Devoir non surveillé 4 - Correction

Thème : Nature et calculs d'intégrales impropres

Remarques générales

• Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ n'apporte rien pour la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
En contre-exemple, on pensera à $f(x) = \dfrac{1}{x}$...

• Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, il n'y pas besoin d'étudier l'intégrabilité au voisinage de 0 pour déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

• Quand l'intégrale est impropre aux deux bornes, il n'est nullement besoin d'évoquer la relation de Chasles pour déterminer sa nature (revoir la définition).

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+5t+6}$ et $\displaystyle\int_0^{X} \frac{dt}{t^2+5t+6}$... ce n'est pas pareil...

• Il est faut d'écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+5t+6} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+2} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+3}$ car ces deux dernières intégrales divergent (par comparaison).

• Beaucoup d'erreurs dans les manipulations d'équivalents. Par exemple, on ne peut pas négliger 2 dans $2\ln(x)$, mais on peut le faire dans $\ln(x) + 2$.

• Un erreur très courante aussi est de remplacer une expression par un équivalent, dans une égalité, dans une inégalité ou dans une intégrale... Cela est complètement faux !

• La dernière question est souvent fausse. Si l'on se souvient de la définition de la fonction dérivée f' que l'on construit point par point, cela n'a aucun sens de la prolonger par continuité en 1 : la valeur attribuée en 1 serait-elle le nombre dérivé de f en 1 ?...
Il s'agissait d'appliquer soigneusement le théorème de la limite de la dérivée. Ce n'est pas difficile, du moins quand on connaît l'énoncé...

Exercice 1

• Nature de $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx$:

La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq \dfrac{e^{-x}}{1+x^2} \leq e^{-x}$. Or $x \longmapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$ l'est aussi. Ainsi

$$\boxed{J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx \text{ converge}}$$

• Nature de $J_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ (elle est dans le cours) :

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

En 0 : $\left|\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}\right| \leq |\ln(x)|$ et ln est intégrable sur $]0,1]$. Donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ l'est aussi.

En $+\infty$: $\left|\dfrac{\ln(x)}{1+x^2}\right| = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$. Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann).

Donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ l'est aussi.

$$\boxed{J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx \text{ converge}}$$

• Nature de $J_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$:

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

En 0 : $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann).

Donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ l'est aussi.

En $+\infty$: $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$. Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann).

Donc, par comparaison, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}$ l'est aussi.

$$\boxed{J_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)} \text{ converge}}$$

Exercice 2

On effectue la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{t^2+5t+6}$.

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{t^2+5t+6} = \frac{a}{t+2} + \frac{b}{t+3}.$$

Le calcul donne $a = 1$ et $b = -1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{dt}{t^2+5t+6} &= \int_0^X \frac{dt}{t+2} - \int_0^X \frac{dt}{t+3} \\
&= \Big[\ln|t+2|\Big]_0^X - \Big[\ln|t+3|\Big]_0^X \\
&= \ln(X+2) - \ln(2) - \ln(X+3) + \ln(3) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(3/2)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale I_1 est convergente et $\boxed{I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+5t+6} = \ln(3/2).}$

Exercice 3

On définit les fonctions F et G par les égalités suivantes.

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}.$$

1. • Si $x \in]0,1[$ alors $0 < x^2 < x < 1$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sont continues sur le segment $[x^2, x]$. Ainsi, $F(x)$ et $G(x)$ existent.

   Si $x \in]1,+\infty[$ alors $0 < x < x^2 < 1$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sont continues sur le segment $[x, x^2]$. Ainsi, $F(x)$ et $G(x)$ existent.

   Finalement, $\boxed{F(x) \text{ et } G(x) \text{ existent pour } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[.}$

2. (a) Soit $x \in]1,+\infty[$. La fonction ln est croissante et strictement positive sur $]1,+\infty[$ donc, pour tout $t \in [x, x^2]$, on a $\dfrac{1}{\ln(x^2)} \leq \dfrac{1}{\ln(t)} \leq \dfrac{1}{\ln(x)}$. Et par propriété algébrique de ln, on obtient

   $$\boxed{\forall t \in [x, x^2], \quad \frac{1}{2\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}.}$$

   (b) Par positivité de l'intégrale, on obtient

   $$\int_x^{x^2} \frac{dt}{2\ln(x)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(x)}.$$

   Et donc $\boxed{\forall x \in]1,+\infty[, \quad \dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq F(x) \leq \dfrac{x(x-1)}{\ln(x)}.}$

