x = 1}$.
3. La fonction g_σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ g'_\sigma(x) = -\dfrac{x}{\sigma^2}\, g_\sigma(x)$ et $g''_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sigma^2}\left(-1 + \dfrac{x^2}{\sigma^2}\right) g_\sigma(x) = \dfrac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4}\, g_\sigma(x)$.
   On obtient le tableau de variations suivant (avec $g_\sigma(-\sigma) = g_\sigma(\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$) :

x	$-\infty$		$-\sigma$		0		σ		$+\infty$
$g''_\sigma(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'_\sigma(x)$	0	$\nearrow$	> 0	$\searrow$	0	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	0
$g_\sigma(x)$	0	$\nearrow$	$g_\sigma(-\sigma)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g_\sigma(\sigma)$	$\searrow$	0

La dérivée seconde s'annule en exactement deux points : $-\sigma$ et σ. On obtient la courbe représentative suivante :



IB - Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

4. $\forall \xi \in \mathbb{R}$,, la fonction $x \mapsto f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)$ est définie continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)| = |f(x)|$.
   Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{x \mapsto f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.
5. — $\forall x \in \mathbb{R}, \xi \mapsto f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
   — $\forall \xi \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$,
   — $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)| \leqslant |f(x)|$
   — f est intégrable sur $\mathbb{R}$

   D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x$ est définie continue sur $\mathbb{R}$. <u>conclusion</u> : $\boxed{\mathcal{F}(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

IC - Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

6. f' est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f'(t)\ \mathrm{d}t$ existe. Or, $\displaystyle\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t = f(x) - f(0)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ existe.
   Si $\ell \neq 0$, $|f(x)| \sim_{+\infty} |\ell|$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\ell|\ \mathrm{d}t$ diverge et $x \mapsto |\ell|$ de signe constant alors, par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est divergente.
   Par contraposition, f intégrale sur $\mathbb{R}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. De même, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   <u>conclusion</u> : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)}$
7. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)$. On peut effectuer une intégration par parties en considérant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ci-dessous :

$$\begin{cases} u(x) = f(x) & u'(x) = f'(x) \\ v(x) = \exp(-i\,2\pi\xi x) & v'(x) = -2i\pi\xi\ \exp(-i\,2\pi\xi x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} u(x)\,v(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} u(x)\,v(x)$$

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f'(x)}_{\uparrow}\ \underbrace{\exp(-i\,2\pi\xi x)}_{\downarrow}\ \mathrm{d}x = \underbrace{\Big[f(x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,(-2)i\pi\xi\ \exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x =$$

   $2i\,\pi\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi)$.
   <u>conclusion</u> : $\boxed{\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\,\pi\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi)}$.

ID -

8. L'application $x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$ est définie continue positive sur $\mathbb{R}$.
   Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\,x^{2p}\exp(-x^2) = 0 = \lim_{x\to-\infty} x^2\,x^{2p}\exp(-x^2)$ donc $x^{2p}\exp(-x^2) = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2}) = O_{-\infty}(\frac{1}{x^2})$. Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sont des intégrales de Riemann convergentes, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\ \mathrm{d}x$ converge
   <u>conclusion</u> : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.
9. Effectuons une intégration par parties en considérant : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} & u'(x) = x^{2p} \\ v(x) = e^{-x^2} & v'(x) = -2x\,e^{-x^2} \end{cases}$.

Cette intégration par parties est licite puisque les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\,v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\,v(x) = 0$.

$$M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^{2p}}_{\uparrow}\ \underbrace{e^{-x^2}}_{\downarrow}\ \mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\,e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}\,(-2x)\,e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{2p+1}\,M_{p+1}$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ M_{p+1} = \frac{2p+1}{2}\,M_p}$

Soit l'hypothèse de récurrence : $H_p : M_p = \dfrac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$

<u>H_0 ?</u> $M_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}(2\,0)!}{2^{2\,0}0!} \Rightarrow H_0$

<u>$H_p \Rightarrow H_{p+1}$?</u> $H_p \Rightarrow M_p = \dfrac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} \Rightarrow M_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2}\,\dfrac{\sqrt{\pi}\,(2p)!}{2^{2p}p!} = \dfrac{\sqrt{\pi}\,(2p+1)!}{2^{2p+1}p!} = \dfrac{\sqrt{\pi}\,(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} \Rightarrow H_{p+1}$

<u>conclusion</u> : $\boxed{(H_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ H_p \Rightarrow H_{p+1}) \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}}$

10. La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ \cos(y) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}\,y^{2p}$.

