Devoir non surveillé 2 - Correction

Thème : Nature de séries

Remarques générales

• De bonnes choses dans l'utilisation des théorèmes de comparaison. Les erreurs sont les suivantes.

- Comparaison fausse,
- Comparaison correcte mais qui le permet pas de conclure,
- Application des théorèmes de comparaison à une série alternée.

Attention, la comparaison porte sur le terme général. $\boxed{\text{Il n'y a pas de } \sum \text{ dans les comparaisons.}}$

• Certains pensent encore que si u_n tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge. C'est la réciproque qui est vraie. La séries harmonique donne un contre-exemple.

• Attention à la précision du vocabulaire : « $\sum a_n$ converge » et « $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge » ... ce n'est pas la même chose !

• Attention à la précision de la rédaction. Lorsqu'on utilise un théorème, les hypothèses doivent être rigoureusement énoncées. Par exemple, dans le théorème des séries alternées, on a juste besoin de « $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante » et non pas « $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ».

• Pour étudier la nature de $\sum \dfrac{1}{n\ln^\beta(n)}$ avec $\beta > 0$, on doit faire une comparaison série/intégrale. La rédaction dans le cas d'une divergence est dans le cours (on minore les sommes partielles). Dans la première question, il s'agissait d'un cas de convergence (on majore les sommes partielles, comme elles sont croissantes, elles convergent). Dans ce cas, le théorème d'encadrement ne s'applique pas. Il faut connaître les deux raisonnements.

• L'exercice 2 était quasiment identique à un **(E1)**. C'est quand même surprenant de voir que 19 étudiants sur 38 l'aient très mal rédigé, avec des raisonnements faux. Pour ceux-là les méthodes de travail (voire parfois la quantité de travail) doivent être revues.

Exercice 1

1. Il s'agit d'une série de Bertrand (hors-programme) avec $\alpha = 1$ (valeur seuil). Comme le terme général est dominé par $\dfrac{1}{n}$, les théorèmes de comparaison ne permettent pas de conclure. On procède donc par comparaison avec une intégrale.

   Pour $n \geq 2$ entier, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)}$. Puisque les termes sont positifs, la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante. Et donc pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est majorée. On utilise pour cela une comparaison avec des intégrales. Seules les majorations suffisent.

   Soit $k \geq 3$. Pour tout $t \in [k-1, k]$, on a $\dfrac{1}{k\ln^2(k)} \leq \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$. Et par positivité de l'intégrale :

$$\frac{1}{k\ln^2(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt.$$

On somme pour $k=3$ à n, et on ajoute le premier terme : $S_n \leq \displaystyle\int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}dt + \frac{1}{2\ln^2(2)}$.

Or $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{t\ln^2(t)}dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(2)}$. Ainsi :

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leq \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2\ln^2(2)}.$$

Ainsi la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est majorée et comme elle est croissante, elle converge.

Donc, par définition, $\boxed{\sum \frac{1}{n\ln^2(n)} \text{ converge.}}$

2. • Nature de $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+n-1}$.

   Par croissances comparées, on a $\displaystyle\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^{1+1/2}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{1+1/4}}\right)$.
   Puisque les termes sont positifs, on peut utiliser les théorèmes de comparaison.

   La série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ converge car $\alpha = 5/4 > 1$, et donc $\boxed{\sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+n-1} \text{ converge.}}$

   • Nature de $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+3}$.

   On a l'équivalent $\displaystyle\frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$. Par croissances comparées, on a $\displaystyle\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}\right)$.
   Puisque les termes sont positifs, on peut utiliser les théorèmes de comparaison.

   La série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ diverge, et donc $\boxed{\sum \frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+3} \text{ diverge.}}$

   • Nature de $\displaystyle\sum \frac{2-n^2}{n^3\ln^2(n)+1}$. On a l'équivalent $\displaystyle\frac{2-n^2}{n^3\ln^2(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n\ln^2(n)}$.
   Par la question 1, $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln^2(n)}$ converge, donc par les théorèmes de comparaison (quitte à multiplier par -1 pour avoir des termes positifs), on obtient :

$$\boxed{\sum \frac{2-n^2}{n^3\ln^2(n)+1} \text{ converge.}}$$

3. Nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$: On pose $u_n = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. On a $u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} \ < \ 1$$

   Donc, par le critère de D'Alembert,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \text{ converge.}}$$

Exercice 2

1. • La suite $\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)$ décroît et tend vers 0, donc d'après le théorème des séries alternées,

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)} \text{ converge.}}$$

   • On a $\dfrac{1}{n^2\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Puisque les termes sont positifs, on peut utiliser les théorèmes de comparaison.
   La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge car $\alpha = 2 > 1$, et donc $\boxed{\sum \dfrac{1}{n^2\ln^2(n)} \text{ converge.}}$

2. On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$.

3. On a $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}\right)^2$.

   • On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}$. On a vu que $\sum v_n$ converge.

   • On pose $w_n = u_n - v_n$. D'après ce qui précède, on a $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{n^2\ln^2(n)}\right)$.
   Or la série $\sum \dfrac{1}{n^2\ln^2(n)}$ converge, donc par comparaison, $\sum w_n$ converge aussi.

