Devoir non surveillé 3 - Correction

Thème : Intégrales de Wallis, formule de Stirling

Remarques générales

• Montrer que $I_n \geq 0$ et que $I_n > 0$, ce n'est pas la même chose... Question I.2 très classique à bien revoir.

• Encore des confusions entre passage à la limite et théorème d'encadrement. On peut passer à la limite dans une égalité ou une inégalité large lorsque l'on sait que toutes les limites existent. Alors que le théorème d'encadrement, sous certaines hypothèses, donne l'existence et la valeur d'une limite.

• Encore trop d'erreurs dans les calculs de DL, attention.

Problème 1

I. Intégrales de Wallis (à connaître)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$.

1. On a $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} = 1$.

   Enfin, $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{\sin(2x)}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\text{On a } I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1 \text{ et } I_2 = \frac{\pi}{4}.}$$

2. L'application $x \mapsto \sin^n(x)$ est une fonction **positive** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc par positivité de l'intégrale, on a

$$I_n \geq 0.$$

   De plus, puisque cette application est **continue, positive** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, si on avait $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = 0$, on aurait pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n(x) = 0$, ce qui n'est évidemment pas le cas. Donc $I_n \neq 0$.

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de réels strictement positifs.}}$$

   On peut aussi dire : l'application $x \mapsto \sin^n(x)$ est une fonction **positive**, **continue** et **non identiquement nulle** sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $I_n > 0$.

3. Soit $n \geq 1$, on a
$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) . \sin^n(x)\, dx$$
On effectue une intégration par parties dans cette intégrale, on a
$$\begin{array}{ll} u(x) = \sin^n(x) & u'(x) = n\cos(x)\sin^{n-1}(x) \\ v(x) = -\cos(x) & v'(x) = \sin(x) \end{array}$$
Les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a alors
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[-\cos(x)\sin^n(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^{n-1}(x)\, dx \\ &\underset{n\geq 1}{=} 0 + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2(x)\right)\sin^{n-1}(x)\, dx \\ &= nI_{n-1} - nI_{n+1} \end{aligned}$$
On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}.}$

4. On définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = nI_{n-1}I_n$.
   - Soit n dans $\mathbb{N}^*$, on a
   $$a_{n+1} = (n+1)\, I_n . I_{n+1} = (n+1)\, I_n . \frac{n}{n+1} I_{n-1} = nI_{n-1}I_n = a_n$$
   On en déduit que $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite constante.}}$
   - Soit $n \geq 1$, on a donc $a_n = a_1 = I_0 . I_1 = \frac{\pi}{2} . 1 = \frac{\pi}{2}$.
   On a donc $nI_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2}$, ce qui nous permet de conclure :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}.}$$

5. Soit $n \geq 1$, on a pour x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $\sin^n(x) \leq \sin^{n-1}(x)$ et la croissance de l'intégrale nous permet de conclure que $I_n \leq I_{n-1}$. Via un changement d'indice, on a
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}.}$$

6. Soit $n \geq 1$, en divisant l'inégalité précédente par $\boxed{I_{n-1} > 0}$, on obtient :
$$\frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} = \frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$
et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on a du théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$, i.e. $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-1}.}$

Remarque

Dans le cas général, on n'a pas toutjours $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n-1}$!!!

Prendre par exemple $u_n = e^n$ ou même $u_n = e^{n^2}$.

7. Soit $n \geq 1$, on a $I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-1}I_n = \dfrac{\pi}{2n}$ et comme $I_n \geq 0$, on peut donc conclure : $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}.}$

8. D'après la question I.3 (avec $n = 2p-1$), on a

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)\times\cdots\times 1}{(2p)\times\cdots\times 2} I_0 \\ &= \frac{(2p)\times(2p-1)\times(2p-2)\times\cdots\times 2\times 1}{\big((2p)\times\cdots\times 2\big)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{\big(2^p p!\big)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}.}$

De même, on a

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)\times\cdots\times 2}{(2p+1)\times\cdots\times 3} I_1 \\ &= \frac{\big((2p)\times\cdots\times 2\big)^2}{(2p+1)\times(2p)\times(2p-1)\times\cdots\times 2\times 1} = \frac{\big(2^p p!\big)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$

9. On a vu que $I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{2n}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$. Or on a :

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{2}{\pi} = \frac{(2^n.n!)^4}{((2n)!)^2}\frac{2}{(2n+1)}\frac{1}{\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 1.$$