Pour $y = 2\pi\xi x$, on trouve $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2\pi\xi x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}\,2^{2p}\pi^{2p}\xi^{2p}x^{2p}$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(-x^2)\,\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\,\exp(-x^2)\,x^{2p} \text{ avec } c_p(\xi) = (-1)^p\,\frac{2^{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}\,\xi^{2p}}$

11. $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\cos(2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x - i\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\sin(2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x$

La fonction $x \mapsto \exp(-x^2)\sin(2\pi\xi x)$ est impaire intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\sin(2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x = 0$.

D'où, d'après la question Q 10, $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\,\exp(-x^2)\,x^{2p}\ \mathrm{d}x$.

On pose $f_p : x \mapsto c_p(\xi)\,\exp(-x^2)\,x^{2p}$.
$\forall p \in \mathbb{N},\ f_p$ est définie continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 8).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_p(x)|\ \mathrm{d}x = |c_p(\xi)|\ M_p = \frac{2^{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}\,\xi^{2p}\,\frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} = \sqrt{\pi}\,\frac{(\pi^2\xi^2)^p}{p!}.$$

Comme $\dfrac{(\pi^2\xi^2)^p}{p!}$ est le terme général d'une série convergente, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et permuter somme et intégrale.

$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,x^{2p}\ \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\,M_p$

$\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\,\sqrt{\pi}\,\frac{(\pi^2\xi^2)^p}{p!} = \sqrt{\pi}\,\exp(-\pi^2\xi^2)$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\big(-\pi^2\xi^2\big)}$.

12. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ qui est licite car réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-i2\pi\xi\, x)\,\mathrm{d}x \\
&\underbrace{=}_{u=\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2\right) \exp(-i2\pi\xi\,\sqrt{2}\sigma u)\,\sqrt{2}\sigma\ \mathrm{d}u \\
&\underbrace{=}_{Q11} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\,\exp(-\pi^2\,(\sqrt{2}\sigma\xi)^2) = \exp\left(\frac{\xi^2}{2\,\frac{1}{(2\pi\sigma)^2}}\right) = \underbrace{\sigma'\sqrt{2\pi}}_{=\mu}\, g_{\sigma'}(\xi)
\end{aligned}$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Pour } \sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}, \text{ on a } \exists \mu \in \mathbb{R} \,/\, \mathcal{F}(g_\sigma) = \mu\, g_{\sigma'} \ (\text{avec } \mu = \sigma'\sqrt{2\pi} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})}$.

II - Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

13. Notons $\varphi(t,x) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}\,\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}\right)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = -\frac{1}{\sigma^2+2t}\,\varphi(t,x) + \frac{x^2}{(\sigma^2+2t)^2}\,\varphi(t,x) = \frac{x^2-\sigma^2-2t}{(\sigma^2+2t)^2}\,\varphi(t,x)$$

En reprenant le calcul effectué à la question Q 3, on trouve :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t,x) = \frac{x^2-(\sigma^2+2t)}{(\sigma^2+2t)^2}\,\varphi(t,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) \Rightarrow \varphi \text{ vérifie i}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(.,x) : t \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}\,\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}\right)$ est définie continue sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t,x) = \varphi(0,x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma^2}\,\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \underbrace{=}_{\sigma>0} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = g_\sigma(x) \Rightarrow \varphi$ vérifie iii

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{La fonction } \varphi : (t,x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) \text{ vérifie i et iii}}$

IIA -

14. Soit $t > 0$, soit $T = 2t$. La fonction f vérifie la condition ii, on peut choisir une fonction Φ_T continue intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in]0,T[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(t,x)| \leqslant \Phi_T(x)$.