   Finalement, $\sum u_n = \sum v_n + \sum w_n$ est la some de deux séries convergentes, donc $\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$

Problème

Règle de Raabe-Duhamel

Question préliminaire. cf cours

Partie 1 : Un cas simple.

1. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) + \ln(n^\alpha u_n) \\
&= \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \alpha\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{\alpha}{n} + \left(\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison :

$$\boxed{\text{la série } \sum (v_{n+1} - v_n) \text{ converge (absolument).}}$$

2. Or il s'agit d'une série télescopique donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{v_n} = \mathrm{e}^{\ell} = \lambda > 0$. Et comme $\mathrm{e}^{v_n} = n^{\alpha} u_n$, on a bien

$$\boxed{\exists \lambda > 0,\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^{\alpha}}.}$$

3. Puisque les séries sont à termes positifs, on peut appliquer les théorèmes de comparaison. On a donc les équivalences suivantes.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \iff \sum \frac{\lambda}{n^{\alpha}} \text{ converge} \underset{\text{Riemann}}{\iff} \alpha > 1.}$$

4. Application : Dans cette question, on se donne deux réels a et b strictement positifs.
Par une récurrence rapide, on vérifierait que u_n est bien strictement positif.
De plus, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b} = \dfrac{1+a/n}{1+b/n} = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)\left(1-\dfrac{b}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \dfrac{b-a}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
D'après les questions précédentes, on a :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \iff b - a > 1.}$$

Partie 2 : Règle de Raabe-Duhamel.

1. Si $\alpha < 0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\alpha}{n}$. Et donc, pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ et $-\dfrac{\alpha}{n}$ sont de même signe, c'est-à-dire positifs. Ainsi, pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et comme $u_n > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang. Comme elle est à termes strictements positifs, elle ne peut pas tendre vers 0 et donc :

$$\boxed{\text{Si } \alpha < 0 \text{ alors la série numérique } \sum u_n \text{ est grossièrement divergente.}}$$

2. (a) On raisonne comme précédemment en utilisant un équivalent de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
On a d'abord : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n^{\beta}}{(n+1)^{\beta}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Et donc :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} &= 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\beta-\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Puisque $\beta - \alpha \neq 0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\beta-\alpha}{n}$. Et comme $\beta - \alpha < 0$, pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ l'est aussi. On a bien :

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.}$$

(b) C'est un lemme du cours. Je donne quand même la solution de Younès qui est plus jolie :
On a pour tout $n \geq N$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n}$.
Et donc la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N}$ est décroissante, minorée par 0 donc convergente.
Elle est donc bornée, et on retrouve bien que $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n).}$

(c) Puisque $\beta > 1$, la série de Riemann $\sum v_n$ converge, et par comparaison,

$$\boxed{\text{si } \alpha > 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

3. Les calculs sont identiques : puisque $\beta - \alpha \neq 0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\beta - \alpha}{n}$. Et comme $\beta - \alpha > 0$, pour n assez grand, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ l'est aussi. On obtient :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Et par conséquent, $v_n \underset{n \to +\infty}{=} O(u_n)$. Enfin, puisque $\beta < 1$, la série de Riemann $\sum v_n$ diverge, et par comparaison,

$$\boxed{\text{si } \alpha < 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

4. On montre ici que, dans le cas où $\alpha = 1$, toutes les situations sont possibles.

(a) On pose $x_n = \dfrac{1}{n}$. La série harmonique $\sum x_n$ diverge et l'on a :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + 1/n} = 1 - \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) On pose $y_n = \dfrac{1}{n \ln^2(n)}$. La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t \ln^2(t)}$ est continue positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.
Donc par le théorème de comparaison série/intégrale, $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or :

$$\int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^2(t)} = \left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]_2^X \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln(2)}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\sum y_n \text{ converge.}}$

$$\begin{aligned}
\frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{n}{n+1} \frac{\ln^2(n)}{\ln^2(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}}\right)^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n \ln(n)} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Partie 3 : Applications.

1. On a $a_n > 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n+2}{2n+3} = 1 - \dfrac{1}{2n+3} = 1 - \dfrac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   On applique la règle de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ et on obtient $\boxed{\sum a_n \text{ diverge.}}$

2. On a $|b_n| > 0$ et $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \left|1 - \exp\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$.

   Par la règle de D'Alembert, on obtient $\boxed{\sum b_n \text{ converge (absolument).}}$

3. On se donne une fonction f strictement positive et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = f(1) f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdots f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   (a) On a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ car f est continue en 0.
   Comme $f(0) \neq 1$, la règle de D'Alembert permet de conclure :

   $$\boxed{\sum u_n \text{ converge} \iff f(0) < 1.}$$

   (b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, donné par la formule de Taylor-Young.

   $$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

   Et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 1 + \beta\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2} f''(0) + \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.
   Or $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   $\dfrac{1}{2(n+1)^2} f''(0) = \dfrac{1}{2n^2} f''(0) + \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \underset{n\to\infty}{O}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.
   Donc on a :

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\beta}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Et avec la partie I, on obtient $\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge} \iff \beta < -1}$