Puisque $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2} = \pi.}$

II. Preuve de la formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n) - n - \ln(n!)$.

1. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - n - 1 - \ln((n+1)!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + n + \ln(n!) \\ &= \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - 1 - \ln(n+1) - \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + \ln(n!) \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = \left(1 + \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{S_{n+1} - S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}.}$

2. On sait que $S_{n+1}-S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. Et comme $\dfrac{1}{12n^2}$ est positif, $S_{n+1}-S_n$ l'est aussi pour n suffisamment grand. On peut donc utiliser les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs.
   Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$) et donc $\sum (S_{n+1}-S_n)$ converge aussi. Et par télescopage, on trouve enfin :

$$\boxed{\text{La suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

3. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. On a donc $e^{\ell} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{S_n}$.
   Or $e^{-\ell}e^{S_n} = \dfrac{n^n\sqrt{n}e^{-n-\ell}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-\ell-n}\sqrt{n}.}$
4. D'après la question I.9, on a

$$\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{4n}\left(n^n\sqrt{n}e^{-n-\ell}\right)^4}{n\left((2n)^{2n}\sqrt{2n}e^{-2n-\ell}\right)^2} = \frac{e^{-2\ell}}{2}.$$

   On a donc $e^{-2\ell} = 2\pi$ ou encore $\boxed{\ell = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi).}$
5. Puisque $e^{-\ell} = \sqrt{2\pi}$, en reportant dans l'équivalent de $n!$, on trouve la formule de Stirling suivante.

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

Problème 2

Centrale PSI 2011 maths 1 (extrait)

Pour tout entier $k \geq 2$, on pose :

$$u_k = \ln(k) - \int_{k-1}^{k} \ln(t)\, dt$$

1. On dérive $(t-k+1)(k-t)$ en $2k-1-2t$ et on primitive $1/t^2$ en $-1/t$ pour obtenir, par intégration par parties,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt = \int_{k-1}^{k} \frac{2k-1-2t}{t}\, dt$$

   Une nouvelle intégration par parties donne (on dérive $2k-1-2t$ en -2 et on primitive $1/t$ en $\ln(t)$)

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt &= [\ln(t)(2k-1-2t)]_{k-1}^{k} + 2\int_{k-1}^{k} \ln(t)\, dt \\ &= -\ln(k) - \ln(k-1) + 2\int_{k-1}^{k} \ln(t)\, dt \end{aligned}$$

   En réordonnant cette égalité, il vient

$$u_k = \ln(k) - \int_{k-1}^{k} \ln(t)\, dt = \frac{1}{2}(\ln(k) - \ln(k-1)) - \int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\, dt$$

2. On remarque que
$$\forall t \in [k-1,k],\ 0 \leq \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$$
On en déduit par positivité de l'intégrale que
$$\forall k \geq 2,\ 0 \leq w_k \leq \frac{1}{2(k-1)^2}$$
Par comparaison des séries positives, $\sum (w_k)_{k\geq 2}$ est une série positive convergente. Notons S sa somme.

3. Avec l'identité de la question 1, on a
$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\ln(k)-\ln(k-1)) - \sum_{k=2}^{n}\ln(k) + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln(t)\ dt$$
Par télescopage, relation de Chasles et propriété de morphisme du logarithme, ceci devient
$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \frac{1}{2}(\ln(n+1)-\ln(1)) - \ln(n!) + \int_1^n \ln(t)\ dt = \frac{\ln(n)}{2} - \ln(n!) + n\ln(n) - n + 1$$
ce qui s'écrit aussi
$$S - v_n = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} - \ln(n!) + 1$$
ou encore
$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + a + v_n \ \text{ avec }\ a = 1 - S = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} w_k$$

4. Par la formule de Stirling, on a : $\sqrt{2\pi} = \lim\limits_{n\to+\infty} n!\dfrac{e^n}{n^n\sqrt{n}}$.

   Or par la question précedente : $n! = n^n.e^{-n}\sqrt{n}e^{a+v_n}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (reste partiel d'une série convergente), on obtient :
$$n!\frac{e^n}{n^n\sqrt{n}} = e^{a+v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^a.$$
   Par unicité de la limite, $e^a = \sqrt{2\pi}$ ou encore : $\boxed{a = \frac{1}{2}\ln(2\pi).}$