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(t,x)\exp(-2i\,\pi\xi x)| = |f(t,x)| \leqslant \Phi_T(x)$$

Par théorème de comparaison, l'intégrabilité de Φ_T sur $\mathbb{R}$ entraîne l'intégrabilité de $x \mapsto f(t,x)\exp(-2i\,\pi\xi x)$ sur $\mathbb{R}$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall t > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } x \mapsto f(t,x)\exp(-2i\,\pi\xi x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

15. <u>remarque</u> : *La notation $\widehat{g_\sigma}(\xi)$ n'est pas cohérente et doit être interprétée comme $\mathcal{F}(g)(\xi)$ ce qui a dû géner les étudiants les plus rigoureux.*
Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers zéro.
Soit $f_n : x \mapsto f(t_n,x)\,\exp(-i\,2\pi\xi x)$.
La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Soit $T > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n \in]0,T[$.
La fonction f vérifie la condition ii, on peut choisir une fonction Φ_T continue intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$\forall t \in]0,T[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(t,x)| \leqslant \Phi_T(x)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n \in]0,T[\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| = |f(t_n,x)| \leqslant \Phi_T(x)$$

La fonction f vérifie la condition iii donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto g_\sigma(x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)$ sur $\mathbb{R}$.

Toutes les conditions d'application du théorème de convergence dominée sont satisfaites, donc :

— La suite $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge,

— $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x}_{=\hat{f}(t_n,\xi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x = \mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$

On a donc pour tout suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui converge vers zéro, la suite $(\hat{f}(t_n,\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g_\sigma(\xi)$.

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Par caractérisation séquentielle des limites, on a } \lim_{t\to 0^+} \hat{f}(t,\xi) = \mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)}$.

16. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Soit $T > 0$, soit $t \in]0,T[$.
La fonction f vérifiant la condition ii, on choisit Ψ_T continue intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]0,T[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant \Psi_T(x)$$

Posons $\varphi : (t,x) \mapsto f(t,x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)$

— Pour tout réel $t \in]0,T[$, la fonction $\varphi(t,.) : x \mapsto f(t,x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question Q 14.

— Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi(.,x) : t \mapsto f(t,x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,T[$,

— $\forall t \in]0,T[,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i\,2\pi\xi x)\right| = \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leqslant \Psi_T(x)$

— Ψ_T intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, l'application $\hat{f}(.,x) : t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)$ d

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,T[$ de dérivée $t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x$.

La résultat étant valable pour tout T strictement positif, on peut conclure.

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall t > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x}$.

17. On remarque que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x = \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\xi)$
La fonction f vérifiant la condition i, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall t > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i\,2\pi\xi x)\ \mathrm{d}x \\
&= \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\xi) \underbrace{=}_{\text{condition i}} \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)\right)(\xi) \\
&\underbrace{=}_{Q7.} 2i\pi\xi\, \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot)\right)(\xi) \underbrace{=}_{Q7.} (2i\pi\xi)^2\, \mathcal{F}\left(f(t,\cdot)\right)(\xi) = -4\pi^2\xi^2 \hat{f}(t,\xi)
\end{aligned}$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall t > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2 \hat{f}(t,\xi)}$.

IIB -

18. D'après la question Q 17, pour ξ fixé, l'application $t \mapsto \hat{f}(t,\xi)$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constant $y' + 4\pi^2\xi^2\, y = 0$. Elle est donc de la forme $t \mapsto \text{Cste } \exp(4\pi^2\xi^2\, t)$, la constante Cste étant fonction de ξ, a priori complexe.
Comme $Cste = \lim\limits_{t\to 0^+} \text{Cste } \exp(4\pi^2\xi^2\, t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \hat{f}(t,\xi) \underbrace{=}_{Q15} \underbrace{\widehat{g_\sigma}(\xi)}_{\in\mathbb{R}}$, on en déduit Cste $\in \mathbb{R}$.

conclusion : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R},\ \exists K(\xi) \in \mathbb{R} \,/\, \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \hat{f}(t,\xi) = K(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t)}$.