   (c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(x-1)}{\ln(x)} = +\infty$. Donc, par le théorème d'encadrement, on trouve :

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$$

3. Soit $x \in]0,1[$.
   La fonction ln est croissante et strictement négative sur $]0,1[$ donc, pour tout $t \in [x^2, x]$, on a

   $$\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)} = \frac{1}{2\ln(x)} < 0.$$

   Par positivité de l'intégrale sur le segment $[x^2, x]$, on obtient

   $$\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln(x)} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{2\ln(x)}.$$

   Et donc $\forall x \in]0,1[, \; -\dfrac{x(x-1)}{\ln(x)} \leq -F(x) \leq -\dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)}$.
   En multipliant l'encadrement par -1, et par positivité de l'intégrale, on trouve :

   $$\boxed{\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq F(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}.}$$

Et puisque, par croissances comparées, $\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{\ln(x)} = 0.$
Donc, par le théorème d'encadrement, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} F(x) = 0.}$$

4. On divise les encadrements précédents par $x > 0$. Le théorème d'encadrement donne encore :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0.}$$

Interprétations graphiques :

- au voisinage de $+\infty$, le graphe de F présente une branche parabolique d'axe (Oy).
- au voisinage de 0, si l'on prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 0$ et donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Ainsi, le graphe de F présente une tangente horizontale en $x = 0$.

5. (a) Pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} = \Big[\ln|\ln(t)|\Big]_x^{x^2} \\ &= \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)| = \ln\left|\frac{2\ln(x)}{\ln(x)}\right| = \ln(2) \end{aligned}$$

(b) On a $F(x) - G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t\ln(t)}\right) dt = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)} dt.$

Soit $v : t \in]0,1[\cup]1,+\infty[\longmapsto \dfrac{t-1}{t\ln(t)}$.

L'application v est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $\lim_{t\to 1} v(t) = 1$.

On prolonge donc v par continuité en 1 en posant $v(1) = 1$.

Cette nouvelle fonction v est continue sur $]0,+\infty[$, soit V une de ses primitives. On a donc

$$F(x) - G(x) = V(x^2) - V(x)$$

et comme U est continue (en 1), on obtient : $\boxed{\lim_{x\to 1} \Big(F(x) - G(x)\Big) = V(1) - V(1) = 0.}$

(c) D'après les questions précédentes, on a $\lim_{x\to 1} F(x) = \ln(2)$.

On prolonge donc F par continuité en posant $\boxed{F(1) = \ln(2).}$

6. (a) L'application $h : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Soit H une primitive de h. On a donc

$$F(x) = H(x^2) - H(x).$$

Et comme H est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, la fonction F l'est aussi et

$$F'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = 2xh(x^2) - h(x).$$

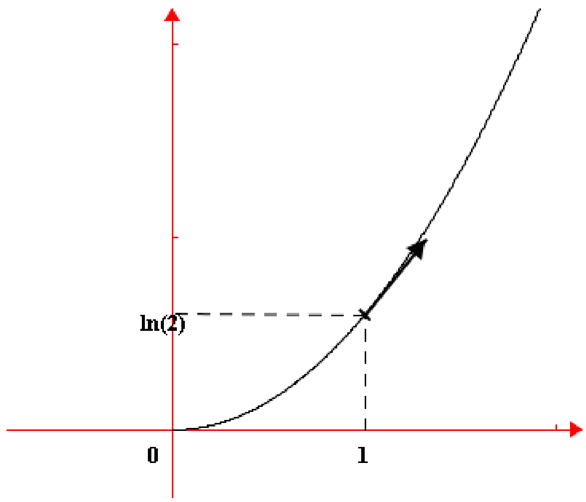
On trouve $\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}.}$

(b) On a $\boxed{\lim_{x \to 1} F'(x) = 1.}$

(c) La fonction F est continue sur $]0, +\infty[$, dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $\lim_{x \to 1} F'(x) = 1$.
Par le théorème de la limite de la dérivée,

$$\boxed{F \text{ est dérivable en 1 et } F'(1) = 1.}$$

7. D'après les questions précédentes, la courbe représentative de F a l'allure suivante.



Problème 1
Mines-Ponts PSI 2024 maths 1 (partie 1)

