Devoir non surveillé 4

Thème : Nature et calculs d'intégrales impropres

à rendre le mardi 1er octobre

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes.

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx, \qquad J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx \quad \text{et} \quad J_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Exercice 2

Démontrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+5t+6}$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 3

On définit les fonctions F et G par les égalités suivantes.

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}.$$

1. Justifier que $F(x)$ et $G(x)$ existent pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. (a) Soit $x \in]1,+\infty[$. Démontrer que pour tout $t \in [x, x^2]$ on a $\dfrac{1}{2\ln(x)} \leq \dfrac{1}{\ln(t)} \leq \dfrac{1}{\ln(x)}$.
   (b) En déduire que, pour $x \in]1,+\infty[$ on a l'encadrement $\dfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq F(x) \leq \dfrac{x(x-1)}{\ln(x)}$.
   (c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
3. En adaptant la question précédente, démontrer que pour $x \in]0,1[$ on a encore l'encadrement
$$\frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq F(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}.$$
   En déduire la limite de F en 0.
4. Déterminer les limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.
   Interpréter graphiquement ces résultats.
5. (a) Calculer explicitement $G(x)$ pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \Big(F(x) - G(x)\Big) = 0$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 1} F(x)$.
   On prolonge alors par continuité la fonction F en 1.
6. (a) Montrer que F est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.
   (b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 1} F'(x)$?
   (c) Montrer que F est dérivable en 1 et déterminer $F'(1)$.
7. Donner l'allure de la courbe représentative de F.

Ce qui suit est facultatif

Problème 1 (Plus difficile)

- Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$
- Pour $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, on pose $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à croissance lente, c'est-àdire :
$$\mathrm{CL}(\mathbb{R})=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\exists C>0,\exists k\in\mathbb{N}\text{ tel que pour tout }x\in\mathbb{R},|f(x)|\leq C\left(1+|x|^k\right)\right\}$$
- On note $L^1(\varphi)=\{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}),\ f\varphi\text{ intégrable sur }\mathbb{R}\}$;
- Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Pour une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on définit si cela est possible la fonction $P_t(f)$ par :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad P_t(f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\mathrm{e}^{-t}x+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right)\varphi(y)dy.$$
- Pour f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $L(f)$ par :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad L(f)(x)=f''(x)-xf'(x).$$
- Une fonction $P:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ est dite fonction polynomiale en $|x|$ s'il existe $d\in\mathbb{N}$ et des réels $a_0,\ldots,a_d$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R},P(x)=\sum_{k=0}^{d}a_k|x|^k$
- Soient $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction et $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On admet que $\lim_{t\to+\infty}f(t)=\ell$ si, et seulement si, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty}t_n=+\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty}f(t_n)=\ell$.

1. Montrer que toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.
2. Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\cap\mathrm{CL}(\mathbb{R})\subset L^1(\varphi)$.

On admet dans toute la suite du problème que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt=1$.

3. Montrer que $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrer aussi que $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ est stable par produit.
4. Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Vérifier que la fonction $P_t(f)$ est bien définie pour $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\cap$ $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ et vérifier que P_t est linéaire sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\cap\mathrm{CL}(\mathbb{R})$.
5. Montrer que pour tout $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\cap\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ et tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\lim_{t\to+\infty}P_t(f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\varphi(y)dy.$$
6. Soit $t\in\mathbb{R}_+$.Montrer que si $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\cap\mathrm{CL}(\mathbb{R})$, alors $P_l(f)\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Montrer aussi que $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ indépendante de t. En déduire que $P_t(f)\in L^1(\varphi)$.

On admettra dans toute la suite du problème que, si $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})\cap\mathrm{CL}(\mathbb{R})$, alors
$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad\int_{-\infty}^{+\infty}P_t(f)(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx.$$

7. Montrer que pour toutes fonctions $f,g\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que les fonctions $f,\ f',\ f''$ et g soient à croissance lente, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty}L(f)(x)g(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)g'(x)\varphi(x)dx.$$