19. D'après la question Q 15, $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t\to 0^+} \hat{f}(t,\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.
Et d'après la question Q 18, $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t\to 0^+} \hat{f}(t,\xi) = \lim\limits_{t\to 0^+} K(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t) = K(\xi)$. conclusion $\boxed{K(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)}$.

IIC -

20. D'après la question Q 12, $\mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$ est de la forme $\mu\, g_{\sigma'}(\xi)$ avec $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}$ et $\mu = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
On a donc $\widehat{g_\sigma}(\xi) = \mu\, g_{\sigma'}(\xi) = \dfrac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma'}\right) = \mu\sqrt{2\pi}\,\sigma\, \exp(-2\pi^2\sigma^2\, x^2)$
$\Rightarrow \hat{f}(t,\xi) = K(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t) = \widehat{g_\sigma}(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t) = \mu\sqrt{2\pi}\,\sigma\, \exp(-2\pi^2\sigma^2\xi^2)\, \exp(-4\pi^2\xi^2 t)$
$\Rightarrow \hat{f}(t,\xi) = K(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t) = \mu\sqrt{2\pi}\,\sigma\, \exp(-2\,\pi^2\,(\sigma^2 + 2t)\xi^2)$
conclusion : $\boxed{\text{Pour } \nu_\sigma = \mu\sqrt{2\pi}\,\sigma\ \text{, on a : } \forall \xi \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ \hat{f}(t,\xi) = \nu_\sigma \exp\big(-2\pi^2(\sigma^2 + 2t)\,\xi^2\big)}$

21. $\nu_\sigma = \mu\sqrt{2\pi}\,\sigma \underbrace{=}_{Q12} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\,\sigma = 1$. conclusion : $\boxed{\nu_\sigma = 1}$.

22. $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+t}}}(\xi) = \mu\, g_{\sigma'}(\xi)$ avec $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2+2t}}$
$\widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+t}}}(\xi) = \mu\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+2t}\, \exp(-\pi^2(\sigma^2+2t)\xi)$
$\Rightarrow \hat{f}(t,\xi) = \nu_\sigma\, \exp(-\pi^2(\sigma^2+2t)\xi) = \dfrac{\nu_\sigma}{\mu\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+2t}}\widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+t}}}(\xi) \Rightarrow \mathcal{F}f(t,.) = \lambda_{\sigma,t}\,\mathcal{F}(g_{\sqrt{\sigma^2+t}})$.
Par linéarité de l'intégrale, on vérifie aisément que la fonction $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est linéaire sur l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$.
On a donc $\mathcal{F}(f(t,.)) = \mathcal{F}(\lambda_{\sigma,t}\, g_{\sqrt{\sigma^2+t}})$ et d'après le résultat admis $f(t,.) = \lambda_{\sigma,t}\, g_{\sqrt{\sigma^2+t}}$.
conclusion : $\boxed{\forall t > 0\ ,\ \exists \lambda_{t,\sigma} \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(t,\cdot) = \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}$

23. D'après la question Q 17, avec $\xi = 0$, on a $\underline{\forall t > 0,\ \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,0) = 0}$.
On remarque que $I(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\ \mathrm{d}x = \hat{f}(t,0)$.
Or $\forall t > 0,\ \dfrac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t,0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\hat{f}(t+\varepsilon) - \hat{f}(t)}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{I(t+\varepsilon) - I(t)}{\varepsilon} = I'(t)$
$\Rightarrow \forall t > 0,\ I'(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{la fonction } I\ : t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\ \mathrm{d}x \text{ est constante sur l'intervalle }]0,+\infty[}$

24. Soit $t > 0$.
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\ \mathrm{d}x \underbrace{=}_{Q22} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{t,\sigma}\, g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)\ \mathrm{d}x = \lambda_{t,\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)\ \mathrm{d}x}_{=1 \text{ (d'après la question Q 2)}}$
$\Rightarrow \lambda_{t,\sigma} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\ \mathrm{d}x = \hat{f}(t,0) \underbrace{=}_{Q20} \nu_\sigma \underbrace{=}_{Q21} 1 \Rightarrow f(t,\cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$. conclusion : $\boxed{\forall t > 0,\ f(t,\cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}$.