Un corrigé de G. Gallois

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynômiale en $|x|$, telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |P(x)| \quad \text{avec} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k$$
Notons $C = \sum_{k=0}^{d} |a_k|$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq 1$, par l'inégalité triangulaire :
$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k\right| \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^k \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k| = C \leq C(1+|x|^d)$$
et pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| > 1$, si $k \in [\![0, d]\!]$, $|x|^k \leq |x|^d$; donc par l'inégalité triangulaire :
$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k\right| \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^k \leq \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^d = C|x|^d \leq C(1+|x|^d)$$
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|f(x)| \leq |P(x)| \leq C(1+|x|^d)$$
Donc $\boxed{f \text{ est à croissance lente.}}$
Autre rédaction possible : en en étudiant les limites en $\pm\infty$ à l'aide de l'équivalent $P(x) \sim a_d|x|^d$ on a $P(x) \underset{|x|\to+\infty}{\sim}{}_{x\to\pm\infty} a_d|x|^d$ donc $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{|P(x)|}{1+|x|^d} = |a_d|$.
Finalement, la fonction continue $x \mapsto \frac{|P(x)|}{1+|x|^d}$ possède une limite finie en $\pm\infty$ donc elle bornée sur $\mathbb{R}$.
Cette dernière propriété n'étant pas explicitement dans le programme officiel, il faudrait rédiger un peu plus précisément :
$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{|P(x)|}{1+|x|^d} = |a_d|$ donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $|x| \geq A$, $\frac{|P(x)|}{1+|x|^d} \leq |a_d| + 1$.
Et $x \mapsto \frac{P(x)}{1+|x|^d}$ est continue sur le segment $[-A, A]$, donc elle est bornée sur $[-A, A]$: il existe $K \geq 0$ tel que pour tout $|x| \leq A$, $\frac{|P(x)|}{1+|x|^d} \leq K$.
On a alors en posant $C = \max(|a_d| + 1, K)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \leq C(1+|x|^d)$.
2. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.
La fonction φ étant continue, on a $f\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ par produit de fonctions continues.
Soit $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq C(1+|x|^k)$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|f(x)\varphi(x)| \leq C(1+|x|^k)\varphi(x)$$
On a par croissance comparée $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^2 e^{-x^2/2} = 0$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^{k+2} e^{-x^2/2} = 0$; par conséquent,
$$\lim_{|x|\to+\infty} Cx^2(1+|x|^k)\varphi(x) = 0 \quad \text{donc} \quad C(1+|x|^k)\varphi(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{d'où} \quad f(x)\varphi(x) \underset{|x|\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ (intégrale de Riemann) donc $f\varphi$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et en $-\infty$ d'où $f\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ c'est à dire :

$$\boxed{f \in L^1(\varphi).}$$

On admet dans toute la suite du problème que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1$.

3.
   - la fonction nulle appartient clairement à $CL(\mathbb{R})$.
   - Soient f, g deux fonctions appartenant à $CL(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
     Soit $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$ et $k_f, k_g \in \mathbb{N}$ tel que :

     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq C_f \left(1 + |x|^{k_f}\right) \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq C_g \left(1 + |x|^{k_g}\right)$$

     Alors
     $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\alpha f(x) + g(x)| \leq |\alpha f(x)| + |g(x)| \leq |\alpha| C_f \left(1 + |x|^{k_f}\right) + C_g \left(1 + |x|^{k_g}\right)$$
     Donc $\alpha f + g$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en $|x|$ donc d'après la question 1, $\alpha f + g \in CL(\mathbb{R})$.

   $CL(\mathbb{R})$ est donc stable par combinaison linéaire, et contient la fonction nulle ; $CL(\mathbb{R})$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   - *Stabilité de $CL(\mathbb{R})$ pour le produit.* Soit $f, g \in CL(\mathbb{R})$. On garde les notations précédentes, $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$ et $k_f, k_g \in \mathbb{N}$.

   On a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)g(x)| \leq C_f C_g \left(1 + |x|^{k_f}\right)\left(1 + |x|^{k_g}\right)$$

   Donc fg est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en $|x|$ d'où d'après la question 1, $fg \in CL(\mathbb{R})$.

4. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $g_x : y \mapsto f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)$. Montrons que $g_x \in L^1(\varphi)$.
   On a $g_x \in C^0(\mathbb{R})$ par composée de fonctions continues, f étant continue.
   De plus, f appartenant $CL(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que :

   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g_x(y)| \leq C\left(1 + \left|e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right|^k\right) \leq C\left(1 + \left(e^{-t}|x| + \sqrt{1 - e^{-2t}}|y|\right)^k\right)$$

   Donc g_x est majorée par une fonction polynômiale en $|y|$ donc g_x est à croissante lente d'après la question 1. Donc $g_x \in C^0 \cap CL(\mathbb{R})$ donc $g_x \in L^1(\varphi)$ d'après la question 2.
   Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\, \mathrm{d}y$ est convergente, ce qui montre que $P_t(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   - *Linéarité de P_t.* Soit $f, g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
     Par linéarité de l'intégrale :

   $$\begin{aligned}
   P_t(\alpha f + g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f + g)\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\, \mathrm{d}y \\
   &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\, \mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\, \mathrm{d}y \\
   &= \alpha P_t(f) + P_t(g)
   \end{aligned}$$

5. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Soit $C \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq C\left(1+|x|^k\right)$.
On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu :
   - soit $y \in \mathbb{R}$. Par continuité de f en y, $\lim\limits_{t\to+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right) = f(y)$ donc
$$\lim_{t\to+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) = f(y)\varphi(y)$$
   - pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\left|f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\right| &\leq C\left(1+\left|e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^k\right)\varphi(y)\\ &\leq C\left(1+\left(e^{-t}|x|+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)\varphi(y)\\ &\leq C\left(1+(|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)\end{aligned}$$
   Et la fonction $y \mapsto C\left(1+(|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)$ est intégrable car $P : y \mapsto C\left(1+(|x|+|y|)^k\right)$ est polynômiale en $|y|$ donc à croissance lente d'après **1** et continue donc $P \in L^1(\varphi)$ d'après **2**.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu :
$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} P_t(f)(x) &= \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

6. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Montrons que $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R})$ par le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   - Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de f.
   - *Hypothèse de domination locale :* pour tout $a > 0$, pour tout $x \in [-a,a]$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\left|f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\right| &\leq C\left(1+\left(e^{-t}|x|+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)\varphi(y)\\ &\leq C\left(1+(a+|y|)^k\right)\varphi(y)\end{aligned}$$
   Et la fonction (indépendante de x), $y \mapsto C\left(1+(a+|y|)^k\right)\varphi(y)$ est intégrable car $P : y \mapsto C\left(1+(a+|y|)^k\right)$ est polynômiale en $|y|$ et continue donc $P \in L^1(\varphi)$ d'après 1 et 2 (même argument qu'à la question précédente).

Donc l'application $P_t(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|P_t(f)(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right| \varphi(y) \ \mathrm{d}y \quad \text{(ineg. triangulaire)} \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} C\left(1 + (|x|+|y|)^k\right) \varphi(y) \ \mathrm{d}y \quad \text{car } f \in CL(\mathbb{R}) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} e^{-t} \leq 1 \\ \sqrt{1-e^{2t}} \leq 1 \end{array} \right. \\
&\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |y|^{k-j}|x|^j\right) \varphi(y) \ \mathrm{d}y \quad \text{(binôme de Newton)} \\
&\leq C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \ \mathrm{d}y + C \sum_{j=0}^{k} \left[\binom{k}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{k-j}\varphi(y) \ \mathrm{d}y\right] |x|^j \quad \text{linéarité} \\
&\leq C\left(1 + \sum_{j=0}^{k} a_j|x|^j\right) \quad \text{avec } a_j = \binom{k}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^{k-j}\varphi(y) \ \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Donc $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en $|x|$, indépendante de t.
Donc d'après la question 1, $P_t(f) \in CL(\mathbb{R})$.
De plus, $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R})$ d'après la première partie de la question, donc $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ donc d'après la question 2, $P_t(f) \in L^1(\varphi)$.

On admettra dans toute la suite du problème que, si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{CL}(\mathbb{R})$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

7. Commençons par justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x$.

   f' et g' sont continues et à croissante lente donc d'après la question 3, $f'g'$ est à croissance lente (et continue par produit de fonctions continues) : $f'g' \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ donc d'après la question 2, $f'g' \in L^1(\varphi)$ d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x$.

   On va effectuer une intégration par parties en remarquant que $(f'\varphi)' = L(f)\varphi$.
   On a $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f'(x)\varphi(x)g(x) = 0$ par croissance comparée car $f'g \in CL(\mathbb{R})$ par produit de fonctions à croissance lente.
   Par conséquent, par le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} (f'\varphi)'g$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'\varphi g'$ sont de même nature (convergente) et :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)g(x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f'\varphi)'(x)g(x) \ \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{[f'(x)\varphi(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)g'(x) \ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x) \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$