5. **Méthode 1 :** On a $w_k - \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{-6t^2+6(2k-1)t-(6k^2-6k+1)}{t^2}dt$. On intègre par parties en choisissant la constante C de sorte que le crochet soit nul :
$$\begin{aligned} w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} &= \frac{1}{12}\left[\frac{-2t^3+3(2k-1)t^2-(6k^2-6k+1)t+C}{t^2}\right]_{k-1}^{k} \\ &\quad + \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k}\frac{-2t^3+3(2k-1)t^2-(6k^2-6k+1)t+C}{t^3} \end{aligned}$$
   Un calcul rapide montre que la valeur convenable de C est $C = k(k-1)(2k-1)$. On arrive ainsi à l'égalité
$$\left|w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2}\right| = \frac{1}{6}\left|\int_{k-1}^{k}\frac{(t-k+1)(k-t)(2t-2k+1)}{t^3}dt\right| \leq \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k}\left|\frac{(t-k+1)(k-t)(2t-2k+1)}{t^3}\right| dt$$
   Donc $\left|w_k - \dfrac{1}{12}\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^3}dt.$

Méthode 2 : En posant $u = t - k + 1$ (on pourrait travailler avec les expressions initiales mais le calcul me parait plus clair avec des intégrale sentre 0 et 1), on a

$$w_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u(1-u)}{(u+k-1)^2} \, du$$

Une intégration par parties donne alors (on primitive le numérateur)

$$w_k = \frac{1}{12k^2} + \int_0^1 \frac{\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}}{(u+k-1)^2} \, du$$

et ainsi (on calcule l'intégrale et on soustrait)

$$w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{12k^2(k-1)} + \int_0^1 \frac{\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}}{(u+k-1)^2} \, du$$

Une étude élémentaire de fonction montre que $u \mapsto \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}$ croît sur $[0,1]$ et prend des valeurs entre 0 et $\frac{1}{12}$. On a donc

$$-\frac{1}{12k^2(k-1)} \leq w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \leq -\frac{1}{12k^2(k-1)} + \frac{1}{12} \int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2}$$

Le majorant est plus petit que $\frac{1}{12} \int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2}$ et donc que $\frac{1}{6} \int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2} = \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$.
On vérifie par ailleurs que

$$\frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3} - \frac{1}{12k^2(k-1)} = \frac{1}{12k(k-1)^2} \geq 0$$

et le minorant plus haut est plus grand que $-\frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$.
On a finalement montré que

$$\frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3} \leq w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^3}$$

ce qui correspond au résultat demandé.

6. On remarque que pour $p \geq n+1 \geq 1$ on a

$$\sum_{k=n+1}^{p} \left(w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right) = \sum_{k=n+1}^{p} w_k - \frac{1}{12} \int_n^p \frac{dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^{p} w_k + \frac{1}{12p} - \frac{1}{12n}$$

On passe au module et on utilise l'inégalité triangulaire et la question précédente pour en déduire que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} w_k - \frac{1}{12} \int_n^p \frac{dt}{t^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{p} \left(w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right) \right| \leq \frac{1}{6} \int_n^p \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12p^2}$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on en déduit alors

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leq \frac{1}{12n^2}$$

On a ainsi $v_n = \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui, injecté dans le résultat de **4.** donne

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Et puisque que $a = \dfrac{1}{2} \ln(2\pi)$, on a bien :

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

7. En appliquant la fonction exponentielle à l'égalité précédente, on obtient :

$$n! = n^n.e^{-n}.\sqrt{2n\pi}.e^{\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Et $e^{\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{2.12^2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

On a donc bien :

$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).}$$

Exercice 1

Correction succincte

On a $f(x) = \displaystyle\int_1^x t^t dt = \int_1^x e^{t\ln(t)}dt$.

Si l'on pose pour $t \geq 1$, $u(t) = t\ln(t)$ alors $u'(t) = \ln(t) + 1 > 0$ et $t^t = \dfrac{1}{\ln(t)+1}u'(t)e^{u(t)}$.

Par une intégration par parties **à justifier** :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{t^t}{\ln(t)+1}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1/t}{(\ln(t)+1)^2}t^t dt \\ &= \frac{x^x}{\ln(x)+1} - 1 + \underbrace{\int_1^x \frac{t^t}{t(\ln(t)+1)^2}dt}_{=g(x)} \end{aligned}$$

Pour x assez grand $0 \leq g(x) \leq (x-1)\dfrac{x^x}{x(\ln(x)+1)^2}$. Et donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^x}{\ln(x)}.}$